This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Google

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

L Soc 1726.9 Bd. Nov., 1889.

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

18 Nov., 1886 – 25 April, 1889.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH - PHYSISCHE CLASSE.

ACHTUNDDREISSIGSTER BAND.

1886.

MIT NEUN TAFELN UND SIEBEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.

~~48.23~~
LSoc 1726.9

1886, Nov. 18 – 1889, April 25.

[illegible]

INHALT.

Seite

C. **Neumann**, Ausdehnung der Keppler'schen Gesetze auf den Fall, dass die Bewegung auf einer Kugelfläche stattfindet 1

E. **Study**, Ueber die Raumcurven vierter Ordnung, zweiter Art. Vorgelegt von F. Klein 3

A. **Hurwitz**, Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip. Vorgelegt von F. Klein . . 10

Martin Krause, Zur Transformation der elliptischen Functionen. Vorgelegt von F. Klein 39

E. **Drechsel**, Ueber einen neuen, schwefel- und phosphorhaltigen Bestandtheil der Leber 44

Walther Dyck, Beiträge zur Analysis situs. II. Mittheilung. Vorgelegt von F. Klein. 53

C. **Neumann**, Ueber eine einfache Methode zur Begründung des Princips der virtuellen Verrückungen 70

C. **Neumann**, Ueber gewisse particulare Integrale der Differentialgleichung $\Delta F = F$, insbesondere über die Entwickelung dieser particularen Integrale nach Kugelfunctionen 75

Friedrich Engel, Zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen. Vorgelegt von A. Mayer 83

W. **von Tchisch** (St. Petersburg), Untersuchungen zur Anatomie der Grosshirnganglien des Menschen. Mitgetheilt von Paul Flechsig. 95

Ludwig Scheeffer, Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln. Aus seinen hinterlassenen Papieren mitgetheilt von A. Mayer. (Mit 2 Holzschnitten) 102

Axel Harnack, Existenzbeweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume 144

E. **Drechsel**, Ueber die Elektrolyse der normalen Capronsäure mit Wechselströmen 170

Seite

J. Thomae, Weitere Untersuchungen über den elastischen Kreiscylinder 186

Staude, Ueber Verallgemeinerungen des Graves'schen Theorems in der analytischen Mechanik. Vorgelegt von C. Neumann. (Mit 3 Holzschnitten.) 199

Erwin Voit, Die Schlagzahl des Herzens in ihrer Abhängigkeit von der Reizung des Nervus accelerans. (Aus dem physiologischen Institut zu Leipzig.) (Mit 7 Tafeln und 2 Holzschn.) 207

W. His, Ueber embryonale Ganglienzellen 290

Alfred Fischer, Neue Beiträge zur Kenntniss der Siebröhren. Vorgelegt v. A. Schenk. (Mit 2 Tafeln.) 291

Sophus Lie, Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen 337

A. Mayer, Die beiden allgemeinen Sätze der Variationsrechnung, welche den beiden Formen des Princips der kleinsten Action in der Dynamik entsprechen 343

Rud. Leuckart, Asconema gibbosum, ein Sphaerularia-artiger neuer Nematode 356

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts *Carl Friedrich von Gerber*.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Friedrich Zarncke* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1888.
Professor *Adolf Ebert* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1888.
Wirkl. Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Professor *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *Georg Ebers* in Leipzig.
—— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
Geheimer Rath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig.
Professor *Hans Georg Conon von der Gabelentz* in Leipzig.
—— *Gustav Hartenstein* in Jena.

Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.
Professor *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden.
Oberbibliothekar *Reinhold Köhler* in Weimar.
Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
Professor *August Leskien* in Leipzig.
—— *Hermann Lipsius* in Leipzig.
—— *Wilhelm Maurenbrecher* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
Professor *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig.
[Professor *Erwin Rohde* in Leipzig, gewählt am 2. Mai 1886, nach Heidelberg berufen Michaelis 1886.]
Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Anton Springer* in Leipzig.
—— —— *Johann Ernst Otto Stobbe* in Leipzig.
—— —— *Georg Voigt* in Leipzig.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig.
Professor *Ernst Windisch* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Professor *Hermann Alfred von Gutschmid* in Tübingen.
—— *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Erwin Rohde* in Heidelberg.
Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Ludwig* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1887.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1887.
Professor *Rudolf Böhm* in Leipzig.
—— *Christian Wilhelm Braune* in Leipzig.

Professor *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Oberbergrath *Hermann Credner* in Leipzig.
Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
—— *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
Professor *Axel Harnack* in Dresden.
—— *Wilhelm His* in Leipzig.
—— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
Professor *Sophus Lie* in Leipzig.
—— *Carl Neumann* in Leipzig.
—— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
Professor *Johannes Thomae* in Jena.
Geheimer Hofrath *August Töpler* in Dresden.
—— —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
Professor *Johannes Wislicenus* in Leipzig.
—— *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Edmund Drechsel* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Professor *Felix Klein* in Göttingen.
—— *Adalbert Krüger* in Kiel.
—— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Archivar:

Oberbibliothekar *Joseph Heinrich Gustav Ernst Förstemann* in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Johann Paul von Falkenstein 1882.
Karl August Wilhelm Eduard von Wietersheim 1865.

Philologisch-historische Classe.

Eduard Albrecht 1876.
Christoph Friedrich von Ammon 1850.
Wilhelm Adolf Becker 1846.
Hermann Brockhaus 1877.
Conrad Bursian 1883.
Georg Curtius 1885.
Johann Gustav Droysen 1884.
Gustav Flügel 1870.
Friedrich Franke 1871.
Hans Conon von der Gabelentz 1874.
Ernst Gotthelf Gersdorf 1874.
Carl Göttling 1869.
Gustav Hänel 1878.
Ferdinand Hand 1851.
Friedrich Christian August Hasse 1848.
Moritz Haupt 1874.
Gottfried Hermann 1848.
Friedrich Jacobs 1847.
Otto Jahn 1869.
Ludwig Lange 1885.
Carl Joachim Marquardt 1882.
Andreas Ludwig Jacob Michelsen 1881.
Carl Nipperdey 1875.
Carl von Noorden 1883.
Oscar Ferdinand Peschel 1875.
Ludwig Preller 1861.
Friedrich Wilhelm Ritschl 1876.
August Schleicher 1868.
August Seidler 1851.
Gustav Seyffarth 1885.
Carl Bernhard Stark 1879.
Friedrich Tuch 1867.
Friedrich August Ukert 1851.
Wilhelm Wachsmuth 1866.
Carl Georg von Wächter 1880.
Anton Westermann 1869.

Mathematisch-physische Classe.

Heinrich d'Arrest 1875.
Ludwig Albert Wilhelm von Bezold 1868.
Carl Bruhns 1881.
Carl Gustav Carus 1869.
Julius Cohnheim 1884.

Johann Wolfgang Döbereiner 1849.
Otto Linné Erdmann 1869.
Otto Funke 1879.
Peter Andreas Hansen 1874.
Wilhelm Hofmeister 1877.
Emil Huschke 1858.
Hermann Kolbe 1884.
Gustav Kunze 1851.
Carl Gotthelf Lehmann 1863.
Bernhard August von Lindenau 1854.
Richard Felix Marchand 1850.
Georg Mettenius 1866.
August Ferdinand Möbius 1868.
Carl Friedrich Naumann 1873.
Eduard Pöppig 1868.
Ferdinand Reich 1882.
Theodor Scheerer 1875.
Matthias Jacob Schleiden 1881.
Christian Friedrich Schwägrichen 1853.
Ludwig Friedrich Wilhelm August Seebeck 1849.
Samuel Friedrich Nathanael von Stein 1885.
Alfred Wilhelm Volkmann 1877.
Eduard Friedrich Weber 1871.
Ernst Heinrich Weber 1878.
Johann Carl Friedrich Zöllner 1882.

Leipzig, am 31. December 1886.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1886 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1885. Berlin 1886.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1885, No. 40—52. 1886, No. 1—39. Berlin 1886.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 14. Berlin 1886.

Richter, Otto, Ueber antike Steinmetzzeichen. 45. Progr. z. Winckelmannsfeste der Archaeologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1885.

Hülsen, Ch., Das Septizonium des Septimius Severus. 46. Progr. z. Winckelmannsfeste d. Archaeolog. Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1886.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XVIII, No. 18. 19. Jahrg. XIX, No. 1—17. Berlin 1885. 86.

Dobbert, Ed., Die Kunstgeschichte als Wissenschaft u. Lehrgegenstand. Rede in der Aula der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin am 21. März 1886 gehalten. Berlin 1886.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 78—81. Bonn 1884—86.

Veith, C. von, Das römische Köln. Nebst einem Plane der röm. Stadt. Im Auftr. des Vorstandes des Vereins v. Alterthumsfr. im Rheinl. verfasst. Festprogramm zu Winckelmanns Geburtstagsfeier. Bonn 1885.

Dreiundsechzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1885. Breslau 1886. Nebst Ergänzungsheft: *Stenzel, K. G.,* Rhizodendron Oppoliense Göpp. Breslau 1886.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N.F. Bd. 6, H. 3. Danzig 1886.

Göppert, H. R., u. *A. Menge,* Die Flora des Bernsteins u. ihre Beziehungen zur Flora der Tertiärformation u. der Gegenwart. Fortgesetzt von *H. Conwentz.* Mit Unterstütz. d. Westpreuss. Provinzial-Landtags herausg. von der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig. Bd. 2. Danzig 1886.

Förstemann, E., Erläuterungen zur Mayahandschrift der Königl. öffentl. Bibliothek zu Dresden. Herausgeg. auf Veranlassung der General-Direction der Königl. Sammlungen f. Kunst u. Wissenschaft. Dresden 1886.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. 31 (1885), H. 1—4 u. Beilage: *Zeuner, G.*, Zur mathematischen Statistik. Dresden 1886. Jahrg. 32 (1886), Supplementheft. Dresden 1886.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1885—86. Dresden 1886.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1885. Jahrg. 1886, Jan.—Juni. Dresden 1886.

Kgl. Sächsisches Polytechnikum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr 1885/86, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1886. — Programm f. d. Studienjahr, bez. Wintersem. 1886/87.

Codex diplomaticus Saxoniae Regiae. Im Auftrag des Königl. Sächs. Staatsministeriums herausg. von O. Posse u. H. Ermisch. II. Haupttheil. Bd. 13 (Urkundenbuch der Stadt Freiberg in Sachsen. Herausg. von H. Ermisch. Bd. 2). Leipzig 1886.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 17. Erlangen 1885.

Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a/M. f. d. Rechnungsjahr 1884—85. Frankfurt a/M. 1886.

Monatliche Mittheilungen aus dem Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissenschaftl. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Hsg. v. E. Huth. Jahrg. 4, No. 1. Frankfurt a/O. 1886.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1886. Freiberg 1886.

24. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1886.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 61, H. 2. Görlitz 1885.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 32, aus d. J. 1885. Göttingen 1885.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1885. Göttingen 1885.

Bericht über die im Jahr 1885 den Herzogl. Sammlungen zugegangenen Geschenke. Gotha 1886.

Nova Acta Academiae Carolinae Leopoldinae Caesareae German. naturae curiosorum. T. 47. 48. Halis 1885. 86.

Leopoldina. Amtl. Organ d. kais. Leopoldinisch-Carolinisch-deutschen Akad. der Naturforscher. H. XXI, No. 21—24. XXII, No. 1—20. Halle 1886.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 4. Folge, Bd. 4, 1885 (d. ganzen Reihe 58. Bd.), H. 5. 6. Bd. 5, 1886 (d. ganzen Reihe 59. Bd.), H. 1—3. Halle 1885. 86.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 3, H. 5. Heidelberg 1886.

Festschrift zur Feier des 500jährigen Bestehens der Ruperto-Carolina, dargebr. von d. naturhistor.-medicin. Verein zu Heidelberg. Heidelberg 1886.

Veröffentlichungen der Grossherz. Sternwarte zu Karlsruhe. Hrsg. von W. Valentiner. H. 2. Beobachtungen am Meridiankreis. Karlsruhe 1886.

Chronik der Universität zu Kiel f. d. J. 1884/85. F. d. J. 1885/86; Verzeichniss d. Vorles. Winter 1884/85, Sommer 1885, Winter 1885/86, Sommer 1886; Personalverz. Sommer 1884, Winter 1884/85. *Blass, Frdr.*, De Phaethontis Euripideae fragmentis Claromontanis. *Ders.*, Die socialen Zustände Athens im 4. Jhd. v. Chr. *Brockhaus, Friedr.*, Nikolaus Falck. *Förster, Rich.*, De Polemonis Physiognomicis. *Ders.*, Die klassische Philologie der Gegenwart. *Ders.*, Lucian in der Renaissance. *Klostermann, Aug.*, Die Gottesfurcht als Hauptstück der Weisheit. *Waitz, Geo.*, Friedrich Christoph Dahlmann. *Weyer, G. D. E.*, Heinrich Ferdinand Scherk. — 29 Dissertationen v. J. 1884/85, 72 Dissert. v. J. 1885/86.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1885, H. 1—12. Berlin 1886.

Schriften der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 26 (1885). Königsberg 1886.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. 20, H. 4. Jahrg. 21, H. 1—4. Leipzig 1886.

Romberg, H., Genäherte Oerter der Fixsterne, von welchen in den Astronom. Nachrichten Bd. 67—112 selbständige Beobachtungen angeführt sind, für die Epoche 1855 hergeleitet u. nach d. geraden Aufsteig. geordnet. Publication der astronomischen Gesellschaft, XVIII. Leipzig 1886.

Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. Jahrg. 11 (1884). 12 (1885). Leipzig 1885. 86.

Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte u. Alterthumskunde. Bd. 5, H. 1. Lübeck 1886.

Jahresbericht u. Abhandlungen des Naturwissenschaftl. Vereins in Magdeburg. 1885. Magdeburg 1886.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1885—Juli 1886. Meissen 1886.

Abhandlungen der historischen Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 17 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 58. Bd.), Abth. 3. München 1886.

Abhandlungen d. philosoph.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 17 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 59. Bd.), Abth. 3. München 1886.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1885, H. 4. Jahrg. 1886, H. 1. München 1886. — Inhaltsverzeichniss f. Jahrg. 1871—85. München 1886.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1885, H. 4. Jahrg. 1886, H. 1. 2. München 1886. — Inhaltsverzeichniss f. Jahrg. 1871—85. München 1886.

Siebenundzwanzigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. der Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1886.

Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1885 (nebst Abhandlungen, Bd. 8, Bogen 3). Nürnberg 1886.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Bd. 1, H. 2 (Jahrg. 1885). — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Bd. 1, H. 2 (Jahrg. 1885). — Katalog der im Germanischen Museum befindlichen Gemälde. Nürnberg 1885.

Zeitschrift der historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 1, H. 3. 4. Jahrg. 2, H. 1. 2. Posen 1885. 86.

Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 5. Potsdam 1886.

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. Hsg. v. d. Kgl. Statist. Landesamt. Jahrg. 8 (1885), H. 1—4. Stuttgart 1885. 86.

Jahrbücher des Nassauschen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 38. 39. Wiesbaden 1885. 86.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Jahrg. 1885. Würzburg 1885.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. 19. Würzburg 1886.

Oesterreich-Ungarn.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Društva [Agram]. Godina VIII, Br. 1—4. U Zagrebu 1886.

Glasnik Hrvatskoga naravoslovnoga Družtva. God. 1, Br. 1—3. U Zagrebu 1886.

Magyar tudom. Akadémiai Almanach, 1885-re. Budapest 1885.

A Magyar tudom. Akadémia Emlékbeszédek. Köt. 3, Sz. 1. 2. Budapest 1885.

A Magyar tudom. Akadémia Értesitöje. Évfoly. 19 (1885), Sz. 1. 2. Budapest 1885.

A Magyar tudom. Akadémia Évkönyvei. Köt. 17, D. 1. 2. Budapest 1883. 84.

Vázlatok a Magyar tudom. Akadémia 1831—81. Budapest 1881.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausgeg. Bd. 2. 3. Budapest 1884. 85.

Ungarische Revue. Mit Unterst. d. Ungar. Akad. d. Wiss. herausgeg. 1885, H. 1—7. Budapest d. J.

Értekezések a nyelv-és szép tudomanyok köréböl. Kiadja a Magyar tudom. Akadémia. Köt. 12, Sz. 1—5. Budapest 1884. 85.

Archaeologiai Értesitö. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Uj folyam, Köt. 1—5, 1. 2. Budapest 1881—85.

Mathematikai és természettudományi Értesitö. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 1. 2. 3, 1—5. Budapest 1882—85.

Légtüneti Észleletek. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 1. 2. Budapest 1866. 84.

Nemzetgazdasági és statist. Évkönyv. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Évfolyam 1. 2. Budapest 1883. 84.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 18. 19. Budapest 1883. 84.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 18, Füz. 1—3. 19, 1. Budapest 1883. 84.

Codex diplomaticus Hungaricus Andegavensis. T. 4. Budapest 1884.

Monumenta comitialia regni Transsylvaniae. T. 10. Budapest 1884.

Monumenta Hungariae juridico-historica. Corpus statutorum Hungariae municipalium. T. 1. Budapest 1885.

Nyelvemléktár. Régi magyar codexek. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 11. 12. Budapest 1884.

Epistolae Pauli lingua hungarica donatae. Budapest 1883.

Az keresztyensegnec Fondamentomirol. 1562. Budapest 1884.

Ábel, J., A Bártfai sz.-Egyed temploma Könyvtárának története. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Budapest 1885.

Lipp, V., A Keszthelyi sírmezök. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Budapest 1884.

Marczali, H., Magyarország története II. József korában. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 2. Budapest 1884.

Péch, A., Alsó Magyarország bányamivelésének története. Köt. 1. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Budapest 1884.

Szabó, K., Régi magyar könyvtár. Köt. 1. 2. Budapest 1879. 85.

Szilágyi, S., Bethlen Gábor és a svéd diplomáczia. Budapest 1882.

Szinnyei, J., Hazai és külföldi folyóiratok Magyar tudományos Repertóriuma. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Osztály I: Történelem és segédtudományai. Köt. 2, 1. Budapest 1885.

Vécsey, T., Aemilius Papinianus pályája és müvei. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Budapest 1884.

Personalstand u. Ordnung d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1886, Winter-Sem. 1886/87.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Herausgeg. vom histor. Vereine für Steiermark. Jahrg. 21. Graz 1886.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. Heft 34. Graz 1886.

Abhandlungen der k. böhmischen Gesellschaft d. Wissenschaften. 6. Folge, Bd. 12, v. J. 1883/84. Jubelband. Prag 1885.

Jahresbericht der k. böhmischen Gesellschaft d. Wissenschaften, von 1882. 83. 84. 85. Prag d. J.

Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft d. Wissenschaften. Jahrg. 1882. 83. 84. Prag 1883—85.

Wegner, G., Generalregister zu d. Schriften der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften 1784—1884. Prag 1884.

Die k. böhmische Gesellschaft d. Wissenschaften 1784—1884. Verzeichniss der Mitglieder. Prag 1884.

Kalousek, J., Geschichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissensch., sammt einer krit. Uebersicht ihrer Publikationen aus d. Bereiche d. Philosophie, Geschichte u. Philologie. H. 1. 2. Prag 1884. 85.

Studnička, F. J., Bericht über die mathemat. u. naturwiss. Publikationen der k. böhm. Gesellschaft d. Wissensch. während ihres hundertjährigen Bestandes. H. 1. 2. Prag 1884. 85.

Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag. Vereinsj. 1885/86 (37. Jahrg.). Prag 1886.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1885. Jahrg. 46. Prag 1886. — Astronomische Beobachtungen, enth. Originalzeichnungen des Mondes. Appendix zum 45. Jahrg. Prag 1886.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1886—87.

23. Jahresbericht des Vereins f. Geschichte der Deutschen in Böhmen. Für d. Vereinsjahr 1884—85. Prag 1885.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 24, No. 1—4. Prag 1885. 86.

Bulletino di archeologia e storia dalmata. Anno 8 (1885), No. 12. Anno 9 (1886), No. 1—11. Spalato 1886.

Almanach der kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Jahrg. 35 (1885). 36 (1886). Wien 1885. 86.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 22 (1885), No. 25—27. Jahrg. 23 (1886), No. 1—24.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 66, 1. u. 2. Hälfte. Bd. 67, 1. u. 2. Hälfte. Bd. 68, 1. Hälfte. Wien 1884—86.

Denkschriften der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 48—50. Wien 1884. 85.

Denkschriften der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 35. Wien 1885.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreich. Geschichtsquellen, herausg. von der histor. Commission der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Abth. II. Diplomata et Acta. Bd. 44. Wien 1885.

Monumenta conciliorum generalium seculi XV. Ediderunt Caes. Academiae scientiarum socii delegati. Concilium Basileense. Scriptorum T. III, P. 1. Vindobonae 1886.

Feierliche Sitzung der kaiserl. Akademie d. Wissensch. anlässlich des 25jährigen Jubiläums des Hohen Curatoriums am 10. März 1886. Wien 1886.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 89 (1884). Abth. III, Heft 3—5. Bd. 90 (1884), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 91 (1885), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 92 (1885), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 93 (1886), Abth. I, Heft 1—3. Abth. II, Heft 1. 2. Wien 1884—86. — Register XI, zu Bd. 86—90. Wien 1885.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 107 (1884), Heft 1. 2. Bd. 108 (1884), Heft 1. 2. Bd. 109 (1885), Heft 1. 2. Bd. 110 (1885), Heft 1. 2. Bd. 111 (1885), Heft 1. 2. Wien 1884—86. — Register XI, zu Bd. 101—110. Wien 1886.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1885. Bd. 28 (N. F. Bd. 18). Wien 1885.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1885 (Bd. 35), II. Halbjahr. Jahrg. 1886 (Bd. 36), I. u. II. Quartal. Wien 1886. — Geschäftsordnung der k. k. zool.-botan. Gesellschaft in Wien.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums. Bd. 1, No. 1—4. Wien 1886.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 12, No. 1—3. Wien 1886.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1885 (Bd. 35), No. 4. Jahrg. 1886 (Bd. 36), No. 1—3. Wien 1885. 86.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1885, No. 8—18. Jahrg. 1886, No. 1—12.

Belgien.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. T. 38 (III. Sér. T. 8). 39. 40. Anvers 1882—86. — Bulletin (IV. Sér. des Annales), No. 1—7. Anvers 1885. 86.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 29, P. 2. Bruxelles 1885.

Extrait des Annales de la Société médico-chirurgicale de Liége. T. 24, 1885. Compte-rendu des travaux de la Société pendant l'année 1885, par Schiffers. Liége 1885.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1885, No. 3. 1886, No. 1. 2. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturvid. og mathemat. Afd. 6. Række. Bd. 2, No. 8—11. Bd. 3, No. 2. 4. Bd. 4, No. 1. 2. Kjøbenhavn 1885. 86.

Skrifter fra Reformationstiden. No. 2. Chrysostomus, Oluf, Lamentatio ecclesiae. Kirkens klagemaal. Paa ny udg. af H. F. Rørdam. Kjøbenhavn 1886.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 5, P. 5. Cambridge 1886.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. N. Ser. Vol. 4, P. 7—9. Vol. 5, P. 1. 2. Dublin 1885. 86.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Ser. II. Vol. 3, No. 7—10. Dublin 1885.

Journal of the R. Geological Society of Ireland. Vol. 16 (N. Ser. Vol. 6), P. III. 1882—84. Vol. 17, P. I. 1884/85. London etc. 1886.

Astronomical Observations made at the R. Observatory, Edinburgh. Vol. XV, for 1878 to 1886, containing only the remainder of the Star Catalogue, Discussion, and Ephemeris, for 1830 to 1890. By C. Piazzi Smyth. Edinburgh 1886.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol. 9, P. 1 (Session 1885—86). Edinburgh 1886.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. XI, P. 2 (No. 79). London 1886. — List of the members, 1885. London, July 1885.

Catalogue of the Greek coins in the British Museum. *Wroth, W.*, Catalogue of the Greek coins of Crete and the Aegean islands. Edit. by R. St. Poole. London 1886.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXXIX, No. 240—41. Vol. XLI, No. 242—245. Vol. XLI, No. 246. 47. London 1886.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1885. Vol. 176, P. 1. 2. London 1886. — The R. Society, 30. Nov. 1885 (List of the members).

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 17, No. 253—271. London 1886.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Ser. II. Vol. 5, P. 6a. Vol. 6, P. 1—6. London 1885. 86.

Observations of the International Polar Expeditions [1882—83. Fort Rae. London 1886.

Report on the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger, 1873—76. Zoology, Vol. 14—16. London 1886.

The Electrician. A weekly Journal of theoretic and applied electricity and chemical physics. Vol. 17, No. 3. London 1886.

Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester. III. Ser. Vol. 8. London 1884.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 23 (Sess. 1883/84). 24 (Sess. 1884/85). Manchester 1884. 85.

Frankreich.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. III. Série. T. 2, Cah. 1. Avec Append. 1. 2. Paris 1884. 85.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg). Sér. II. T. 7, Fasc. 18. Année 18 (1885). Paris 1886.

Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, publ. sous l'autorité du Comité international. T. 5. Paris 1886.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1884. 1885. Paris 1885. 86.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 55. Paris 1885.

Catalogue de la Bibliothèque de l'École polytechnique. Paris 1881.

Institut de France. Cinquième centenaire de l'Université de Heidelberg, le 2. août 1886 (Discours prononcé p. M. Jules Zeller). Paris 1886.

Mission scientifique du Cap Horn, 1882—83. T. 2. Météorologie, par J. Lephay. Paris 1885.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 13, No. 6. T. 14, No. 1—4. Paris 1885. 86.

Holland und Luxemburg.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1884.

Register op den Catalogus van de Boekerij der Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam. Amsterdam 1885.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. Deel XVI. Amsterdam 1886. — Afdeel. Natuurkunde. Deel XXIV. Amsterdam 1886.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. III. Reeks, Deel 2. Amsterdam 1885. — Afdeel. Natuurkunde. III. Reeks, Deel 1. Amsterdam 1885.

Venite ad me. Ad Vergilium. De Alarico. Carmina in certamine poet. indicto ab Acad. Reg. disciplinarum Neerlandica praemio et laude ornata. Amstelod. 1885.

Annales de l'École Polytechnique de Delft. T. 1 (1885), Livr. 3. 4. 1886, Livr. 1. 2. Leide 1885. 86.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 20, Livr. 4. 5. T. 21, Livr. 1. Harlem 1886.

Liste alphabétique de la correspondance de Christiaan Huygens, qui sera publiée p. la Société Hollandaise des sciences à Harlem. Harlem 1886.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 2, P. 3. 4. Harlem 1885. 86.

Fondation Teyler. Catalogue de la bibliothèque, dressé p. C. Ekama. Livr. 1—4. Harlem 1885. 86.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1885. Leiden 1885.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1885. Leiden 1885.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging. Ser. II. Deel 4, St. 3. Nijmegen 1885.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetenschappen, ter gelegenheid van de algem. vergaderingen gehouden d. 24. Juni 1884; d. 30. Juni 1885. Utrecht 1884. 85.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1886.

Verslag van het verhandelde in de algem. vergader. van het Provinc. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 30. Juni 1885. Utrecht 1885.

Hubrecht, A. A. W., Proeve eener ontwikkelingsgeschiedenis van Lineus obscurus Barrois. Prijsverhandeling met goud bekroond en uitg. door het Provinc. Utrechtsche Genootschap v. kunsten en wetenschappen. Utrecht 1885.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 9. Utrecht 1886.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N.S. 40—42. Utrecht 1885.

Recueil des mémoires et des travaux publiés par la Société Botanique du Grand-Duché de Luxembourg. No. 11 (1885—86). Luxembourg 1886.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1886, No. 1—23. Firenze 1886.

Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. 1886, No. 1—4. Roma 1886.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia. *Morosi, G.*, L'invito di Eudossia a Genserico. Studio critico. Firenze 1882. *Scaduto, Fr.*, Stato e chiesa negli scritti politici 1122—1347. Studio storico. Firenze 1882. — Accademia Orientale. *Nocentini, L.*, Il primo sinologo P. Matteo Ricci. Firenze 1882.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze mor. e pol. Vol. 16 (Ser. III, Vol. 7), Fasc. 3. Milano 1886. — Classe di scienze matem. e naturali. Vol. 15 (Ser. III, Vol. 6), Fasc. 4. Milano 1885.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 18. Milano 1885.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Ser. II. Vol. 3. Modena 1885.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie, Vol. 7. Pisa 1886.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 5, adunanza del 15. Nov. 1885, 16. Genn., 14. Marzo, 2. Maggio, 4. Luglio 1886.

Annuario della R. Accademia de' Lincei. 1886. Roma 1886.

Atti della R. Accademia de' Lincei. Serie III. Memorie della Classe di scienze fisiche, matemat. e naturali. Vol. 18. 19. Roma 1884. — Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 12. Roma 1884. — Serie IV. Memorie della Classe di scienze fisiche, matemat. e naturali. Vol. 2. Roma 1885. — Rendiconti. Vol. 1, Fasc. 28. Vol. 2, Fasc. 1—14. II. Sem., Fasc. 1—9. Roma 1886.

Bullettino dell' Instituto di corrispondenza archeologica per l'anno 1885, No. 12 (und Elenco de' participanti alla fine dell' anno 1885). Roma 1885.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bullettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 1, H. 1—3. Rom 1886.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXI, Disp. 1—7. Torino 1886.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II, T. 37. Torino 1886.

Bollettino meteorologico ed astronomico dell' Osservatorio della R. Università di Torino. Anno 20 (1885). Parte meteorologica. Torino 1886.

Temi di premio proclamati dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti nella solenne adunanza del 15. Agosto 1886. Venezia 1886.

Russland.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societ. Häftet 43. Helsingfors 1886.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XXVII (1884—85). Helsingfors 1885.

Exploration internationale des régions polaires, 1882/83 et 1883/84. Expédition polaire finlandaise. T. I. Météorologie. Observations faites aux stations de Sodankylä et de Kultala p. S. Lemström et E. Biese. Helsingfors 1886.

Universitetskija Izvěstija. God 25 (1885), No. 10—12. God 26 (1886), No. 1—9. Kiev 1885. 86.

Annales de l'Observatoire de Moscou, publ. p. Th. Bredichin. II. Série. T. 1, Livr. 1. Moscou 1886.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. 60 (Année 1884), No. 4. T. 61 (Année 1885), No. 3. 4. T. 62 (Année 1886), No. 1—3. Moscou 1885. 86.

Nouveaux Mémoires de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. XV (= T. XXI de la collection), Livr. 1—3. Moscou 1884. 85.

Meteorologische Beobachtungen, ausgeführt am Meteorol. Observatorium d. Landwirthschaftlichen Academie zu Moskau von B. E. Bachmetieff. 1885, 2. Hälfte (Beilage z. Bulletin de la Soc. Imp. des Natural. de Moscou, T. 61). Moscou 1886.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXX, No. 3. 4. T. XXXI, No. 1. 2. St.-Pétersbourg 1886.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. 33, No. 1—8. T. 34, No. 1—6. St.-Pétersbourg 1885. 86.

Repertorium für Meteorologie, hsg. v. d. kais. Akademie d. Wissensch., redig. v. H. Wild. Bd. 9. St. Petersburg 1885.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von H. Wild. Jahrg. 1884, Th. 1. 2. St. Petersburg 1885.

Acta Horti Petropolitani. T. 8, Fasc. 2. 3. T. 9, Fasc. 1. Petropoli 1883. 84.

Catalogus systematicus bibliothecae Horti Imper. botanici Petropolitani. Editio nova, cur. Ferd. ab Herder. Petropoli 1886.

Jahresbericht am 25. Mai 1886 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. Aus d. Russ. übersetzt. St. Petersburg 1886.

Trudy S.-Peterburgskago Obščestva estestvoispytatelej. T. 15, 2. 16, 1. 2. St. Peterburg 1884—85.

Juridičeskaja Bibliografija izdav. Jurid. Fakultetom Imp. S. Peterburgskago Universiteta. God 1 (1884), No. 2. 3. God 2 (1885), No. 4—6. S. Peterburg 1884. 85.

Protokoly zasědanij sověta Imperat. S.-Peterburgskago Universiteta. No. 29—32. S. Peterburg 1884. 85.

Zapiski Istoriko-philologičeskago Fakulteta Imp. S.-Peterburgskago Universiteta. Čast 15. St. Petersburg 1885.

Efimov, *V. V.*, Očerki po istorii drevne-rimskago rodstva i naslědovanija. S. Peterburg 1885. — *Eksner*, *S.*, Rukovodstvo k mikroskop. izlědovaniju životnych tkanej. S. Peterburg 1875. — *Merežkovskij*, *K. S.*, Materialy k poznaniju životnych pigmentov. S. Peterburg 1883. — *Nikolskij*, *D.*, O vydačě prestupnikov po načalam meždunarodnago prava. S. Peterburg 1884. — *Timirjazev*, *J.*, Ob usvoenii světa rasteniem. I. Kritika i metod. S. Peterburg 1875. — *Zělinskij*, *Th.*, O dorijskom i ionijskom stiljach v drevnej attičeskoj komedii. S. Peterburg 1885.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 29. Riga 1886.

Schweden und Norwegen.

Bergens Museum. *Nansen*, *Fr.*, Bidrag til Myzostomernes anatomi og histologi. Bergen 1885.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1885 u. 1885, No. 2. 4. 9. 11—23. Christiania 1886.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. XV. Zoologi. *Sars, G. O.*, Crustacea II. XVI. Zoologi. *Friele, H.*, Mollusca II. Christiania 1886.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 21 (1884—85), I—III. Lund. d. J.

Lunds Universitets-Biblioteks Accessions-Katalog. 1885. Lund 1886.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. Årg. 14 (1885). Stockholm 1885—86.

Entomologisk Tidskrift, på föranstaltende af Entomologiska Föreningen i Stockholm utg. af Jac. Spångberg. Årg. 6 (1885), H. 1—4. Stockholm 1885.

Tromsø Museums Aarshefter. 9. Tromsø 1886. — Tromsø Museums Aarsberetning for 1885. Tromsø 1886.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. XIII, Fasc. 1. Upsaliae 1886.

Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal. Vol. 17 (1885). Upsal 1884—85.

Schweiz.

Neue Denkschriften d. allgem. Schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften. Bd 29, Abth. 2. Basel 1885.

Beiträge zur vaterländ. Geschichte. Hrsg. v. d. Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 2 (der ganzen Reihe 12. Bd.), H. 2. 3. Basel 1886. 87.

Mittheilungen der Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft zu Basel. N. F. Bd. 3 (*Burckhardt, A.*, u. *R. Wackernagel*, Das Rathaus zu Basel). Basel 1886.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Th. 8, H. 1. Basel 1886.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1885, H. 2. (No. 1119—32). Bern 1885.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrg. 29 (Vereinsjahr 1884/85). Chur 1886.

Vierteljahrsschrift d. naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 30. 31. Zürich 1885. 86.

Spanien.

Discursos leidos ante la Real Academia de ciencias morales y políticas en la recepcion pública de A. Groizard y Gómez de la Serna 1883. Franc. Gómez Salazar 1885. Franc. Romero y Robledo 1886. Conde de Torreánaz 1886. Servando Ruiz Gómez 1886. Madrid 1885. 86.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Año de 1886. Madrid d. J.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Resúmen de sus actas y discursos leidos en la junta publ. 27. dic. 1885. Madrid 1885.

Reglamento interior de la Real Academia de ciencias morales y políticas. Madrid 1883.

Aller, D. E., Las huelgas de los obreros. Memoria premiada con accessit por la R. Academia de ciencias mor. y pol. Madrid 1886.

Danvila y Collado, M., El poder civil en España. Memoria premiada por la R. Acad. de cienc. mor. y pol. T. 1—5. Madrid 1885. 86. — *Pizarro, G.*, El Ausenteísmo en España. Memoria premiada por la R. Acad. de cienc. mor. y pol. Madrid 1886. — *Rodrigañez, C.*, La vida del campo. Memoria premiada por la R. Acad. de cienc. mor. y pol. Madrid 1886.

Anales del Instituto y Observatorio de marina de San Fernando, publ. p. C. Pujazon. Seccion 2. Observaciones meteorológicas. Año 1885. San Fernando 1885.

Nordamerika.

Proceedings of the 17th annual session of the American Philological Association held in New Haven, Conn.. July 1885. Cambridge 1886.

Proceedings of the American Oriental Society, at New York, Oct. 1885; at Boston, May 1886.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. 5, No. 43. 45—47. 49—51. Vol. 6, No. 52. 53. Baltimore 1885. 86.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. VIII, No. 2—4. Vol. IX, No. 1. Baltimore 1886.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. IV. Ser., 1—12. Baltimore 1886.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences [Boston]. N. S. Vol. 11 (Centennial Volume), P. 3, N. 2. 3. P. 4, No. 4. Cambridge 1886.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. S. Vol. XIII (Whole Ser. Vol. XXI), P. 1. 2. From May 1885 to May 1886. Selected from the Records. Boston 1886.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. Vol. III, No. 11—13. Boston 1885. 86.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XXII, P. 4 (Oct.—Dec. 1883). Vol. XXIII, P. 1 (Jan.—March 1884). 2 (March 1884—Febr. 1886). Boston 1886.

Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. V, No. 1. Buffalo 1886.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. XII, No. 3—6. XIII, No. 1. Cambridge, Mass. 1886.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. X, No. 2. Cambridge, Mass. 1885.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1885/86. Cambridge, Mass. 1886.

Annual Report of the Geological Survey of Pennsylvania for 1885. With Atlas. Harrisburg 1886.

Second Geological Survey of Pennsylvania. Grand Atlas. Division I, 1. II, 1. 2. III, 1. IV, 1. V, 1. — Atlas Eastern middle anthracite field, P. 1. — *Hall, C. E.*, Field notes in Delaware County. — *White, J. C.*, The geology of Huntingdon County. — Second Report of progress in the anthracite coal region. P. 1. Harrisburg 1885.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 3. 4. Madison 1885. 86.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada for the year 1884. Vol. 2. Montreal 1885.

The Canadian Record of science, including the Proceedings of the Natural history Society of Montreal and replacing the Canadian Naturalist. Vol. 2, No. 1—4. Montreal 1886.

Report for the year 1884—85 presented by the board of managers of the Observatory to the President and fellows of Yale College. (New Haven 1885). For the year 1885—86. (New Haven 1886.)

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. III, No. 7—10. New York 1884. 85.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. III (1883—84). Vol. V, No. 2—6. New York 1885. 86.

Bulletin of the American Geographical Society. 1882, No. 6. 1883, No. 7. 1884, No. 5. 1885, No. 2. 3. 1886, No. 1. New York 1886.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1885, P. 3 (Aug.—Dec.). 1886, P. 1 (Jan.—March). 2 (April—Sept.). Philadelphia 1885. 86.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledgé. Vol. XXII, No. 120. Vol. XXIII, No. 121—123. Philadelphia 1885. 86.

List of surviving Members of the American Philosophical Society at Philadelphia for promoting useful knowledge. Presented March 5, 1886.

Memoirs of the Peabody Academy of science. Vol. 2. Salem, Mass. 1886.

18th Annual Report of the Trustees of the Peabody Academy of sciences. Salem 1886.

Bulletin of the California Academy of sciences. No. 4. San Francisco 1886.

Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya, para el año de 1887 (Año VII). México 1886.

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto, being a continuation of the Canadian Journal of science, literature and history. III. Ser. Vol. 3, Fasc. 3. 4. Vol. 4, Fasc. 1. Toronto 1886.

Memoirs of the National Academy of sciences. Vol. 3, P. 1. 1884. Washington 1885.

National Academy of sciences. Proceedings. Vol. 1, P. 2. Washington 1884.

Report of the National Academy of sciences for the year 1883. 1884. Washington 1884. 85.

Third Annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 1881—82. By J. W. Powell. Washington 1884.

Annual Report of the Comptroller of the Currency to the first session of the forty-ninth Congress of the U. S., Dec. 1, 1885. Washington 1885.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1884. Washington 1885.

Astronomical and meteorological Observations made during the year 1881 at the U. S. Naval Observatory (Washington Astronomical and meteorological Observations Vol. 28). Year 1882 (Wash. Astron. and met. Observ. Vol. 29). Washington 1885.

Observations of minor planets with the 9.6 inch Equatorial made at the U. S. Naval Observatory, Washington, by E. Frisby, 1885.

Observations of the first contact of the Partial Solar Eclipse of March 15—16, 1885, made at the U. S. Naval Observatory, Washington.

Programme of work to be pursued at the U. S. Naval Observatory at Washington during the year 1885. 1886.

Report of the Superintendent of the U. S. Naval Observatory for the year ending June 30, 1885. Washington 1885.

Professional Papers of the Signal Service, U. S. War Department. No. 16. 18. Washington 1885.

Annual Report of the Chief Signal-Officer to the Secretary of war for the year 1884. Washington 1884.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work during the fiscal year ending with June 1884. P. 1. 2. Washington 1885.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 7—29. Washington 1884—86.

Monographs of the U S. Geological Survey. Vol. IX. Washington 1885.

Fourth Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior 1882—83, by J. W. Powell. Fifth Annual Report, 1883—84. Washington 1884. 85.

U. S. Geological Survey. Mineral Resources of the United States. Calendar years 1883 and 1884. By Alb. Williams. Washington 1885.

Report of the International Polar Expedition to Point Barrow, Alaska. Washington 1885.

Südamerika.

Annales de la Sociedad cientifica Argentina. T. 21, Entrega 1—6. T. 22, Entr. 1—4. Buenos Aires 1886.

Actas de la Academia nacional de ciencias en Córdoba. T. V, Entrega 2. Buenos Aires 1884.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. T. VIII, Entrega 2—4. Buenos Aires 1885.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. H. 2. 3. Valparaiso 1886.

Asien.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 23 (1885), No. 2—4. Deel 24 (1886), No. 1. Batavia 1885. 86.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 30, Afl. 5. 6. Deel 31, Afl. 1 en 2 (Eerste Helft). Batavia 1885. 86.

Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811, door I. H. van der Chijs. Uitgeg. d. het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 2. 3. Batavia, 's Hage 1886.

Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgeg. d. de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 45 (VIII. Ser., D. 6). Batavia 1886.

Verbeek, R. D. M., Krakatau. P. II. Publ. p. ordre de son Exc. le Gouverneur-Général des Indes Néerlandaises. Batavia 1886. — Album, contenant 25 planches chromolith. Bruxelles (1886). — Cartes, plans. Bruxelles (1886).

Boletin de la R. Sociedad Económica de amigos del país. Revista Filipina de ciencias y artes. Año 4 (1885), No. 4. 5. Manila 1885.

Journal of the China Branch of the R. Asiatic Society, for the year 1884. N. Ser. Vol. 19, P. 2. Shanghai 1886.

Australien.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 16 (1882). Sydney 1883.

---

2. Einzelne Schriften.

Ashburner, C. A., The geology of natural gas in Pennsylvania and New York (S. A.). o. O. 1885.

—— The product and exhaustion of the oil regions of Pennsylvania and New York (S. A.). o. O. 1885.

Blasius, W., Beiträge zur Vogelfauna von Celebes. I. II (S. A.). Budapest 1885. 86.

—— Die Raubvögel von Cochabamba (S. A.). Wien 1884.

—— Osteologische Studien (Messungs-Methoden an Vogel-Skeletten). (S. A.). o. O. 1885.

—— Ueber die neuesten Ergebnisse von H. Grabowsky's Forschungen in Süd-Ost-Borneo (S. A.). Naumburg 1884.

—— Ueber einen vermuthlich neuen Vogel von Bolivia (S. A.). o. O. 1884.

—— Ueber einige Vögel von Cochabamba in Bolivien (S. A.). o. O. 1885.

—— Ueber Vogel-Brustbeine (S. A.). o. O. 1884.

Borch, Leopold Frhr. v., Zur Absetzung des Königs der Deutschen. Innsbruck 1886.

Castillo, A. del, y M. Bárcena, El hombre del Peñon. Noticia sobre el hallazgo de un hombre prehistórico en el valle de México. México 1885.

Dante Alighieri, La Commedia. Col commento inedito di Stefano Talice da Ricaldone. Pubbl. p. c. di *V. Promis* e di *C. Negroni*. Torino 1886.

Darboux, G., Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe (Extrait du Journal de mathém. pures et appliquées). Paris 1885.

Hermite, Ch., Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Fasc. 1. Paris 1885.

—— Sur une application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce (Extr. des Annales de l'École normale supérieure). Paris 1885.

Huergo, L. A., Exámen de la propuesta y proyecto del puerto del Sr. D. Ed. Madero. P. 1. 2. Buenos Aires 1886.

Die neu entdeckte Schrift »Lehre der zwölf Apostel an die Völker«. Deutsch herausg. u. in Kürze erklärt v. *G. Volkmar*. 2. Aufl. Zürich 1885.

Löffelholz von Colberg, C. Frhr., Die Drehung der Erdkruste. Eine neue geologisch-astronomische Hypothese. München 1886.

Lukašević, Plat., Izloženie glavnych zakonov estestvennoj i nabljudatelno-mikroskopičeskoj astronomii a takže astronomičeskoj meteorologii. T. 1. 2. Kiev 1884. 85.

Malortie, Ernst v., Nachtrag zu den Historischen Nachrichten der Familie von Malortie. 1872—1886. Hannover 1886.

Morse, E. S., Ancient and modern methods of arrow-release (S. A.). o. O. 1885.

Mühry, A., Ueber den kosmischen Dualismus (S. A.). Cassel 1886.

Die Process-Ordnung für Böhmen v. 23. Jan. 1753. Herausg. von *M. Frdr. v. Maasburg.* Wien 1886.

Polycarpi Smyrnaei Epistula genuina. Rec. *G. Volkmar.* Zürich 1885.

Prusík, Fr., České glossy latinského rukopisu Roudnického z XV. století. v Praze (1886).

Weihrauch, K., Ueber die Berechnung meteorologischer Jahresmittel (S. A.). Dorpat 1886.

—— Ueber Pendelbewegung bei ablenkenden Kräften, nebst Anwendung auf das Foucault'sche Pendel (S. A.). München 1886.

—— Ueber die dynamischen Centra des Rotations-Ellipsoids, mit Anwendung auf die Erde (S. A.). Moskau 1886.

Willems, P., Les élections municipales à Pompéi. Bruxelles 1886.

Winkler, Clem., Mittheilungen über das Germanium (S. A.). Leipzig 1886.

Bind 2 in one

HARVARD COLLEGE
NOV 18 1886
LIBRARY.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1886.

I. II.

MIT 5 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1886.

SITZUNG AM 11. JANUAR 1886.

C. Neumann, *Ausdehnung der Keppler'schen Gesetze auf den Fall, dass die Bewegung auf einer Kugelfläche stattfindet.*[1])

Findet zwischen zwei materiellen Puncten M und m, von denen der erste *fest*, der zweite *beweglich* ist, eine gegenseitige Einwirkung statt, deren Kräftefunction U den Werth hat:

$$(\alpha.) \qquad U = k\frac{Mm}{r},$$

wo r die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte, und k eine beliebig gegebene Constante vorstellt, so ergeben sich bekanntlich die *Keppler'schen Gesetze.* Der Punkt m wird also, falls seine Anfangsgeschwindigkeit beliebig gegeben ist, einen *Kegelschnitt* beschreiben, dessen einer Brennpunkt in M liegt. Und ist insbesondere der Kegelschnitt eine *Ellipse,* und a die grosse Axe dieser Ellipse, so wird für die *Umlaufszeit* T des Punktes m die Formel gelten:

$$(\beta.) \qquad T^2 = \frac{4\pi^2}{kM}\left(\frac{a}{2}\right)^3.$$

Zu analogen Gesetzen gelangt man auch dann, wenn die beiden Punkte auf einer gegebenen *festen Kugelfläche* sich befinden, falls man nur der Kräftefunction U den Werth beilegt:

$$(\mathrm{A.}) \qquad U = k\frac{Mm}{R\operatorname{tg}\vartheta},$$

wo ϑ den Winkelabstand der beiden Punkte vorstellen soll, während R den Radius der Kugel, und k eine beliebig gegebene Constante bezeichnet. Dabei ist alsdann M auf der Kugelfläche in *fester* Lage, m hingegen auf derselben *frei beweglich* zu denken.

1) Vorgetragen in der Sitzung vom 7. December 1885. Zum Druck überreicht am 11. Januar 1886.

Ohne mich auf die Untersuchung selber hier näher einzulassen, will ich nur die sich ergebenden Resultate in Kürze angeben. Dieselben sind ausdrückbar durch folgende Sätze:

Erster Satz. — *Hat der Punkt m auf der Kugelfläche einen beliebigen Anfangsort und eine beliebige Anfangsgeschwindigkeit erhalten, so wird er, unter der Einwirkung des festen Punktes M, eine sphärische Ellipse beschreiben, deren einer Brennpunkt in M liegt.*

Dabei ist, was diese *sphärische Ellipse*, d. i. die *Bahn des Punktes m* betrifft, auf Grund meiner Untersuchung noch Folgendes hinzuzufügen:

Betrachtet man (der bequemern Ausdrucksweise willen) *M* als den *Nordpol* der gegebenen Kugelfläche, und nimmt man an, die gegenseitige Einwirkung zwischen *M* und *m* sei eine *attractive*, mithin *k positiv*, so wird die Bahn des Mobils *m*, entweder ganz oder wenigstens theilweise, in der *nördlichen Hemisphäre* liegen. Und ist andererseits jene Einwirkung *repulsiv*, mithin *k negativ*, so wird die Bahn des Mobils, ganz oder wenigstens theilweise, in der *südlichen Hemisphäre* sich befinden.

Zweiter Satz. — *Die Zeit T, welche das Mobil m braucht, um seine elliptische Bahn einmal zu durchlaufen, hängt lediglich ab von der grossen Axe dieser Bahn. Es gilt nämlich für jene Zeit T die Formel:*

$$\text{(B.)} \qquad T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{kM} \sin^3\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

wo α die grosse Axe der in Rede stehenden sphärischen Ellipse, oder (genauer ausgedrückt) *den Winkelabstand des Perihels vom Aphel vorstellt.*

Sind insbesondere ϑ und α unendlich klein, so geht offenbar die Formel (A.) in (α.) über, und ebenso (B.) in (β.); wie solches *a priori* zu erwarten stand.

E. Study, *Ueber die Raumcurven vierter Ordnung, zweiter Art.* (Vorgelegt von *F. Klein.*)

Das Folgende enthält eine Reihe von Sätzen über die Raumcurven vierter Ordnung. Die meisten derselben hat der Verfasser, neben anderen, bereits in seiner Bearbeitung einer Preisaufgabe angegeben, welche von der allgemeinen Abtheilung des Münchener Polytechnikums gestellt war, und in der verlangt wurde, die bekannten Eigenschaften der rationalen Raumcurven vierter Ordnung mit der Theorie der binären Formen vierter Ordnung in einen engeren Zusammenhang zu bringen, als bis dahin geschehen war[1]).

Es zeigte sich bei dieser Gelegenheit, dass ein tieferes Eindringen in die Theorie jener Curven eine Reihe von Vorarbeiten nöthig macht, zu welchen bisher kaum Anfänge vorhanden sind, wiewohl sie sich meistens auf die noch am Besten bekannten rationalen Curven dritter Ordnung erstrecken müssten. In der Hoffnung, diese Vorarbeiten in nicht all zu langer Zeit erledigen und dann die Theorie der rationalen Raumcurven vierter Ordnung wenigstens etwas über die ersten Anfänge hinausführen zu können, zögerte ich bisher mit der Veröffentlichung der damals gewonnenen Resultate. Da aber jene Vorarbeiten einen grösseren Umfang angenommen haben, als ich damals vermuthete, und ich inzwischen auch durch andere Untersuchungen von diesem Gegenstande abgezogen worden bin, so möchte ich doch vorläufig wenigstens einige meiner Ergebnisse an dieser Stelle zur Mittheilung bringen, welche, bei aller ihrer Unvollständigkeit, doch die bekannte Theorie jener Curven[2]) in einigen wesentlichen Stücken zu ergänzen scheinen.

---

1) Vgl. den Jahresbericht des Münchener Polytechnikums für das Studienjahr 1883—1884, S. 15.

2) S. bes. die Arbeiten der Herren Em. Weyr und Adler in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie. Herrn Prof. Weyr bin ich zu besonderem Danke verpflichtet dafür, dass er mir die einschlägige Litteratur in freundlichster Weise zur Verfügung stellte.

Vorausgestellt sind in Nr. 1) und 2) einige auf die Theorie der rationalen Curven im Allgemeinen bezügliche Bemerkungen. Mit dem Folgenden zusammengehalten, lassen dieselben erkennen, dass die hier aufgestellten Sätze besondere Fälle von allgemeinen Eigenschaften aller rationalen Curven sind, Eigenschaften, die geeignet sein dürften, die Grundlage für eine allgemeine Theorie der rationalen Curven abzugeben.

1) Die Theorie der rationalen Curven n^{ter} Ordnung und die Theorie der linearen Systeme von binären Formen n^{ter} Ordnung fallen bekanntlich, aus einem gewissen Gesichtspunkte betrachtet, zusammen. Beide finden, im Allgemeinen, ihren naturgemässen Ausdruck in der Theorie von Formen, welche zwei Arten von Veränderlichen enthalten, nämlich binäre Veränderliche in der n^{ten} Ordnung, und Veränderliche eines Gebietes $n+1^{\text{ter}}$ oder niederer Stufe, welche linear auftreten. Es sind dies also Formen vom Typus:

$$(1) \qquad U_A \, \alpha_t^n \, ,$$

wo t ein Punkt des binären Gebietes[1]), U ein R_{m-2} eines Gebietes m^{ter} Stufe ist $(m < n+2)$, und »erst Symbole A mit Symbolen α multiplicirt eine reelle Bedeutung erlangen«.

Nach einer von Herrn E. Stroh gemachten Bemerkung[2]) besitzen Formen dieser Art ein endliches System von rationalen Invarianten und Covarianten, durch welche sich alle übrigen rational und ganz ausdrücken lassen. Jede covariante Bildung der Form (1) kann nämlich offenbar schon durch binäre Operationen abgeleitet werden aus den Formen:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad U_A \, \alpha_t^n \\ (ABXYZ \ldots \quad) \, \alpha_{t_1}^n \beta_{t_2}^n \\ (ABCXY \ldots \quad) \, \alpha_{t_1}^n \beta_{t_2}^n \gamma_{t_3}^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (ABCDE \ldots M) \, \alpha_{t_1}^n \beta_{t_2}^n \gamma_{t_3}^n \ldots \mu_{t_m}^n \, . \end{array} \right.$$

Die Form (1) hat also ein endliches Formensystem, weil die Covarianten (2), als binäre Formen betrachtet, ein solches besitzen.

---

1) Wegen der Bezeichnung vgl. den dritten Abschnitt der Einleitung zu meiner Habilitationsschrift, Math. Annalen Bd. 27.

2) Vergl. dessen Beweis der Gordan'schen Combinanten-Satzes Math. Annalen Bd. XXII, S. 393 u. ff.

2) Um das volle System der Form (1) zu bilden, hätte man demnach von den Formen (2) die Elementarcovarianten aufzustellen, und deren Systeme zu combiniren. Dieses Verfahren erweist sich aber schon in den einfachsten Fällen (sobald $n > 2$) als viel zu complicirt. Es gelingt jedoch auf indirectem Wege, die Aufgabe für kleine Werthe von n noch so zu vereinfachen, dass ihre vollständige Lösung keine principiellen Schwierigkeiten mehr darbietet.

So lässt sie sich im Falle $n = 3$, $m = 3$ zurückführen auf die Combination des Systems zweier binärer quadratischer Formen mit einer cubischen Form; für $n = 4$ tritt an Stelle der cubischen Form eine Form 6ter Ordnung, für $n = 5$ eine Form 5ter und eine Form 3ter Ordnung. Der uns hier interessirende Fall $n = 4$, $m = 4$ führt analog auf die Combination des Systems zweier binärer quadratischer Formen mit dem einer biquadratischen Form.

3) Setzt man die quaternär-lineare, binär-biquadratische Form

(3) $$U_A\, \alpha_t^4$$

gleich Null, so erhält man einerseits die Parameterdarstellung einer Raumcurve vierter Ordnung, andrerseits die Parameterdarstellung eines dreifach ausgedehnten linearen Systems von binären Formen vierter Ordnung. Diese sind bekanntlich alle zu einer einzigen biquadratischen Form f conjugirt, deren Nullpunkte die *Wendepunkte* (oder, wie man sie gewöhnlich nennt: »Hyperosculationspunkte«) der Curve vorstellen.

Schon eine oberflächliche Betrachtung der einfachsten Covarianten der Form (3) führt ohne Schwierigkeit zu den meisten bekannten Eigenschaften der Curve, und ausserdem zu vielen neuen. Hier beschränke ich mich darauf, einige, wie es scheint, noch nicht bemerkte Sätze anzuführen, welche von einer wesentlich anderen Art sind, als die bisher aufgestellten. Sie ergeben sich ohne viel Rechnung, meistens aus dem blossen Anblick des Polarsystems der Form (3).

Eine rationale Curve nenne ich im Folgenden dann »*zu einer hindurchgehenden rationalen Regelfläche perspectivisch*«, wenn sie zu ihr projectivisch ist, und wenn ausserdem jeder Punkt in der ihm entsprechenden Geraden liegt; und in ähnlichem Sinne werde ich den Ausdruck gebrauchen, dass eine

rationale Curve perspectivisch liegt zu der Schaar der Schmiegungsebenen einer anderen.

4) Betrachtet man in der Gleichung

$$(4) \qquad U_A\, \alpha_t^3\, \alpha_x = 0 \,,$$

deren linke Seite eine Polare der Form (3) ist, t als gegeben, x als veränderlich, so durchläuft der durch dieselbe dargestellte Raumpunkt offenbar die Tangente des Punktes t unserer Raumcurve. Betrachtet man daher umgekehrt x als fest, t als veränderlich, so erhält man als Ort jenes Raumpunktes eine rationale Curve, welche zu der Tangentenfläche der C^4 perspectivisch liegt.

Jedem Punkte x der C^4 wird so eine bestimmte Curve (x) zugeordnet, die im Allgemeinen eine eigentliche Raumcurve dritter Ordnung ist, und die C^4 im Punkte x berührt. Man erhält dieselbe, wenn man das Ebenenbüschel durch die Tangente ξ des Punktes x derart projectiv auf die Tangentenschaar der Curve C^4 bezieht, dass der Schmiegungsebene des Punktes x die Tangente ξ desselben Punktes zugeordnet wird, und ausserdem jenen beiden Ebenen durch ξ, welche die Curve noch ein zweites Mal berühren, die zu den Berührungspunkten gehörigen Tangenten. Das Ebenenbüschel ξ erzeugt dann mit der Tangentenschaar der C^4 i. A. eine Raumcurve dritter Ordnung (x), welche mit der C^4 den Punkt x, sowie die zugehörige Tangente und Schmiegungsebene gemein hat. Nur, wenn x in einen der Wendepunkte der C^4 hineinfällt, erhält man eine ebene Curve, welche in der betreffenden »Wende-Ebene« liegt.

Alle zu den Punkten x der C^4 gehörigen Raumcurven dritter Ordnung haben mit vier bestimmten Ebenen je eine dreipunktige Berührung, nämlich mit den Wende-Ebenen der C^4, und zwar auf den zugehörigen Wendepunkts-Tangenten.

Da eine Raumcurve dritter Ordnung durch fünf ihrer Schmiegungs-Ebenen und die Tangente in einer derselben bereits völlig bestimmt ist, so folgt umgekehrt:

Construirt man eine Raumcurve dritter Ordnung, welche die vier Wende-Ebenen und die Schmiegungsebene eines beliebigen Punktes x der C^4 zu Schmiegungsebenen hat, und ausserdem die Tangente von x berührt, so berührt sie dieselbe im Punkte x selbst; sie verläuft ganz auf der Tangentenfläche der C und liegt zu ihr perspectivisch.

5) Die Tangentenfläche der Curve ist von der sechsten Ordnung und hat daher mit jedem linearen Complex sechs Gerade gemein. Die Parameter der Berührungspunkte solcher sechs Tangenten, die in einem linearen Complex liegen, bilden nun die Nullpunkte derjenigen Formen sechster Ordnung, welche zu der Covariante sechster Ordnung T der Wendepunkts-Form f conjugirt sind; insbesondere sind die Nullpunkte von T diejenigen sechs Punkte der Curve, für welche sechs consecutive Tangenten in einem linearen Complex liegen.

Bezeichnen wir die beiden Invarianten der Wendepunktsform f, wie gebräuchlich, mit i und j, die Hesse'sche Covariante mit H, so folgt daraus, dass alle Formen des Büschels $jf + \lambda iH$ zu T apolar sind, unmittelbar, dass die Tangenten in den Nullpunkten der Formen dieses Büschels auf je einer Fläche zweiten Grades liegen. Insbesondere gilt dies auch für die vier Wendepunkts-Tangenten. Diese können also mit irgend zwei weiteren Tangenten der Curve durch einen linearen Complex verbunden werden. Wählt man zwei consecutive Tangenten, mit dem Berührungspunkt x, so erhält man auf diese Art denselben Complex, in welchem die zu x gehörige Raumcurve dritter Ordnung (x) liegt; oder umgekehrt:

Der lineare Complex, in welchem eine beliebige C^3 (x) der von uns betrachteten Schaar enthalten ist, trifft die Tangentenfläche der C^4 in zwei consecutiven Tangenten, deren Berührungspunkt x ist, und ausserdem in vier festen, von x unabhängigen Tangenten der Curve, den Tangenten der Wendepunkte.

6) Als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Curve in einem linearen Complex liegt und also von der vierten Classe ist, ergiebt sich das identische Verschwinden von T. In diesem Falle rücken die Wendepunkte zu je zweien in einen »*Streckungspunkt*« der Curve zusammen, das heisst in einen Punkt, der mit zwei benachbarten in einer Geraden liegt. Im allgemeinen Falle, wo T nicht identisch Null ist, liegt die Curve in einem *Reye'schen Complex*, dessen Fundamentaltetraeder von den vier Wende-Ebenen gebildet wird. Demselben Complex gehören als Complexcurven auch alle Curven dritter Ordnung an, welche auf der Tangentenfläche der C^4 verlaufen; seine absolute Invariante ist identisch mit der absoluten Invariante der Wendepunktsform f unserer C^4.

7) Je zwei unserer Curven dritter Ordnung, (x) und (y), sind vermittelst der C^4 auch auf einander projectiv bezogen. Entsprechende Tangenten derselben liegen in der nämlichen Schmiegungsebene der C^4 und schneiden sich also. Der Ort ihrer Schnittpunkte ist ein Kegelschnitt (x, y), welcher zu der Schaar der Schmiegungsebenen der C^4 perspectivisch liegt, und gleichfalls eine Curve des Reye'schen Complexes ist.

8) Man construire die zu drei Punkten x, y, z der C^4 gehörigen Curven dritter Ordnung (x), (y), (z), und bringe darauf die Tangente eines jeden der drei Punkte zum Durchschnitt mit den Curven, welche zu den anderen beiden Punkten gehören. Legt man dann in jedem der erhaltenen sechs Punkte die Schmiegungsebene an die betreffende Curve dritter Ordnung, so erhält man blos drei verschiedene Ebenen, welche noch dazu durch eine und dieselbe Gerade gehen. Es ist dies eine gemeinsame Schmiegungsgerade für alle drei Curven und daher ein Strahl des Reye'schen Complexes. Es kann auch umgekehrt jeder Complexstrahl so erzeugt werden, und zwar i. A. nur auf eine Art.

9) Die Schmiegungsebenen, welche irgend vier unserer Curven dritter Ordnung, (x), (y), (z), (t), paarweise gemein haben, bilden die Flächen eines vollständigen Vierkants. Jeder Punkt S des Raumes ist der Scheitel unendlich vieler solcher Vierkante; und zwar bilden die Punktquadrupel x, y, z, t auf der Curve, die zu demselben Punkte S führen, die Nullpunkte eines Büschels von Formen vierter Ordnung. Jeder solche Büschel enthält die Wendepunktsform f, als deren zugeordneter Punkt jeder beliebige Punkt des Raumes angesehen werden kann.

Umgekehrt ist jedem die Wendepunktsform enthaltenden Büschel von binären Formen vierter Ordnung auf diese Art ein Raumpunkt zugeordnet. Dem Büschel $jf + \lambda i H$ entspricht derjenige Punkt P, von welchem aus die Curve durch einen Kegel projicirt wird, dessen Wendestrahlen mit seinen Doppelstrahlen zusammenfallen und die Curve in den Nullpunkten von T treffen. Den Nullpunktquadrupeln eines f nicht enthaltenden Büschels von binären Formen vierter Ordnung entsprechen die Punkte einer Geraden u. s. w., u. s. w.

10) Unter allen binären Formen vierter Ordnung, welche zu demselben Punkte S des Raumes führen, befindet sich, so-

bald $i \neq 0$, eine von f verschiedene Form, deren Nullpunkte in einer Ebene σ liegen.

Die Zuordnung zwischen S und σ ist die eines quadratischen Polarsystems, dessen Ordnungsfläche von allen *den* Ebenen umhüllt wird, welche die Curve in vier äquianharmonischen Punkten treffen.

11) Die Ebenen aller Kegelschnitte (xy), oder, was dasselbe ist, die Schmiegungsebenen aller unserer Raumcurven dritter Ordnung (x) umhüllen eine Steiner'sche Fläche, von welcher die C^4 eine Haupttangentencurve ist. Construirt man in der Schmiegungsebene eines beliebigen Punktes x der C^4 die beiden Kegelschnitte, welche durch x gehen und die vier Wende-Ebenen berühren, so berührt der *eine* derselben, der Kegelschnitt (x, x), die C^4 in x, und *beide* liegen auf der Steiner'schen Fläche. Die Ebenen, welche die Steiner'sche Fläche längs der Punkte eines Kegelschnittes berühren, sind die Wende-Ebenen der C^4; die Doppelgeraden der Fläche sind dieselben, welche die Nullpunkte der quadratischen Factoren von T verbinden; es giebt nur diese *eine* Steiner'sche Fläche, auf welcher die C^4 Haupttangentencurve ist; u. s. w., u. s. w.

Diese Andeutungen werden genügend erkennen lassen, wie fruchtbringend es sein wird, diejenigen Formen mit zwei Arten von Veränderlichen, welche die Parameterdarstellung der rationalen Curven zum Ausdruck bringen, im Sinne der Invariantentheorie zu untersuchen[1]).

Ein Aehnliches gilt natürlich hinsichtlich der rationalen Flächen. Es sei noch bemerkt, dass die meisten der vorstehend angegebenen Sätze sich ohne Weiteres auf alle rationalen Curven n^{ter} Ordnung im Gebiete n^{ter} Stufe ausdehnen lassen, wobei jedoch die Fälle, wo n gerade und wo n ungerade ist, ein abweichendes Verhalten zeigen.

---

1) Beiläufig mag hier bemerkt werden, dass die Theorie der Raumcurve dritter Ordnung ihre vollkommenste analytische Darstellung in der Theorie einer Form findet, welche *drei* Arten von Veränderlichen — binäre, ternäre und quaternäre — linear enthält.

A. Hurwitz, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*. (Vorgelegt von *F. Klein*.)

Bekanntlich ist das Chasles'sche Correspondenzprincip, welches nur für das Entsprechen von Punkten auf einer Curve vom Geschlechte Null Gültigkeit besitzt, von Herrn Cayley auf Curven von beliebigem Geschlechte erweitert worden, eine Erweiterung, welche zuerst von Herrn Brill bewiesen wurde[1]). Dieses verallgemeinerte Correspondenzprincip lautet folgendermassen:

»Zwischen den Coordinaten $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ zweier Punkte x und y einer algebraischen Curve C vom Geschlechte p sei eine algebraische Gleichung

$$\Psi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0$$

gegeben. Vermöge dieser Gleichung werden jedem Punkte x der Curve eine bestimmte Anzahl α mit x beweglicher und im Allgemeinen von x verschiedener Punkte y, und umgekehrt jedem Punkte y der Curve eine bestimmte Anzahl β mit y beweglicher und im Allgemeinen von y verschiedener Punkte x entsprechen. Dann kommt es immer

$$C = \alpha + \beta + 2p\gamma$$

Mal vor, dass zwei entsprechende Punkte x, y zusammenfallen. Dabei bedeutet γ eine positive Zahl, welche angiebt, wie viele von den Schnittpunkten der Curve $\Psi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0$ oder auch der Curve $\Psi(y_1, y_2, y_3 \mid x_1, x_2, x_3) = 0$ mit der Curve C in den Punkt y hineinfallen, wenn unter y_1, y_2, y_3 die Coor-

---

1) Cayley, Comptes rendus, Bd. 62 pag. 586 und Transactions of the R. Soc. London Bd. 158, pag. 145. Brill, Math. Annalen Bd. 6 pag. 33 und Bd. 7 pag. 607. Man vgl. auch die »Vorlesungen über Geometrie« von Clebsch, herausgegeben von Lindemann (Bd. I pag. 441 ff. und Bd. II pag. 720 ff.)

dinaten irgend eines beliebigen Punktes y der Curve C verstanden werden.«

Die Zahl γ heisst (nach Herrn Brill) die »Werthigkeit« des Punktes $x = y$.

Es ist eine wesentliche Voraussetzung dieses Satzes, dass die algebraische Correspondenz auf der Curve C in bestimmter Weise, nämlich durch eine Gleichung $\Psi = 0$, definirt werden könne. Nun zeigen aber Beispiele, dass Correspondenzen existiren, für welche diese Voraussetzung nicht zutrifft. Ich habe mir deshalb die Aufgabe gestellt, alle überhaupt möglichen algebraischen Correspondenzen zu bestimmen und die Zahl ihrer Coincidenzen festzustellen.

Bei der Behandlung dieser Aufgabe erschien es rathsam, an Stelle der algebraischen Curve eine beliebige Riemann'sche Fläche als Träger der Correspondenz anzunehmen. Die für die Riemann'sche Fläche gewonnenen Resultate lassen sich dann nicht nur auf ebene algebraische Curven, sondern überhaupt auf alle einstufigen geometrischen Gebilde, welche durch eine beliebige Anzahl algebraischer Gleichungen definirbar sind, ohne Weiteres übertragen. Jedes solche Gebilde kann ja als eine besondere Erscheinungsform einer Riemann'schen Fläche aufgefasst werden.

§ 1.

Relationen zwischen den Integralen erster Gattung und deren Periodicitätsmoduln.

Um eine möglichst geringe Zahl von Voraussetzungen zu machen, möge die Aufgabe, um welche es sich handelt, folgendermassen formulirt werden:

»Zwischen zwei Stellen x und y einer Riemann'schen Fläche vom Geschlechte p findet eine analytische Abhängigkeit statt der Art, dass jeder Stelle x der Fläche eine gewisse Zahl α mit x beweglicher und im Allgemeinen von x verschiedener Lagen $y', y'', \ldots y^{\alpha}$ der Stelle y correspondiren. Es soll diese Correspondenz zwischen den Stellen x und y analytisch definirt und die Zahl ihrer Coincidenzen bestimmt werden.«

Es ergiebt sich zunächst, dass nothwendig jeder Lage der Stelle y nur eine endliche Anzahl β von Lagen $x', x'', \ldots x^{\beta}$ der Stelle x correspondiren können. Der Beweis, welcher auf

bekannten Principien beruht, möge nur kurz angedeutet werden. Angenommen, es könnten einer Stelle y unendlich viele Stellen x', x'', ... entsprechen, so würde mindestens eine Stelle a auf der Riemann'schen Fläche vorhanden sein, in deren noch so klein angenommenen Umgebung unendlich viele der Stelle y correspondirende Stellen liegen. Diese Stelle a würde eine wesentlich singuläre im Gebiete der variabeln Stelle x sein und eine solche kann nicht existiren.

Indem ich mich der Behandlung des aufgestellten Problems zuwende, bemerke ich zuvörderst, dass ich den Fall $p = 0$, welcher sich in bekannter Weise einfach erledigt, ausschliesse. Ferner sollen die Indices

$$i, \; k, \; l, \; m, \; n$$

Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots p$ bedeuten und falls sie als Summationsbuchstaben auftreten, all' ihre Werthe durchlaufen, sodass z. B. das Zeichen $\sum_i$ als Abkürzung für $\sum_{i=1}^{i=p}$ gebraucht wird.

Es seien nun

$$u_1(x), \quad u_2(x), \; \ldots . \; u_p(x)$$

die Werthe von p unabhängigen überall endlichen Integralen der Fläche an der Stelle x. Betrachten wir die Summe

$$u_k(y') + u_k(y'') + \cdots + u_k(y^\alpha)$$

als Function der Stelle x, so wird dieselbe erstens überall endlich sein und zweitens, wenn x einen geschlossenen Weg beschreibt, sich um eine Periode von u_k vermehren, da sich die Stellen y', y'', .. y^α nur untereinander vertauscht haben können, wenn x auf seinen Ausgangspunkt zurückgekehrt ist [1]. Die obige Summe ist daher ein überall endliches Integral der Fläche und es bestehen also die p Gleichungen:

$$1) \quad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k \quad (k = 1, 2, \ldots p),$$

---

1) Es ist möglich, dass von den Stellen y', y'', ... y^α einige abgesondert werden können, die bei allen geschlossenen Wegen, welche x beschreibt, sich nur unter sich vertauschen. Dann ist die betrachtete Correspondenz reductibel. Ob dieses eintritt oder nicht, lassen wir dahingestellt.

wo die Coëfficienten π von der Stelle x unabhängige Grössen vorstellen[1]).

Die Constanten π_k sind offenbar von der Wahl der in den Integralen $u(x)$ enthaltenen additiven Constanten abhängig.

Die Integrale $u(x)$ sollen nun, was stets möglich ist, so gewählt werden, dass sie die folgenden primitiven Periodicitätsmoduln besitzen:

$$\begin{array}{l} u_1 \ldots 1, 0, \ldots 0, a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1p}, \\ u_2 \ldots 0, 1, \ldots 0, a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2p}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_p \ldots 0, 0, \ldots 1, a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{pp}. \end{array}$$

Dann lassen sich die Coëfficienten π_{ki} auf folgendem Wege bestimmen: Die Stelle x beschreibe einen geschlossenen Weg, auf welchem $u_l(x)$ in $u_l(x) + 1$ übergeht, während die übrigen Integrale sich ungeändert reproduciren: so werden sich die rechten Seiten der Gleichungen (1) um die Coëfficienten π_{kl} vermehren, während die linken Seiten um ein System simultaner Perioden der Integrale wachsen. Es ist also

$$(2)\qquad \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\, a_{ki} \quad (k, l = 1, 2, \ldots p),$$

wo die Buchstaben h und g ganze Zahlen bezeichnen.

Beschreibt ferner x einen Weg, auf welchem $u_i(x)$ in $u_i(x) + a_{il}$ übergeht, so ergiebt sich in analoger Weise

$$(3)\qquad \sum_i \pi_{ki}\, a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\, a_{ki} \quad (k, l = 1, 2, \ldots p),$$

wobei die Zeichen H, G wiederum ganze Zahlen bedeuten.

Substituiren wir die Werthe der Grössen π aus (2) in (3), so erhalten wir zwischen den Grössen a_{ik} die folgenden p^2 Relationen:

$$(4)\qquad \sum_i h_{ki}\, a_{il} + \sum_{i,m} g_{mi}\, a_{km}\, a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\, a_{ki}$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots p).$$

1) Aehnliche Gleichungen bestehen auch, wenn man eine Correspondenz zwischen zwei Stellen *zweier* Riemann'schen Flächen betrachtet. Diese Gleichungen können als eine Verallgemeinerung des Abel'schen Theorems angesehen werden, in welches sie übergehen, wenn eine der beiden Flächen das Geschlecht Null besitzt.

§ 2.

Eintheilung der Correspondenzen in singuläre und Werthigkeits-Correspondenzen.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden; entweder stellen nämlich die Relationen (4) eine wirkliche Abhängigkeit der Grössen a_{ik} von einander vor, oder dieses ist nicht der Fall, sodass die Relationen (4) für alle Werthe der $\frac{p(p+1)}{2}$ Grössen a_{ik} erfüllt sind. Setzen wir das Letztere voraus, so ergiebt sich, dass

$$h_{11} = h_{22} = \cdot\cdot\, h_{pp} = G_{11} = G_{22} = \cdot\cdot = G_{pp}\,,$$

und dass alle übrigen Zahlen g, h, G, H verschwinden müssen. Wenn wir den gemeinsamen Werth der Zahlen h_{ii}, G_{ii} mit $-\gamma$ bezeichnen, so nehmen jetzt die Gleichungen (1) folgende Gestalt an:

$$(5)\qquad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) + \gamma\,.\,u_k(x) = \pi_k \quad (k = 1, 2, \ldots p)\,.$$

Wir nennen dann die Correspondenz eine »Werthigkeits-Correspondenz«, die positive oder negative ganze Zahl γ die zu der Correspondenz gehörige »Werthigkeit«.

Dagegen soll in dem ersten oben erwähnten Falle, wenn also die p^2 Relationen (4) sich nicht alle auf Identitäten reduciren, die Correspondenz eine »singuläre« genannt werden. Solche singuläre Correspondenzen können offenbar nur auf besonderen Riemann'schen Flächen existiren, nämlich nur auf solchen, bei denen es möglich ist, die p^2 Relationen (4) durch ganzzahlige Werthe der Grössen h, g, H, G zu befriedigen, ohne dass $h_{11} = h_{22} = \cdot\cdot = G_{11} = G_{22} = \cdot\cdot$ ist und zugleich die übrigen Grössen h, g, H, G verschwinden.

Diese besonderen Riemann'schen Flächen sollen »singulär« genannt werden. Wir haben also folgenden Satz:

»*Jede auf einer nicht singulären Riemann'schen Fläche mögliche Correspondenz ist eine Werthigkeits-Correspondenz*«.

Dieser Satz wird später durch den anderen ergänzt werden:

»*Auf jeder singulären Riemann'schen Fläche existiren auch singuläre Correspondenzen*«.

§ 3.

Definition der Werthigkeitscorrespondenzen durch eine algebraische Function.

Es bezeichne nun $\vartheta[v_1, v_2, \ldots v_p]$ oder kürzer $\vartheta[v_i]$ die zu der Fläche gehörige ϑ-Function, so wird bei passender Wahl der Constanten c_i

$$\vartheta[u_i(x) - u_i(y) - c_i]$$

als Function der Stelle x (oder y) aufgefasst für $x = y$ (oder $y = x$) und weitere $p - 1$ nur von den Constanten c_i abhängende Stellen unendlich klein von der ersten Ordnung. Wenn daher x eine variable, $y', y'', \ldots y^\alpha$ die correspondirenden Stellen, ferner x_0 eine feste, $y_0', y_0'', \ldots y_0^\alpha$ die ihr correspondirenden Stellen, endlich y eine variable, y_0 eine feste Stelle bedeutet, so wird die Function

$$(6)\quad C(x, y) = \prod_{r=1}^{r=\alpha} \frac{\vartheta[u_i(y) - u_i(y^r) - c_i]}{\vartheta[u_i(y_0) - u_i(y^r) - c_i]\, \vartheta[u_i(y) - u_i(y_0^r) - c_i]}$$

als Function von y nur an den x correspondirenden Stellen $y', y'', \ldots y^\alpha$ einfach Null und nur an den x_0 correspondirenden Stellen $y_0', y_0'', \ldots y_0^\alpha$ einfach unendlich und verhält sich entsprechend, wenn man sie als Function von x auffasst. Das Product

$$(7)\quad F(x, y) = \left[\frac{\vartheta[u_i(y) - u_i(x) - c_i]}{\vartheta[u_i(y) - u_i(x_0) - c_i]\, \vartheta[u_i(y_0) - u_i(x) - c_i]}\right]^\gamma \cdot C(x, y)$$

hat aber in Folge der Gleichungen (5) die Eigenschaft, sich unverändert zu reproduciren, wenn y einen geschlossenen Weg beschreibt und ist also eine algebraische Function der Stelle y. Lassen wir x einen geschlossenen Weg durchlaufen, so geht $F(x, y)$ in $e^{2\pi i \sum_i M_i[u_i(y) - u_i(y_0)]} F(x, y)$ über, wo die M_i ganze Zahlen bezeichnen. Da aber die Function nach wie vor algebraisch von der Stelle y abhängen muss, so sind die Zahlen M_i sämmtlich gleich Null, sodass $F(x, y)$ in $F(x, y)$ übergeht, also ungeändert bleibt. $F(x, y)$ ist also auch eine algebraische Function der Stelle x. Damit ist folgender Satz bewiesen:

»*Jede Werthigkeitscorrespondenz — also nach dem vorigen Paragraphen z. B. jede auf einer nicht singulären Riemann'schen Fläche überhaupt mögliche Correspondenz — lässt sich durch eine*

von zwei Stellen x, y der Fläche algebraisch abhängende Function $F(x, y)$ definiren. Wird die Stelle x (bez. y) fixirt, so verschwindet $F(x, y)$ als Function der Stelle y (bez. x) aufgefasst γ-fach für $y = x$ (bez. $x = y$) und je einfach an denjenigen α (bez. β) Stellen, welche der Stelle x (bez. y) correspondiren; sie wird unendlich γ-fach an der festen Stelle x_0 (bez. y_0) und je einfach an den α (bez. β) dieser Stelle x_0 (bez. y_0) correspondirenden Stellen«.

Dabei ist unter einer γ-fachen Null-, bez. Unendlichkeitsstelle eine $-\gamma$-fache Unendlichkeits- bez. Nullstelle zu verstehen, wenn γ eine negative Zahl sein sollte. Die im Satze gegebene Aufzählung der Null- und Unendlichkeitsstellen ist eine erschöpfende.

§ 4.

Das Correspondenzprincip für Werthigkeitscorrespondenzen.

Durchwandern die Stellen x und y gleichzeitig (etwa dicht hinter einander) denselben geschlossenen Weg, so wird sich $\vartheta[u_i(y) - u_i(x) - c_i]$ ungeändert reproducirt haben, wenn x und y auf ihren Ausgangspunkt zurückgekehrt sind. Denn die Integrale $u_i(y)$ und $u_i(x)$ haben sich um dieselbe Periode vermehrt. Deshalb wird

$$(8) \qquad F(x) = \left[\frac{F(x, y)}{(\vartheta[u_i(y) - u_i(x) - c_i])^\gamma}\right]_{y=x}$$

eine algebraische Function der Stelle x sein. Diese Function wird nun so oft verschwinden, als die Stelle x mit einer correspondirenden Stelle y^r zusammenfällt, also C-mal, wenn C die Anzahl der Coincidenzen der Correspondenz bezeichnet. Sie wird an den α Stellen $x = y_0{}^r$ und den β der Stelle y_0 entsprechenden Stellen je einfach unendlich und überdies γ-fach unendlich (oder $(-\gamma)$-fach Null) an den $2p$ Nullstellen von $\vartheta[u_i(x) - u_i(x_0) - c_i] \,.\, \vartheta[u_i(y_0) - u_i(x) - c_i]$. Da nun eine algebraische Function ebenso oft Null wie unendlich wird, so ist

$$(9) \qquad C = \alpha + \beta + 2p\gamma,$$

welches (für $\gamma > 0$) die Cayley-Brill'sche Correspondenzformel ist. Zugleich erhalten wir aber ausser dieser Formel den Satz:

»Die Coincidenzstellen einer Correspondenz mit positiver Werthigkeit sind stets die Nullstellen einer algebraischen Func-

tion $F(x)$ der Fläche. Die Coincidenzstellen einer Correspondenz mit negativer Werthigkeit γ sind zusammen mit $2p$ anderen je $(-\gamma)$-fach zu nehmenden Stellen (nämlich den willkürlichen Stellen x_0, y_0 und den $2p-2$ Nullstellen einer Function φ) die Nullstellen einer algebraischen Function $F(x)$ der Fläche«.

§ 5.

Zahl der Stellenpaare, welche aus zwei sich gleichzeitig in zwei Werthigkeitscorrespondenzen entsprechenden Stellen bestehen.

Auch die von Herrn Brill aufgestellte Formel[1]) für die Zahl der zweien Correspondenzen gemeinsamen Paare entsprechender Stellen ist auf alle Werthigkeitscorrespondenzen ausdehnbar. Die erste Correspondenz besitze die Werthigkeit γ und es möge die Stelle y nach Fixirung der Stelle x α-deutig, umgekehrt die Stelle x nach Fixirung von y β-deutig bestimmt sein; ferner sollen α', β', γ' für die zweite Correspondenz die entsprechende Bedeutung haben, wie α, β, γ für die erste. Fassen wir nun immer zwei Paare (x, y), (x_1, y) zusammen, von denen das erste zur ersten, das zweite zur zweiten Correspondenz gehört, während die zweite Stelle y in beiden dieselbe ist, so werden wir eine neue Correspondenz erhalten, wenn wir die Stellen x und x_1 entsprechend setzen. Offenbar wird nach Fixirung der Stelle x die Stelle x_1 im Ganzen $\alpha\beta'$ Lagen und nach Fixirung von x_1 die Stelle x im Ganzen $\beta\alpha'$ Lagen annehmen. Sind nun $y', y'', \ldots y^{\alpha}$ die vermöge der ersten Correspondenz zu x gehörigen Lagen von y und $(x_1')^r, (x_1'')^r, \ldots (x_1^{\beta'})^r$ die vermöge der zweiten Correspondenz zu y^r gehörigen Lagen von x_1, so ist

$$\sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) + \gamma \cdot u_k(x) = \pi_k \quad (k = 1, 2, \ldots p)$$

$$\sum_{s=1}^{s=\beta'} u_k((x_1^s)^r) + \gamma' u_k(y^r) = \pi_k^r \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots p \\ r = 1, 2, \ldots \alpha \end{pmatrix}$$

und folglich

---

1) Math. Annalen Bd. 6, pag. 42 oder Bd. 7, pag. 611.

$$\sum_{r=1}^{r=\alpha}\sum_{s=1}^{s=\beta'} u_k(x_1^s)^r - \gamma\gamma' u_k(x) = \Pi_k \quad (k = 1, 2, \ldots p),$$

wo π_k, π_k^r, Π_k von der Stelle x unabhängig sind. Das letztere Gleichungssystem zeigt, dass die Correspondenz (x, x_1) die Werthigkeit $-\gamma\gamma'$ besitzt. Nach Gleichung (9) des vorigen Paragraphen kommt es also

$$(10) \qquad \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2p\gamma\gamma'$$

Mal vor, dass x mit x_1 und also das Paar (x, y) mit (x_1, y) identisch wird.

Betrachten wir n Correspondenzen mit den zugehörigen Zahlen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; ... $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, so ergiebt sich auf ähnlichem Wege, dass im Ganzen

$$(11) \quad \alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_n + \beta_1 . \beta_2 \ldots \beta_n + (-1)^{n+1} . 2p\gamma_1 . \gamma_2 \ldots \gamma_n$$

Gruppen von n Stellen $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf der Riemann'schen Fläche existiren von der Beschaffenheit, dass die Stellenpaare

$$(x_1, x_2),\ (x_2, x_3),\ \ldots (x_{n-1}, x_n),\ (x_n, x_1)$$

der Reihe nach der ersten, zweiten, ... n^{ten} Correspondenz angehören.

Die Formel (10) ist ein specieller Fall von (11). Diese Formeln erleiden, wenn die betrachteten Correspondenzen gewisse Symmetrie-Verhältnisse darbieten, eine in jedem Falle leicht anzugebende Modification.

§ 6.

Darstellung der Correspondenzen von positiver Werthigkeit durch algebraische Gleichungen.

Wenn die Werthigkeit γ eine positive Zahl[1]) ist, so stellt die Gleichung

$$(12) \qquad F(x, y) = 0,$$

wo $F(x, y)$ das aus ϑ-Functionen gebildete Product (7) bedeutet, die Correspondenz rein dar, wenn von der γ-fachen Lösung $x = y$ dieser Gleichung abgesehen wird. Nun wird $F(x, y)$ als

1) Die Werthigkeit Null wird hier und in der Folge stets als eine positive angesehen.

Function von y betrachtet, an den festen Stellen $y = y_0'$, y_0'', ... y_0^α je einfach, an der Stelle $y = x_0$ γ-fach unendlich. Es ist $F(x, y)$ folglich eine lineare homogene Function von einer bestimmten Zahl $q+1$ linear unabhängiger algebraischer Functionen

$$f_0(y),\ f_1(y),\ \dots f_q(y),$$

welche an eben denselben Stellen unendlich werden, wobei die Coëfficienten dieser linearen homogenen Function von der Stelle y unabhängig sind. Die Zahl q ist bekanntlich höchstens gleich $\alpha + \gamma - p + \tau$, wo τ angiebt, wie viele linear unabhängige Differentiale erster Gattung an jenen Unendlichkeitsstellen von der zweiten Ordnung unendlich klein werden. Setzen wir in der sich so ergebenden Gleichung

$$F(x, y) = c_0 f_0(y) + c_1 f_1(y) + \dots + c_q f_q(y)$$

für y $q+1$ verschiedene Stellen y^ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots q$), so ergeben sich die Coëfficienten c als algebraische Functionen der Stelle x, deren Unendlichkeitsstellen bei $x = x_0'$, x_0'', ... x_0^β (den der Stelle y_0 correspondirenden Lagen von x) und der γ-fach zu nehmenden Stelle $x = x_0$ liegen. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Determinante $|f_\mu(y^\nu)|$ nicht verschwindet, eine Voraussetzung, die durch passende Wahl der Stellen y^ν erfüllt werden kann, da die Functionen $f_\nu(y)$ linear unabhängig sind. Es wird also

$$(13)\quad F(x, y) = \varphi_0(x) f_0(y) + \varphi_1(x) f_1(y) + \dots + \varphi_q(x) f_q(y).$$

Wir dürfen offenbar annehmen, dass auch die Functionen $\varphi_\nu(x)$ linear unabhängig sind, da sich anderenfalls die rechte Seite der vorstehenden Gleichung auf weniger Glieder zusammenziehen lässt. Es ist dann q auch höchstens gleich $\beta + \gamma - p + \tau'$, wo τ' angiebt, wie viele linear unabhängige Differentiale erster Gattung in den Unendlichkeitsstellen der Functionen $\varphi_\nu(x)$ von der zweiten Ordnung verschwinden. Multipliciren wir $F(x, y)$ mit irgend einer Function $\varphi(x)$, welche nur an den Stellen x_0', ... x_0^β einfach, bei $x = x_0$ γ-fach verschwindet und mit einer Function $f(y)$, welche nur an den Stellen y_0', ... y_0^α einfach, bei $y = y_0$ γ-fach verschwindet, so kommt

$$(14)\quad \Psi(x, y) = \varphi(x) \cdot f(y) \cdot F(x, y)$$
$$= \Phi_0(x) \cdot F_0(y) + \Phi_1(x) \cdot F_1(y) + \dots + \Phi_q(x) \cdot F_q(y),$$

wo nun die Functionen Φ_ν bez. F_ν an $\beta+\gamma$ bez. $\alpha+\gamma$ Stellen, welche zu den Unendlichkeitsstellen der Functionen φ_ν bez. f_ν corresidual sind, unendlich von der ersten Ordnung werden. Da die Gleichung $\Psi = 0$ dieselbe Abhängigkeit zwischen den Stellen x, y, wie die Gleichung $F = 0$ vermittelt, so ist hiermit der Satz bewiesen:

»*Jede Correspondenz mit positiver Werthigkeit lässt sich durch eine Gleichung*

$$(15)\quad \Phi_0(x)\,.\,F_0(y) + \Phi_1(x)\,.\,F_1(y) + \cdots + \Phi_q(x)\,.\,F_q(y) = 0\,,$$

deren linke Seite eine algebraische Function $\beta+\gamma^{ten}$ Grades der Stelle x und $\alpha+\gamma^{ten}$ Grades der Stelle y ist, vollständig darstellen, in dem Sinne, dass bei Fixirung von x bez. y diese Gleichung, abgesehen von der γ-fachen Lösung $y = x$ bez. $x = y$, nur die der Stelle x bez. y correspondirenden Stellen als Lösungen besitzt«.

Wir fügen den ohne Schwierigkeit zu beweisenden Ergänzungssatz hinzu:

»*Diese Darstellung der Correspondenz ist eine vollständig bestimmte, sofern man von solchen Umänderungen der Gleichung* (15) *absieht, welche in der Multiplication derselben mit irgend einer Function der Stelle x oder der Stelle y allein, oder endlich in simultanen linearen Transformationen der Φ und F, welche die Form $\Phi_0 F_0 + \Phi_1 F_1 + \cdots + \Phi_q F_q$ ungeändert lassen, bestehen*«.

Es ist also namentlich auch die Zahl q eine ganz bestimmte für die Correspondenz charakteristische Zahl. Wir wollen dieselbe als die »*Dimension*« der Correspondenz bezeichnen[1]).

§ 7.

Bestimmung der Correspondenzen von gegebener Dimension und gegebener (positiver) Werthigkeit.

Es seien $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, ... $\Phi_q(x)$ irgend $q+1$ linear unabhängige algebraische Functionen der Stelle x. Bestimmen wir nun irgend $q+1$ andere, ebenfalls linear unabhängige

1) Deutet man die Verhältnisse $\Phi_0(x) : \Phi_1(x) : \ldots : \Phi_q(x)$ und $F_0(y) : F_1(y) : \ldots : F_q(y)$ als Punkt-, bez. Ebenen-Coordinaten in einem Raume von q Dimensionen, so erhält man eine bestimmte geometrische Darstellung der Correspondenz. Eine ähnliche ist in einem Raume von weniger als q Dimensionen nicht möglich.

Functionen $F_0(y)$, $F_1(y)$, ... $F_q(y)$ der Stelle y, welche nur der Einschränkung unterworfen sind, dass $\sum_{\nu=0}^{\nu=q} \Phi_\nu(x) F_\nu(y)$ als Function von x an der Stelle $x = y$ γ-fach aber nicht von höherer Ordnung verschwindet, so wird die Gleichung

$$(16)\quad \Phi_0(x) F_0(y) + \Phi_1(x) F_1(y) + \cdots + \Phi_q(x) F_q(y) = 0$$

eine γ-werthige Correspondenz der Dimension q vorstellen, und auf diese Weise werden, zufolge des vorigen Paragraphen, auch alle solche Correspondenzen entstehen. Jene Einschränkung, welcher die Functionen $F(y)$ unterliegen, drückt sich analytisch dahin aus, dass die γ Gleichungen

$$(17)\quad \begin{cases} \Phi_0(y) F_0(y) + \Phi_1(y) F_1(y) + \cdots + \Phi_q(y) F_q(y) = 0 \\ \Phi_0'(y) F_0(y) + \Phi_1'(y) F_1(y) + \cdots + \Phi_q'(y) F_q(y) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \Phi_0^{(\gamma-1)}(y) F_0(y) + \Phi_1^{(\gamma-1)}(y) F_1(y) + \cdots + \Phi_q^{(\gamma-1)}(y) F_q(y) = 0 \end{cases}$$

erfüllt sein müssen, während

$$\Phi_0^{(\gamma)}(y) F_0(y) + \Phi_1^{(\gamma)}(y) F_1(y) + \cdots + \Phi_q^{(\gamma)}(y) F_q(y)$$

nicht mehr verschwindet. Das Zeichen $\Phi_\nu^{(\varrho)}(y)$ bedeutet dabei den ϱ^{ten} Differentialquotienten von $\Phi_\nu(y)$, nach irgend einer Function der Stelle y genommen. Wir folgern aus (17) zunächst, dass die Dimension einer Correspondenz mindestens gleich ihrer Werthigkeit ist. Denn falls $q < p$, muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Phi_0(y) & \cdots & \Phi_q(y) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_0^{(q-1)}(y) & \cdots & \Phi_q^{(q-1)}(y) \end{vmatrix}$$

verschwinden, was, wie eine nähere Betrachtung zeigt, infolge der linearen Unabhängigkeit von $\Phi_0(y)$, ... $\Phi_q(y)$ nicht angeht.

Eliminiren wir aus (17) und (16) die Functionen $F_q(y)$, $F_{q-1}(y)$, ... $F_{q-\gamma+1}(y)$, so ergiebt sich, *dass durch die Gleichung*

$$(18)\quad \sum_{s=0}^{s=q-\gamma} F_s(y) \cdot \begin{vmatrix} \Phi_s(x), & \Phi_{q-\gamma+1}(x), & \ldots & \Phi_q(x) \\ \Phi_s(y), & \Phi_{q-\gamma+1}(y), & \ldots & \Phi_q(y) \\ \Phi_s'(y), & \Phi_{q-\gamma+1}'(y), & \ldots & \Phi_q'(y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_s^{(\gamma-1)}(y), & \Phi_{q-\gamma+1}^{(\gamma-1)}(y), & \ldots & \Phi_q^{(\gamma-1)}(y) \end{vmatrix} = 0$$

die allgemeinste Correspondenz mit der Werthigkeit γ und der Dimension q definirt wird, wenn

1) $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, ... $\Phi_q(x)$ *beliebige linear unabhängige algebraische Functionen der Stelle x bedeuten und*

2) *die $q - \gamma + 1$ ebenfalls algebraischen Functionen $F_0(y)$, $F_1(y)$, ... $F_{q-\gamma}(y)$ der Stelle y so gewählt werden, dass die Gleichung* (18) *nicht identisch erfüllt ist, wenn $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, .. $\Phi_q(x)$ durch $\Phi_0^{(\gamma)}(y)$, $\Phi_1^{(\gamma)}(y)$, ... $\Phi_q^{(\gamma)}(y)$ oder durch nicht sämmtlich verschwindende Constanten c_0, c_1, ... c_q ersetzt werden.*

Die Functionen $F(y)$ können aber stets, nach willkürlicher Annahme der $\Phi(x)$, diesen Bedingungen gemäss gewählt werden, *so dass es immer Correspondenzen von der Werthigkeit γ und einer beliebigen Dimension $q \geqq \gamma$ giebt.*

Zum Beweise betrachten wir die in (18) auftretenden Determinanten für den Fall, dass die Functionen $\Phi_\nu(x)$ durch $\Phi_\nu^{(\gamma)}(y)$ oder durch nicht sämmtlich verschwindende Constanten c_ν ersetzt werden. Weder die bei der ersten, noch die bei der zweiten Ersetzung entstehenden Determinanten (D) können sämmtlich identisch verschwinden.

Die gegentheilige Annahme würde nämlich zu der Folgerung führen, dass die Functionen $\Phi_0(x)$, .. $\Phi_q(x)$, entgegen unserer Voraussetzung, nicht linear unabhängig sind. Dieses vorausgeschickt, wählen wir nun die Functionen $F_0(y)$, .. $F_{q-\gamma}(y)$ so, dass keine zwei dieser Functionen an derselben Stelle unendlich werden und dass ihre Grade grösser sind als die Grade der Determinanten D. Alsdann sind, wie leicht zu sehen, die Bedingungen 2) sicher erfüllt.

Ein besonderes Interesse verdient der Fall, in welchem Dimension und Werthigkeit der Correspondenz einander gleich sind. Auf diesen speciellen Fall beziehen sich die Betrachtungen des Herrn Lindemann, welche in einem Briefe an Herrn Hermite und in den Vorlesungen über Geometrie von Clebsch[1]) mitgetheilt sind; auch gehören hierher die von Herrn Brill im 4. Bande der Mathemat. Annalen pag. 527 ff. gegebenen Entwickelungen über die eine algebraische Curve mehrfach berührenden Curven einer linearen Curvenschaar. Die Gleichung (18) reducirt sich für $q = \gamma$ auf

---

1) Crelle's Journal, Bd. 84, pag. 300—304; Vorlesungen über Geometrie, l. c.; siehe auch Bd. III, pag. 76 ff. der französischen Uebersetzung dieses Werkes von Benoist, wo Herr Lindemann die Darstellung etwas modificirt hat.

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} \Phi_0(x), & \Phi_1(x), & \ldots & \Phi_\gamma(x) \\ \Phi_0(y), & \Phi_1(y), & \ldots & \Phi_\gamma(y) \\ \Phi_0'(y), & \Phi_1'(y), & \ldots & \Phi_\gamma'(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(\gamma-1)}{\Phi_0}(y), & \overset{(\gamma-1)}{\Phi_1}(y), & \ldots & \overset{(\gamma-1)}{\Phi_q}(y) \end{vmatrix} = 0,$$

so dass die Correspondenz schon durch die Wahl der Functionen $\Phi(x)$ vollständig bestimmt ist. — Weitere sich an die Resultate dieses Paragraphen anknüpfende Entwickelungen liegen ausserhalb des Rahmens gegenwärtiger Mittheilung.

§ 8.

Darstellung der Correspondenzen mit positiver Werthigkeit auf Curven vom Geschlechte p.

Wir bezeichnen nun mit

$$\eta(x) = \frac{x_1}{x_3}, \qquad \zeta(x) = \frac{x_2}{x_3}$$

zwei algebraische Functionen der Stelle x der Riemann'schen Fläche, durch welche sich alle übrigen rational ausdrücken lassen. Zwischen diesen Functionen η, ζ besteht eine algebraische Gleichung vom Geschlechte p, welche in der Form

$$(20)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dargestellt werden kann und bei Auffassung der Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ als Dreieckscoordinaten eine ebene Curve vom Geschlechte p vorstellt. In der irgend eine positiv-werthige Correspondenz definirenden Gleichung (15) lassen sich nun die Functionen $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, ... $\Phi_q(x)$ in die Gestalt setzen:

$$(21)\qquad \Phi_0(x) = \frac{\varphi_0(x_1, x_2, x_3)}{\varphi(x_1, x_2, x_3)}, \ \ldots \ \Phi_q(x) = \frac{\varphi_q(x_1, x_2, x_3)}{\varphi(x_1, x_2, x_3)},$$

wo die Gleichung $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ eine Curve vorstellt, welche durch die Unendlichkeitspunkte der Functionen $\Phi_\nu(x)$ und eventuell durch weitere feste Punkte hindurchläuft, welche letztere gleichzeitig auf allen Curven $\Phi_\nu(x_1, x_2, x_3) = 0$ liegen. In entsprechender Weise lassen sich die Functionen $F_\nu(y)$ darstellen; es sei etwa

$$(22)\qquad F_0(y) = \frac{F_0(y_1, y_2, y_3)}{F(y_1, y_2, y_3)}, \ \ldots \ F_q(y) = \frac{F_q(y_1, y_2, y_3)}{F(y_1, y_2, y_3)}.$$

Die Gleichung (15) geht nun, wenn wir den Nenner $\Phi(x_1, x_2, x_3) \, . \, F(y_1, y_2, y_3)$ unterdrücken, über in:

$$(23) \quad \Psi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q} \Phi_\nu(x_1, x_2, x_3) \, . \, F_\nu(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

womit der folgende Satz bewiesen ist:

»*Jede auf einer algebraischen Curve*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

existirende algebraische Correspondenz mit positiver Werthigkeit lässt sich durch eine einzige Gleichung

$$\Psi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0$$

definiren. Bedeuten nämlich y_1, y_2, y_3 (bez. x_1, x_2, x_3) die Coordinaten irgend eines Punktes der Curve f, während x_1, x_2, x_3, (bez. y_1, y_2, y_3) laufende Coordinaten bezeichnen, so stellt die Gleichung $\Psi = 0$ eine Curve vor, welche die Curve f γ-fach in dem Punkte y_1, y_2, y_3 (bez. x_1, x_2, x_3) je einfach in den diesem Punkte correspondirenden Punkten und überdies eventuell in festen Punkten durchschneidet«.

Dieser Satz lässt sich sofort auf algebraische Curven, welche in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen liegen, übertragen. Auch für solche Curven lässt sich bei ev. Hinzunahme von festen Punkten jede Correspondenz mit positiver Werthigkeit durch eine einzige Gleichung definiren.

§ 9.

Darstellung der Correspondenzen mit negativer Werthigkeit durch algebraische Gleichungen.

Wir wollen die Correspondenz C'' aus den beiden Correspondenzen C und C' zusammengesetzt nennen, wenn sie durch die Angabe definirt ist, dass jeder Stelle x gleichzeitig diejenigen Stellen entsprechen sollen, welche ihr in C und in C' correspondiren.

Besitzen die Correspondenzen C und C' die Werthigkeiten γ und γ', so ist die aus ihnen zusammengesetzte Correspondenz C'' eine Correspondenz mit der Werthigkeit $\gamma + \gamma'$, wie aus der Addition der zu den Correspondenzen C und C' gehörenden

Gleichungen (5) hervorgeht. Es sei nun C' eine Correspondenz mit der negativen Werthigkeit

$$\gamma' = -\delta,$$

und C irgend eine Correspondenz mit einer positiven Werthigkeit $\gamma \geqq \delta$; es wird dann C'' die positive Werthigkeit $\gamma - \delta$ besitzen. Sind nun

$$\Psi(x, y) = 0$$
$$\Psi_2(x, y) = 0$$

die Gleichungen, welche die positiv-werthigen Correspondenzen C und C'' darstellen, so wird die Gleichung

$$(24) \qquad \frac{\Psi_2(x, y)}{\Psi(x, y)} = 0$$

die Correspondenz C' mit der negativen Werthigkeit $-\delta$ definiren. Nach den Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen wird also z. B. jede solche Correspondenz auf einer ebenen Curve

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

durch eine Gleichung der Form

$$(25) \qquad \frac{\Psi_2(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3)}{\Psi(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3)} = 0 \text{ [1]}$$

dargestellt werden können, wobei Ψ_2 und Ψ ganze homogene Functionen sowohl von x_1, x_2, x_3 wie von y_1, y_2, y_3 bedeuten, und wo die Gleichung $\Psi = 0$ eine beliebig zu wählende Correspondenz, deren Werthigkeit mindestens gleich δ ist, vorstellt. Beispielsweise kann

$$\Psi = (x_1 y_3 - x_3 y_1)^{\delta}$$

gesetzt werden, und es wird dann $\Psi_2 = 0$ eine (leicht geometrisch zu definirende) Correspondenz mit der Werthigkeit 0 werden.

Die Division von Ψ in Ψ_2 ist aber nicht ausführbar, da eine Gleichung, deren linke Seite eine *ganze* homogene Function von x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 ist, stets eine Correspondenz mit *positiver* Werthigkeit definirt.

Setzen wir, wie soeben, die Correspondenz C' mit C zu der

---

1) Durch solche Gleichungen definirte Correspondenzen betrachtet gelegentlich Herr Lindemann. (Vorlesungen Bd. II. pag. 747, wo gezeigt wird, dass auf diese Correspondenzen die Formel (10) Anwendung findet.)

positiv-werthigen Correspondenz C'' und mit einer anderen Correspondenz K zu der positiv-werthigen Correspondenz K' zusammen, so werden die Gleichungen

$$(26) \qquad \begin{cases} \Psi_1(x, y) = 0, \\ \Psi_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

von denen die erste die Correspondenz K', die zweite die Correspondenz C'' definirt, zusammengenommen die Correspondenz C' darstellen, da je zwei Stellen, welche gleichzeitig in K' und C'' einander entsprechen, auch vermöge der Correspondenz C' correspondirende Stellen sind.

Berücksichtigen wir das Resultat des vorigen Paragraphen, so erhalten wir den Satz:

»*Jede auf einer algebraischen Curve*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

existirende Correspondenz mit negativer Werthigkeit lässt sich zwar nicht durch eine einzige Gleichung, wohl aber auf mannigfaltige Weise durch zwei Gleichungen der Form

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0 \\ \Psi_2(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3) = 0 \end{cases}$$

definiren. Bedeuten nämlich y_1, y_2, y_3 (bez. x_1, x_2, x_3) die Coordinaten irgend eines Punktes der Curve f, während x_1, x_2, x_3 (bez. y_1, y_2, y_3) laufende Coordinaten bezeichnen, so stellen die Gleichungen $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$ zwei Curven vor, welche sich auf der Curve f ausser (eventuell) in dem Punkte y_1, y_2, y_3 (bez. x_1, x_2, x_3) nur noch in den diesem Punkte correspondirenden Punkten und (eventuell) in festen Punkten durchschneiden«.

Dieser Satz lässt sich auch auf Curven, welche in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen liegen, übertragen; stets werden zwei Gleichungen, welche noch auf unendlich viele verschiedene Weisen gewählt werden können, zur Definition der Correspondenz ausreichen.

§ 10.

Die allgemeine Correspondenzformel.

Es erübrigt noch, die singulären Correspondenzen einer näheren Untersuchung zu unterziehen. Die erforderlichen Ent-

wicklungen lassen sich dabei zumeist so darstellen, dass sie für alle algebraischen Correspondenzen, gleichviel ob sie Werthigkeits- oder singuläre Correspondenzen sind, Gültigkeit haben. Es soll daher, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, über die Natur der in der Folge betrachteten Correspondenzen und der sie tragenden Riemann'schen Fläche keine besondere Voraussetzung gemacht werden.

Vermöge irgend einer Correspondenz mögen der Stelle x die Lagen y', y'', .. y^α von y entsprechen; ferner seien y_0', y_0'', .. y_0^α die einer festen Stelle x_0 correspondirenden Lagen von y und endlich bezeichne y_0 irgend eine feste Stelle. Alsdann wird die Function

$$(27)\quad C(x) = \prod_{r=1}^{r=\alpha} \frac{\vartheta[u_i(x) - u_i(y^r) - c_i]}{\vartheta[u_i(y_0) - u_i(y^r) - c_i]\,\vartheta[u_i(x) - u_i(y_0{}^r) - c_i]}$$

auf der in eine einfach zusammenhängende zerschnittenen Fläche so oft Null, als die Stelle x mit einer correspondirenden Stelle y^r zusammenfällt, also C-mal, wenn C die Zahl der Coincidenzen der Correspondenz bezeichnet; dieselbe Function wird an den der Stelle x correspondirenden Stellen y_0', .. y_0^α und an den β Stellen, welche der Stelle y_0 entsprechen, je einfach unendlich.

Es ist folglich:

$$(28)\qquad C - \alpha - \beta = \frac{1}{2\pi i}\int d \log C(x)\,,$$

wo das Integral in positivem Sinne durch die Begrenzung der zerschnittenen Fläche zu erstrecken ist[1]). Andererseits ist dieses Integral gleich

$$\sum_k \left(\int\limits_{a_k} d \log \frac{C^+}{C^-} + \int\limits_{b_k} d \log \frac{C^+}{C^-}\right),$$

wenn die Einzelintegrale längs der Riemann'schen Schnitte a_k, b_k genommen werden und C^+, C^- die Werthe von $C(x)$ auf der positiven bez. negativen Seite des betreffenden Schnittes be-

---

1) In Betreff solcher »Begrenzungsintegrale« verweise ich auf die Riemann'sche Abhandlung über Abel'sche Functionen, sowie auf den Aufsatz von Roch, »Ueber ϑ-Functionen vielfacher Argumente« in Crelle's Journal, Bd. 66.

deuten. Infolge der Relationen (1), (2), (3) des ersten Paragraphen ergiebt sich für die letztere Summe der Werth:

$$-(h_{11}+h_{22}+\cdots+h_{pp}+G_{11}+G_{22}+\cdots+G_{pp}),$$

so dass wir *für die Zahl C der Coincidenzen der allgemeinsten überhaupt möglichen algebraischen Correspondenz die Formel erhalten:*

$$(29)\quad C=\alpha+\beta-(h_{11}+h_{22}+\cdots+h_{pp}+G_{11}+G_{22}+\cdots+G_{pp}).$$

Ist die Correspondenz eine Werthigkeitscorrespondenz, so werden (cf. § 2) die Zahlen h_{ii}, G_{ii} sämmtlich untereinander gleich und die Formel (29) geht, wenn der gemeinsame Werth dieser Zahlen gleich $-\gamma$ gesetzt wird, in

$$C=\alpha+\beta+2p\gamma$$

über, wie es nach § 4 sein muss.

Die Zahl der Stellenpaare x, y, welche sich gleichzeitig in zwei beliebigen Correspondenzen entsprechen, ergiebt sich auf folgendem Wege. Es seien y', y'', .. y^{α} die vermöge der ersten Correspondenz der Stelle x entsprechenden Lagen von y und $x^{\prime,r}$, $x^{\prime\prime,r}$, ... $x^{\beta',r}$ die vermöge der zweiten Correspondenz der Stelle y^r entsprechenden Lagen von x. Dann bestehen nach § 1 die folgenden Relationen:

$$(30)\quad \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r)=\sum\limits_i \pi_{ki}u_i(x)+\pi_k, \\ \sum\limits_{s=1}^{s=\beta'} u_k(x^{s,r})=\sum\limits_i \pi'_{ki}u_i(y^r)+\pi'_k, \quad (r=1,2,\ldots\alpha); \end{cases}$$

wobei

$$(31)\quad \begin{cases} \pi_{kl}=h_{kl}+\sum\limits_i g_{il}a_{ki}, \\ \sum\limits_i \pi_{ki}a_{il}=H_{kl}+\sum\limits_i G_{il}a_{ki}, \\ \pi'_{kl}=h'_{kl}+\sum\limits_i g'_{il}a_{ki}, \\ \sum\limits_i \pi'_{ki}a_{il}=H'_{kl}+\sum\limits_i G'_{il}a_{ki}, \end{cases}$$

unter den Zeichen h, g, H, G, h', g', H', G' ganze Zahlen verstanden.

Die Elimination der Integrale $u_i(y^r)$ aus den Gleichungen (30) ergiebt Relationen der Gestalt:

$$(32)\qquad \sum_{r,s} u_k(x^{s,r}) = \sum_i \pi''_{ki} u_i(x) + \pi''_k,$$

wo zur Abkürzung

$$\pi''_{kl} = \sum_i \pi'_{ki} \pi_{il}$$

gesetzt ist. Eine kurze Rechnung zeigt, dass für die Grössen π''_{kl} die Relationen

$$(33)\qquad \begin{cases} \pi''_{kl} = h''_{kl} + \sum_i g''_{il} a_{ki} \\ \sum_i \pi''_{ki} a_{il} = H''_{kl} + \sum_i G''_{il} a_{ki} \end{cases}$$

aufgestellt werden können, wenn unter h'', g'', H'', G'' die Zahlen:

$$(34)\qquad \begin{cases} h''_{kl} = \sum_i (h_{il} h'_{ki} + g_{il} H'_{ki}), \\ g''_{kl} = \sum_i (h_{il} g'_{ki} + g_{il} G'_{ki}), \\ H''_{kl} = \sum_i (H_{il} h'_{ki} + G_{il} H'_{ki}), \\ G''_{kl} = \sum_i (H_{il} g'_{ki} + G_{il} G'_{ki}) \end{cases}$$

verstanden werden. Die Anwendung der Formel (29) auf die Correspondenz, welche durch die Zuordnung der Stellen $x^{r,s}$ zur Stelle x definirt ist, ergiebt nun für die Zahl (C, C') der Coincidenzen dieser Correspondenz den Ausdruck:

$$(C, C') = \alpha\beta' + \beta\alpha' - (h''_{11} + h''_{22} + \cdots + h''_{pp} + G''_{11} + G''_{22} + \cdots + G''_{pp}),$$

oder, mit Rücksicht auf (34):

$$(35)\qquad (C, C') = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \sum_{i,k} [h_{ik} h'_{ki} + g_{ik} H'_{ki} + H_{ik} g'_{ki} + G_{ik} G'_{ki}],$$

und diese Zahl wird offenbar angeben, wie viele Stellenpaare x, y gleichzeitig beiden Correspondenzen angehören [1].

---

1) Bei der Anwendung dieser und ähnlicher Formeln ist der folgende Satz von Nutzen. Werden für irgend eine Correspondenz die in § 1 be-

Unter der Voraussetzung, dass beide Correspondenzen Werthigkeitscorrespondenzen sind, geht die Formel (35) in die Formel (10) des § 5 über.

§ 11.

Existenz der singulären Correspondenzen.

Es sei irgend ein Lösungsystem der $2p^2$ Gleichungen:

$$(36)\quad \begin{cases} \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il} a_{ki}, \\ \sum_i \pi_{ki} a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il} a_{ki} \end{cases}$$

gegeben. Dann werden durch den Ansatz:

$$(37)\quad u_k(y') + u_k(y'') + \cdots + u_k(y^p) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k$$

jeder Stelle x p bestimmte Stellen y', y'', .. y^p zugeordnet, wenn die Constanten π_k, was stets möglich ist, so gewählt werden, dass nicht für alle Lagen von x das auf der rechten Seite in (37) auftretende Grössensystem auf mehr als eine Weise in die durch (37) verlangte Form gesetzt werden kann. Durch diesen Ansatz ist also eine algebraische Correspondenz bestimmt, für welche die oben mit α bezeichnete Zahl den Werth p besitzt. In transcendenter Form lässt sich diese Correspondenz durch die eine Gleichung[1])

---

nutzten Bezeichnungen verwendet und bedeuten x', x'', .. x^β die vermöge der Correspondenz einer Stelle y entsprechenden Lagen von x, so ist

$$\sum_{s=1}^{s=\beta} u_k(x^s) = \sum_i \bar{\pi}_{ki} u_i(y) + \bar{\pi}_k,$$

wobei

$$\begin{cases} \bar{\pi}_{kl} = G_{lk} - \sum_i g_{li} a_{ki}, \\ \sum_i \bar{\pi}_{ki} a_{il} = -H_{lk} + \sum_i h_{li} a_{ki}. \end{cases}$$

1) Durch derartige Gleichungen definirte *Werthigkeits*correspondenzen betrachtet Herr Lindemann in der Note »Ueber eine Verallgemeinerung des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abel'schen Integrale« (Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br. Bd. 7. Heft 3; siehe pag. 289 u. 290).

$$(38)\qquad \vartheta\left[u_k(y) - \sum_i{}' \pi_{ki} u_i(x) - c_k\right] = 0$$

definiren, unter c_k passend gewählte Constanten verstanden.

Die Zahl der einer beliebigen Stelle y entsprechenden Lagen von x ist, beiläufig bemerkt, durch das Begrenzungsintegral

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\log\vartheta\left[u_k(y) - \sum_i{}' \pi_{ki} u_i(x) - c_k\right]$$

bestimmt und findet sich, infolge der Gleichungen (36), gleich

$$(39)\qquad \sum_{i,k}{}'(G_{ik} h_{ik} - g_{ik} H_{ik})\,.$$

Wenn nun die Riemann'sche Fläche, welche unserer Betrachtung zu Grunde liegt, eine singuläre ist, so dürfen wir annehmen, dass die Elimination der π_{kl} aus dem Systeme (36) nicht zu lauter Identitäten zwischen den Grössen a_{ik} führt, oder, wie wir kurz sagen wollen, dass das System (36) kein »identisches« ist. Alsdann ist aber die durch (37) definirte Correspondenz sicher keine Werthigkeitscorrespondenz. Die gegentheilige Annahme würde nämlich zu den Gleichungen

$$\sum_i{}' \pi_{ki} u_i(x) = \gamma\,.\,u_k(x) + \bar{\pi}_k\,,$$

und also, indem wir auf beiden Seiten die Perioden nehmen, zu

$$h_{kl} + \Sigma g_{il} a_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{für } k \gtrless l \\ \gamma, & \text{für } k = l \end{cases}$$

$$H_{kl} + \Sigma G_{il} a_{ki} = \gamma\,.\,a_{kl}$$

führen. Aus den letzteren Gleichungen würde aber folgen, dass $h_{11} = h_{22} = \cdots = G_{11} = G_{22} = \cdots = \gamma$ und alle übrigen Zahlen h, g, H, G gleich Null sind, und somit würde das System (36), entgegen unserer Annahme, ein »identisches« sein.

Auf jeder singulären Riemann'schen Fläche existiren also auch singuläre Correspondenzen.

Wir können hinzufügen, dass es stets unendlich viele singuläre Correspondenzen von der eben betrachteten Art giebt.

Es mögen nämlich δ und γ irgend zwei ganze Zahlen bezeichnen, so bestehen zufolge (36) die Relationen

$$(40) \quad \begin{cases} \pi'_{kl} = h'_{kl} + \sum_i g_{il}\, a_{ki}\,, \\ \sum_i \pi'_{ki}\, a_{il} = H'_{kl} + \sum_i G'_{il}\, a_{ki}\,, \end{cases}$$

wenn

$$\pi'_{kl} = \delta \pi_{kl} - \gamma \varepsilon_{kl}\,, \quad h'_{kl} = \delta h_{kl} - \gamma \varepsilon_{kl}\,, \quad g'_{kl} = \delta g_{kl}\,,$$
$$H'_{kl} = \delta H_{kl}\,, \quad G'_{kl} = \delta G_{kl} - \gamma \varepsilon_{kl}$$

gesetzt wird, wobei ε_{kl} den Werth 0 oder 1 bedeutet, je nachdem $k \gtrless l$ oder $k = l$ ist.

Zu dem Systeme (40) gehört nun in derselben Weise eine singuläre Correspondenz, wie die Correspondenz (38) zu dem Systeme (36). Die Zahlen α, β haben für diese neue Correspondenz die Werthe

$$\alpha = p\,, \quad \beta = \sum_{i,k} (G'_{ik} h'_{ik} - g'_{ik} H'_{ik}) \quad \text{(cf. 39)}\,,$$

oder

$$\beta = \delta^2 \sum_{i,k} (G_{ik} h_{ik} - g_{ik} H_{ik}) - \gamma\delta \sum_k (h_{kk} + G_{kk}) + p\gamma^2.$$

Da letzterer Ausdruck, seiner Bedeutung gemäss, für alle ganzzahligen Werthe von γ, δ einen positiven Werth besitzen muss (abgesehen von dem Falle $\gamma = \delta = 0$), so sind die Zahlen g, h, G, H der Bedingung

$$4p \sum_{i,k} (G_{ik} h_{ik} - g_{ik} H_{ik}) > \Big[\sum_k (h_{kk} + G_{kk})\Big]^2$$

unterworfen.

§ 12.

Darstellung der singulären Correspondenzen durch algebraische Gleichungen.

Betrachten wir irgend eine Correspondenz, so gehören zu derselben p Gleichungen der Gestalt:

$$(41) \quad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k\,,$$

wo wie früher die der Stelle x entsprechenden Lagen von y mit y', y'', .. y^α bezeichnet sind. Wir definiren nun, wie im

vorhergehenden Paragraphen, zwei weitere Correspondenzen durch die Ansätze:

$$(42)\quad \sum_n u_k(y_1^n) = -\sum_i \pi_{ki} u_i(x) - \gamma_1 u_k(x) + \pi'_k,$$

$$(43)\quad \sum_n u_k(y_2^n) = -\sum_i \pi_{ki} u_i(x) - \gamma_2 u_k(x) + \pi''_k.$$

Hier bedeuten γ_1, γ_2 irgend zwei positive Zahlen, welche wir nach Willkür annehmen; die Constanten π'_k, π''_k wählen wir, was in mannigfacher Weise geschehen kann, so, dass nicht für jede Lage von x unter den Stellen y_1', y_1'', .. y_1^p sich solche finden, welche gleichzeitig unter den Stellen y_2', y_2'', .. y_2^p vorkommen.

Die Addition der Gleichungen (41) und (42), sowie von (41) und (43) ergiebt nun:

$$(44)\quad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) + \sum_n u_k(y_1^n) + \gamma_1 u_k(x) = \pi_k + \pi'_k,$$

$$(45)\quad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) + \sum_n u_k(y_2^n) + \gamma_2 u_k(x) = \pi_k + \pi''_k.$$

Es werden hiernach durch die Angabe, dass der Stelle x die Lagen y^r und y_1^n, bezüglich die Lagen y^r und y_2^n von y entsprechen sollen, Correspondenzen mit den positiven Werthigkeiten γ_1 und γ_2 definirt und diese können nach den früheren Entwickelungen durch je eine algebraische Gleichung dargestellt werden. Damit ist bewiesen:

»*Jede algebraische Correspondenz, insbesondere auch jede singuläre Correspondenz, lässt sich auf mannigfaltige Art durch zwei algebraische Gleichungen*

$$\Psi_1(x, y) = 0$$
$$\Psi_2(x, y) = 0$$

definiren«.

Es gilt daher der in § 9 besonders hervorgehobene Satz nicht nur für die negativ-werthigen, sondern auch für die singulären Correspondenzen.

§ 13.

Ueber die Gesammtheit der auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche existirenden Correspondenzen.

Es seien μ verschiedene Lösungen des Systems (36) bekannt:

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} \overset{\varepsilon}{\pi}_{kl} &= \overset{\varepsilon}{h}_{kl} + \sum_i \overset{\varepsilon}{g}_{il}\, a_{ki}\,, \\ \sum_i \overset{\varepsilon}{\pi}_{ki}\, a_{il} &= \overset{\varepsilon}{H}_{kl} + \sum_i \overset{\varepsilon}{G}_{il}\, a_{ki}\,, \end{aligned}\right. \qquad (\varepsilon = 1, 2, \ldots \mu)\,,$$

wobei der Fall nicht ausgeschlossen ist, dass unter diesen μ Systemen »identische«, d. h. solche vorkommen, bei welchen die Elimination der $\overset{\varepsilon}{\pi}_{kl}$ auf lauter Identitäten zwischen den a_{ki} führen.

Wir nennen diese μ Systeme *abhängig*, wenn es möglich ist, die Gleichungen:

$$(47)\qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu} \lambda_\varepsilon\, \overset{\varepsilon}{\pi}_{kl} = 0\,, \qquad (k, l = 1, 2, \ldots p)$$

durch nicht sämmtlich verschwindende ganze Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ zu befriedigen; im entgegengesetzten Falle heissen die Systeme (46) unabhängig. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichungen (47) drückt sich durch die $2p^2$ Relationen:

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu} \lambda_\varepsilon\, \overset{\varepsilon}{h}_{kl} &= 0 \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu} \lambda_\varepsilon\, \overset{\varepsilon}{g}_{kl} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (k, l = 1, 2, \ldots p)$$

aus, woraus hervorgeht, dass nicht mehr als $2p^2$ unabhängige Systeme (46) existiren können. Wir nehmen an, dass die μ Systeme (46) unabhängig sind und dass es nicht mehr als μ unabhängige Systeme giebt. Ist dann irgend ein weiteres System (36) gegeben, so können die p^2 Gleichungen

$$(49)\qquad \lambda \pi_{kl} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu} \lambda_\varepsilon\, \overset{\varepsilon}{\pi}_{kl} \quad (k, l = 1, 2, \ldots p)$$

durch ganze Zahlen λ, λ_ε, welche nicht sämmtlich verschwinden, befriedigt werden, und es wird λ von Null verschieden sein, da widrigenfalls die μ Systeme (46) abhängig sein würden.

Es lassen sich aber, wie eine eingehendere Betrachtung zeigt, die μ Systeme stets so wählen, dass die Zahl λ den Werth 1 erhält, und wir haben dann für jedes System (36) die Darstellung:

$$(50)\qquad \pi_{kl} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu} \lambda_\varepsilon \overset{\varepsilon}{\pi}_{kl}, \quad (k, l = 1, 2, \ldots p),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ ganze Zahlen bezeichnen.

Die μ Systeme $\overset{\varepsilon}{\pi}_{kl}$, aus welchen sich jedes andere nach der vorstehenden Formel ganzzahlig zusammensetzen lässt, mögen als μ »Fundamentalsysteme« bezeichnet werden. Ferner sollen die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ die »Charactere« des Systems π_{kl}, und jeder Correspondenz, zu welcher dieses System gehört, heissen. Die Charactere sind nach Annahme der μ Fundamentalsysteme eindeutig bestimmt.

Für eine beliebige Correspondenz möge das Gleichungssystem

$$(51)\qquad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k$$

stattfinden. Setzen wir nun

$$(52)\quad C(x, y) = \prod_{r=1}^{r=\alpha} \frac{\vartheta[u_k(y) - u_k(y^r) - c_k]}{\vartheta[u_k(y_0) - u_k(y^r) - c_k]\, \vartheta[u_k(y) - u_k(y_0{}^r) - c_k]},$$

so wird die Gleichung:

$$(53)\qquad C(x, y) = 0$$

unsere Correspondenz zwar in transcendenter Form, aber vollständig darstellen, indem die Gleichung (53) *nur* für correspondirende Stellen (x, y) erfüllt ist.

Wir bilden jetzt mit den μ Fundamentalsystemen $\overset{\varepsilon}{\pi}_{kl}$ die μ ϑ-Quotienten:

$$(54)\quad C_\varepsilon(x, y) = \frac{\vartheta[u_k(y) - \sum_i \overset{\varepsilon}{\pi}_{ki} u_i(x) - c_k]}{\vartheta[u_k(y_0) - \sum_i \overset{\varepsilon}{\pi}_{ki} u_i(x) - c_k]\, \vartheta[u_k(y) - \sum_i \overset{\varepsilon}{\pi}_{ki} u_i(x_0) - c_k]},$$

wo ε der Reihe nach die Werthe 1, 2, .. μ erhält.

Zufolge (50) und (51) ist nun der Quotient aus $C(x, y)$ und $\prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu}[C_\varepsilon(x, y)]^{\lambda_\varepsilon}$ eine *algebraische* Function $F(x, y)$ der Stellen x und y, und also:

(55) $C(x,y) = [C_1(x,y)]^{\lambda_1}[C_2(x,y)]^{\lambda_2}\dots[C_\mu(x,y)]^{\lambda_\mu}\cdot F(x,y)$.

Hiermit ist die Bestimmung aller auf einer beliebigen Fläche existirenden algebraischen Correspondenzen ausgeführt:

»*Man bestimme μ »Fundamentalsysteme«* (46), *aus welchen sich jedes andere System gemäss* (50) *ganzzahlig zusammensetzen lässt. Ferner bilde man mit den μ Fundamentalsystemen die ϑ-Quotienten $C_\varepsilon(x, y)$ nach Gleichung* (54).

Alsdann wird die Gleichung:

(56) $[C_1(x, y)]^{\lambda_1}[C_2(x, y)]^{\lambda_2}\dots[C_\mu(x, y)]^{\lambda_\mu}F(x, y) = 0$,

in welcher $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\mu$ irgend welche ganze Zahlen und $F(x, y)$ irgend eine von den beiden Stellen x, y algebraisch abhängende Function bedeuten, alle auf der Fläche möglichen algebraischen Correspondenzen definiren«.

Da ein Ausdruck der Form

$$[C_1(x, y)]^{\varrho_1}[C_2(x, y)]^{\varrho_2}\dots[C_\mu(x, y)]^{\varrho_\mu}$$

nur dann eine algebraische Function der Stellen x, y sein kann, wenn die Zahlen ϱ sämmtlich verschwinden, so kann zur Darstellung *aller* Correspondenzen keine der μ Functionen $C_\varepsilon(x, y)$ entbehrt werden.

Für nicht-singuläre Riemann'sche Flächen hat die Zahl μ den Werth 1, denn alle Systeme (36) lassen sich ganzzahlig aus dem *einen*, in welchem $\pi_{11} = \pi_{22} = \dots = \pi_{pp} = 1$ und alle übrigen $\pi_{ki} = 0$ sind, zusammensetzen. Das System der Charactere $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\mu$ einer Correspondenz reducirt sich auf die eine Zahl $\lambda_1 = -\gamma$, wo γ die Werthigkeit bezeichnet, und die Formel (55) geht in (7) über.

Für singuläre Flächen ist dagegen die Zahl μ stets grösser als 1 und das System der Charactere einer Correspondenz besteht aus mehreren Zahlen.

Setzen wir in (55) $y = x$ und vergleichen die Zahl der Null- und Unendlichkeitsstellen der auf beiden Seiten entstehenden Functionen der Stelle x, so erhalten wir

(57) $C = \alpha + \beta + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \dots + c_\mu\lambda_\mu$,

wenn C die Anzahl der Coincidenzen der beliebigen Correspondenz $C(x, y) = 0$, α und β die Zahl der einer beliebigen Stelle x bez. y entsprechenden Lagen von y bez. x bedeuten. Die Coefficienten $c_1, c_2, .. c_\mu$ sind ganze Zahlen, welche von der betrachteten Correspondenz unabhängig sind. In dieser Gleichung (57) haben wir die allgemeine Correspondenzformel in einer neuen Gestalt vor uns.

§ 14.

Litterarisches über die singulären Riemann'schen Flächen.

Die im vorstehenden Paragraphen gegebene Darstellung der Correspondenzen habe ich für die von Herrn Klein in die Theorie der elliptischen Modulfunctionen eingeführten »Modularcorrespondenzen«[1]) (wenigstens für den Fall einer primzahligen »Stufe«) in einer in diesen Berichten abgedruckten Note[2]) hergestellt. Jedoch sind an jener Stelle die transcendenten Factoren $C_1(x, y), \dots C_\mu(x, y)$ nicht auf ihre geringste Zahl zurückgeführt, da dieses für die dort verfolgten Zwecke nicht erforderlich war. Die »Charactere« λ_i der Modularcorrespondenzen sind die Entwicklungscoëfficienten der Integrale erster Gattung q^{ter} Stufe, und da die Zahl dieser Coëfficienten im Allgemeinen grösser als 1 ist, so folgt, dass alle diese Correspondenzen singulär sind. In diesem Umstande lag die Schwierigkeit begründet, welche sich bei der Aufstellung der Classenzahlrelationen für höhere Fälle einstellte. Diese Relationen konnten nicht mehr aus der speciellen Formel $C = \alpha + \beta + 2p\gamma$, sondern mussten aus der allgemeinen Correspondenzformel (57) entnommen werden. Diese letztere geht für die Modularcorrespondenzen geradezu in die Classenzahlrelationen über, falls die Zahl C durch die auf arithmetischem Wege abgezählten Coincidenzen ersetzt wird.

Die Modularcorrespondenzen liegen auf denjenigen Riemann'schen Flächen, welche zu der Galois'schen Resolvente

---

1) Sitzungsberichte der Münchener Akademie vom 6. Dec. 1879 oder Mathem. Annalen, Bd. 17 pag. 63 ff.

2) Sitzung vom 4. Mai 1885. Die hier in Betracht kommenden Formeln finden sich auf pag. 233; die Functionen $F(\omega', \omega)$ entsprechen den im Texte mit $C(x, y)$ bezeichneten Functionen.

der Modulargleichungen gehören. Diese Flächen characterisiren sich schon dadurch als singuläre, dass sie eindeutige Transformationen in sich besitzen. Es gilt nämlich der Satz:

»Jede Riemann'sche Fläche, welche eine eindeutige Transformation in sich besitzt, ist entweder eine »hyperelliptische« oder eine singuläre Fläche«.

Ist nämlich die eindeutige Transformation als Correspondenz betrachtet eine Werthigkeitscorrespondenz, so existirt nach unseren Entwicklungen eine zweiwerthige Function der Stelle x und die Fläche ist also hyperelliptisch; nach Ausschluss dieses Falles bleibt nur noch die Möglichkeit, dass die Fläche eine singuläre ist.

Schliesslich verweise ich noch in Betreff der singulären Riemann'schen Flächen auf die Untersuchungen der Herren Kronecker, Weber, Frobenius, Wiltheiss[1]) über die verallgemeinerte complexe Multiplication. Diese Untersuchungen beziehen sich sämmtlich, soweit sie auf die zu algebraischen Gleichungen gehörenden Thetas Anwendung finden, auf singuläre Flächen in dem Sinne, wie er in der vorstehenden Note verstanden ist.

Königsberg i. Pr., 5. Januar 1886.

---

1) Kronecker, Monatsberichte der Berl. Akad. vom October 1866 (wieder abgedruckt in Crelle's Journal, Bd. 68).

Weber, Annali di Matematica, Serie II. Bd. 9. pag. 126.

Frobenius, Crelle's Journal, Bd. 95. pag. 264.

Wiltheiss, Bestimmung Abel'scher Functionen mit zwei Argumenten, bei denen complexe Multiplicationen stattfinden. Habilitationsschrift, Halle 1881.

idem. Mathem. Annalen, Bd. 26. pag. 127.

SITZUNG AM 8. FEBRUAR 1886.

Martin Krause, *Zur Transformation der elliptischen Functionen.* (Vorgelegt von *F. Klein.*)

Nehmen wir an, dass die Grössen $v_1 \ldots v_n$ beliebige von einander unabhängige Argumente bedeuten, so ist das Product:

$$1) \qquad P = \prod_1^n \vartheta_3(v_i, \tau)$$

als Function von v_i aufgefasst eine Thetafunction erster Ordnung mit der Charakteristik Null, welches überdies der Gleichung Genüge leistet:

$$2) \qquad \sum_1^n \frac{\partial^2 P}{\partial v_i^2} = 4\pi i \frac{\partial P}{\partial \tau}.$$

Setzen wir

$$3) \qquad \vartheta_3[k](v, m\tau) = \vartheta_3(v + k\tau, m\tau)\, e^{\frac{\pi i k}{m}(2v + k\tau)},$$

ferner

$$4) \quad v_i' = a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \cdots + a_{in} v_n, \qquad i = 1, \ldots n,$$

so soll untersucht werden, ob sich nicht ein Aggregat von Gliedern von der Form bilden lässt:

$$\prod_1^n \vartheta[k_i](v_i', m_i\tau),$$

welches als Function von v_i aufgefasst wiederum eine Thetafunction erster Ordnung mit der Charakteristik Null ist, während für die ganzen Zahlen a_{ik} die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &a_{11} + a_{12} + \cdots a_{1n} = n\,, \\ &a_{r1} + a_{r2} + \cdots a_{rn} = 0\,, \quad r > 1\,. \end{aligned}$$

Die Zahlen $m_2 \ldots m_n$ sind willkürliche ganze Zahlen, $m_1 = n$.

Eine leichte Betrachtung zeigt, dass folgende Bedingungen als hinreichende angesehen werden können:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots a_{in}^2 = m_i\,, \qquad i = 1, \ldots n\,, \\ &a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \cdots a_{in}a_{kn} = 0\,, \quad i \gtrless k\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können auch in der Form geschrieben werden:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{a_{1k}^2}{m_1} + \frac{a_{2k}^2}{m_2} + \cdots \frac{a_{nk}^2}{m_n} = 1\,, \\ &\frac{a_{1i}\,a_{1k}}{m_1} + \frac{a_{2i}\,a_{2k}}{m_2} + \cdots \frac{a_{ni}\,a_{nk}}{m_n} = 0\,. \end{aligned}$$

Erfüllen die ganzen Zahlen a_{ik} diese Bedingungen, so ist die Summe:

$$\sum_k \prod_{i=1}^{n} \vartheta_3\,[k_i]\,(v_i',\, m_i\tau)$$

eine Thetafunction erster Ordnung von v_i von der Charakteristik Null, wenn die Summe ausgedehnt ist über alle $k_1 \ldots k_n$ nach den resp. Moduln $m_1 \ldots m_n$, die den Congruenzen Genüge leisten:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &k_1 \equiv a_{11}\,r_1 + a_{12}\,r_2 + \cdots a_{1n}\,r_n \bmod m_1\,, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &k_n \equiv a_{n1}\,r_1 + a_{n2}\,r_2 + \cdots a_{nn}\,r_n \bmod m_n\,. \end{aligned}$$

Die Grössen $r_1 \ldots r_n$ sind willkürliche ganze Zahlen. Der Beweis folgt leicht, wenn wir noch erwägen, dass die Ausdrücke

$$\frac{k_1\,a_{1i}}{m_1} + \frac{k_2 a_{2i}}{m_2} + \cdots \frac{k_n\,a_{ni}}{m_n}$$

ganze Zahlen sind, wenn die früheren Gleichungen bestehen.

Dann folgt aber, dass unsere Summe sich von dem ursprünglichen Producte nur um eine Constante unterscheiden kann, deren Werth sich gleich 1 ergiebt.

Damit haben wir ein allgemeines Additionstheorem gewonnen, welches als Grundlage der Transformationstheorie dienen kann. Setzen wir $v_1 = v_2 = \cdots v_n$, so erhalten wir die Fourier'sche Entwickelung von $\vartheta_3\,(v,\,\tau)^n$.

Es ist nun nicht schwer, die Auflösbarkeit der obigen Gleichungssysteme nachzuweisen. Wir nehmen dazu zunächst einige specielle Fälle.

1) $n = 3$.

Für diesen Fall ergiebt sich:

$$a_{11} = 1\,, \quad a_{12} = 1\,, \quad a_{13} = 1\,, \quad m_1 = 3\,;$$
$$a_{21} = 0\,, \quad a_{22} = 1\,, \quad a_{23} = -1\,, \quad m_2 = 2\,;$$
$$a_{31} = 2\,, \quad a_{32} = -1\,, \quad a_{33} = -1\,, \quad m_3 = 6\,.$$

Wir erhalten die Formel:

(9) $$\vartheta_3 [v_1, \tau] \,.\, \vartheta_3 (v_2, \tau) \,.\, \vartheta_3 (v_3, \tau) =$$
$$= \sum k\, \vartheta_3 [k_1] (v_1 + v_2 + v_3, 3\tau) \,.\, \vartheta_3 [k_2] (v_2 - v_3, 2\tau)$$
$$.\, \vartheta_3 [k_3] (2v_1 - v_2 - v_3, 6\tau)\,,$$
$$k_1 + k_3 \equiv 0 \bmod 3\,,$$
$$k_2 + k_3 \equiv 0 \bmod 2\,.$$

Setzen wir hierin $v_1 = v_2 = v_3$, so erhalten wir die Schröter-sche Formel für $\vartheta_3 (v, \tau)^3$.

2) $n = 4$.

In diesem Falle wird:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 1, \quad a_{14} = 1, \quad m_1 = 4;$$
$$a_{21} = 1, \quad a_{22} = -1, \quad a_{23} = -1, \quad a_{24} = 1, \quad m_2 = 4;$$
$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = 1, \quad a_{33} = -1, \quad a_{34} = 0, \quad m_3 = 2;$$
$$a_{41} = 1, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = -1, \quad m_4 = 2.$$

Mithin wird

(10) $$\prod_1^n \vartheta (v_i, \tau) =$$
$$\sum k\, \vartheta_3 [k_1] (v_1 + v_2 + v_3 + v_4, 4\tau) \,.\, \vartheta_3 [k_2] (v_1 - v_2 - v_3 + v_4, 4\tau)$$
$$.\, \vartheta_3 [k_3] (v_2 - v_3, 2\tau) \,.\, \vartheta_3 [k_4] (v_1 - v_4, 2\tau)\,;$$
$$k_1 \equiv r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \bmod 4\,,$$
$$k_2 \equiv r_1 - r_2 - r_3 + r_4 \bmod 4\,,$$
$$k_3 \equiv r_2 - r_3 \qquad \bmod 2\,,$$
$$k_4 \equiv r_1 - r_4 \qquad \bmod 2\,.$$

3) $n = 5$.

In diesem Falle wird:

$$
\begin{array}{llllll}
a_{11}=1, & a_{12}=1, & a_{13}=1, & a_{14}=1, & a_{15}=1, & m_1=5; \\
a_{21}=4, & a_{22}=-1, & a_{23}=-1, & a_{24}=-1, & a_{25}=-1, & m_2=20; \\
a_{31}=0, & a_{32}=1, & a_{33}=-1, & a_{34}=-1, & a_{35}=1, & m_3=4; \\
a_{41}=0, & a_{42}=0, & a_{43}=1, & a_{44}=-1, & a_{45}=0, & m_4=2; \\
a_{51}=0, & a_{52}=1, & a_{53}=0, & a_{54}=0, & a_{55}=-1, & m_5=2.
\end{array}
$$

Mithin wird:

$$
(11) \qquad \prod_{1}^{5} \vartheta_3(v_i, \tau) =
$$

$$
\sum_k \vartheta_3[k_1](v_1+v_2+v_3+v_4+v_5, 5\tau) \,.\, \vartheta_3[k_2](4v_1-v_2-v_3-v_4-v_5, 20\tau)
$$
$$
.\, \vartheta_3[k_3](v_2-v_3-v_4+v_5, 4\tau) \,.\, \vartheta_3[k_4](v_3-v_4, 2\tau) \,.\, \vartheta_3[k_5](v_2-v_5, 2\tau),
$$

wobei die Summation in analoger Weise zu nehmen ist, wie vorhin.

Endlich nehmen wir:

4) $n = 6$.

Wir erhalten:

$$
\begin{array}{lllllll}
a_{11}=1, & a_{12}=1, & a_{13}=1, & a_{14}=1, & a_{15}=1, & a_{16}=1, & m_1=6; \\
a_{21}=1, & a_{22}=1, & a_{23}=1, & a_{24}=-1, & a_{25}=-1, & a_{26}=-1, & m_2=6; \\
a_{31}=2, & a_{32}=-1, & a_{33}=-1, & a_{34}=0, & a_{35}=0, & a_{36}=0, & m_3=6; \\
a_{41}=0, & a_{42}=0, & a_{43}=0, & a_{44}=2, & a_{45}=-1, & a_{46}=-1, & m_4=6; \\
a_{51}=0, & a_{52}=1, & a_{53}=-1, & a_{54}=0, & a_{55}=0, & a_{56}=0, & m_5=2; \\
a_{61}=0, & a_{62}=0, & a_{63}=0, & a_{64}=0, & a_{65}=-1, & a_{66}=1, & m_6=2.
\end{array}
$$

Die entsprechende Thetaformel möge nicht weiter hingeschrieben werden.

Dann aber folgt leicht die allgemeine Auflösbarkeit. In der That, wenn n eine ungerade Zahl ist, setzen wir:

$$
a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 1, \quad m_1 = n;
$$
$$
a_{21} = n - 1 \,.\, a_{22} = a_{23} = \cdots a_{2n} = -1, \quad m_2 = n \,.\, n - 1;
$$
$$
a_{31} = a_{41} = \cdots = a_{n1} = 0 \,.
$$

Damit aber ist, wie man sich leicht überzeugt, die Bestimmung

der übrigen Zahlen auf den Fall zurückgeführt, dass die Zahl der Veränderlichen gleich $n - 1$, d. h. eine gerade Zahl ist.

Ist aber n eine gerade Zahl gleich $2r$, so setzen wir:

$$a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 1,$$

$$a_{21} = a_{22} \ldots a_{2r} = 1, \quad a_{2r+1} = a_{2r+2} = \cdots = a_{2\,2r} = -1.$$

Dann folgt leicht, dass die Bestimmung der übrigen Grössen auf denjenigen Fall reducirt ist, dass die Zahl der Veränderlichen gleich r ist, gleich der Hälfte der ursprünglichen.

Die nähere Durchführung der angegebenen Methode soll an anderem Orte erfolgen.

Schliesslich möge erwähnt werden, dass schon Herr Gordan im 66. Bande des Crelle'schen Journals Additionstheoreme zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln aufgestellt hat, die aber von dem hier entwickelten verschieden sind.

Rostock, den 12. Januar 1886.

E. Drechsel, *Ueber einen neuen, schwefel- und phosphorhaltigen Bestandtheil der Leber.*

Die Vermuthung, dass in der Leber des mit Phosphor vergifteten Frosches ein Körper enthalten sei, der zur Schwefelsäure in demselben Verhältnisse stehe wie das Lecithin zur Phosphorsäure, veranlasste Herrn Dr. Gaule, das alkoholisch-ätherische Leberextract durch Herrn Dr. Stolnikow auf einen Schwefelgehalt untersuchen zu lassen. In der That konnte in dem mit Soda und Salpeter geschmolzenen Rückstande des Alkoholätherextractes der Froschleber neben Phosphorsäure leicht auch Schwefelsäure nachgewiesen werden, welche, da Sulfate in Aetheralkohol unlöslich sind, auf einen schwefelhaltigen organischen Körper bezogen werden musste, der auch alsbald von Dr. Stolnikow und mir gemeinschaftlich in der Säugethierleber aufgefunden wurde. Die weitere Verfolgung dieses schwefelhaltigen Körpers, welche ich allein in die Hand nahm, bildet den Gegenstand der folgenden vorläufigen Mittheilung.

Bei den ersten Versuchen hatte sich herausgestellt, dass der fragliche Körper in Aether leicht, in Alkohol dagegen sehr schwer löslich ist, dass er aber trotzdem leicht in die alkoholischen Auszüge der Leber übergeht, vermuthlich durch Vermittlung des Lecithins und der Fette. Mit Rücksicht auf dieses Verhalten, und in der Absicht, alle Reagentien, welche eine Zersetzung der Substanz voraussichtlich hätten bewirken können, zu vermeiden, wurde folgender Weg für die Isolirung derselben eingeschlagen, der sich bisher auch ganz gut bewährt hat. Die ganz frische Leber wurde oberflächlich mit Wasser abgewaschen, in der Wurstmaschine zu einem Brei zerkleinert und dann sofort mit dem 2—3 fachen Volum absoluten Alkohols gut gemengt. Am nächsten Tage wurde die Flüssigkeit (welche so gut wie nichts von der Substanz enthielt) abgegossen, und der Rück-

stand mit einer neuen Menge Alkohol durchgerührt, welche Procedur noch einige Male wiederholt wurde, bis der Alkohol fast nichts mehr aus der Leber auszog. Diese alkoholischen Auszüge wurden sodann bei 40—50° eingedunstet, wobei ein halbflüssiger, gelbbrauner Rückstand hinterblieb, der nur, wenn die Temperatur beim Eindunsten etwas höher gestiegen war, eine dunklere Farbe zeigte. Diese Rückstände wurden nunmehr mit 2—3 Vol. absoluten Alkohols kräftig durchgeschüttelt, wobei sie sich grossentheils, mit Hinterlassung gelber, schmieriger und beim Stehen zusammenbackender Flocken lösten; nach dem Absitzen wurde der Rückstand noch so oft mit neuen Mengen Alkohols durchgeschüttelt, bis er sich in diesem nicht mehr zertheilen liess. Nunmehr wurde Aether aufgegossen, in welchem sich jetzt die Hauptmenge des Rückstandes leicht löste; nach dem Absitzen wurde filtrirt und die klare Lösung mit dem mehrfachen Volum absoluten Alkohols versetzt. Dabei entstand ein heller, starker, flockiger Niederschlag, welcher noch starke Neigung zum Zusammenbacken verrieth; derselbe wurde auf einem Filter gesammelt, ein paar Mal mit Alkohol gewaschen, schwach abgepresst und über Schwefelsäure getrocknet. In diesem Zustande stellte er eine theils hornartige braune, theils erdige hellere Masse dar, welche an der Luft begierig Wasser anzog und zu einer klebrigen halbflüssigen Masse zerfloss; noch trocken mit Wasser zusammengebracht quoll die Substanz sehr stark und zeigte unter dem Mikroskope dann schöne Myelinformen. Letzterer Umstand und der bereits erwähnte, dass nämlich die getrocknete Masse theils hornartig, theils erdig aussah, deutete darauf hin, dass die Substanz noch nicht rein sei, speciell dass dieselbe noch Lecithin enthalte. Um letzteres zu entfernen, wurde die Substanz wieder in Aether gelöst (bei späteren Darstellungen natürlich ohne vorhergehendes Trocknen über Schwefelsäure), und abermals mit Alkohol gefällt; nach mehrmaliger Wiederholung dieser Procedur wurde endlich ein Niederschlag gewonnen, welcher nach dem Absaugen mit der Pumpe möglichst rasch über Schwefelsäure in's Vacuum gebracht, daselbst zu einer ganz licht bräunlich gelben, vollkommen erdigen Masse austrocknete. Dabei mag noch erwähnt werden, dass es für die Beschaffenheit des Niederschlages nicht gleichgültig ist, in welcher Weise man denselben mit Alkohol ausfällt; giesst man den Alkohol in die

ätherische Lösung, so kann man auch durch gutes Umrühren die Bildung grober Klumpen nicht verhindern, dies gelingt nur, wenn man die Aetherlösung in dünnem Strahle unter Umrühren in den Alkohol fliessen lässt, oder noch besser, wenn man durch zwei unmittelbar neben einander befindliche Glasröhren gleiche Volume Aetherlösung und Alkohol gleichzeitig in das ca. dreifache Volum Alkohol einfliessen lässt, sodass sich schon die beiden herabfliessenden Strahlen mischen. Untersucht man die alkoholisch-ätherischen Mutterlaugen durch Zusatz einer alkoholischen Lösung von Platinchlorid auf Lecithin, so zeigt sich dessen Gegenwart durch einen weissgelben Niederschlag an: in den ersten Mutterlaugen ist derselbe sehr stark, in den letzten nur sehr gering. Denselben ganz zum Verschwinden zu bringen, ist mir bis jetzt noch nicht geglückt; möglicherweise wird auch die neue Substanz selbst, welche niemals ganz vollständig durch den Alkohol gefällt wird, durch Platinchlorid niedergeschlagen. Das beschriebene Verfahren ist mit grossen Verlusten an Substanz verknüpft, da dieselbe in lecithin- und fetthaltigem Alkohol viel leichter löslich ist als in reinem; daher gelang es mir auch nur durch Verarbeitung einer grösseren Anzahl von Pferdelebern allmählich eine erheblichere Menge Substanz zu gewinnen. Vorläufig bin ich aber trotzdem bei diesem Verfahren stehen geblieben, da es mir alle Garantie dafür zu bieten scheint, dass die erhaltene Substanz während der Darstellung weder eine Zersetzung erlitten hat, noch einer solchen ihren Ursprung verdankt.

Die neue Substanz, für welche ich mit Rücksicht auf ihr Vorkommen den Namen Jecorin vorschlage, zeigt in vieler Hinsicht höchst bemerkenswerthe Eigenschaften. Sie bildet, wie schon erwähnt, leichte Stücke von erdigem Aussehen; dieselben sind trotz ihrer Porosität sehr fest und zerspringen nur unter ziemlich starkem Druck mit grosser Gewalt nach allen Richtungen, lassen sich dann aber leicht zu einem sehr feinen Pulver zerreiben. So lange dieses noch trocken ist, wird es beim Reiben äusserst stark elektrisch; es zieht aber aus der Luft das Wasser mit fast derselben Energie wie geschmolzenes Chlorcalcium an, und backt dann leicht zusammen. In einem Strome von Luft, welche durch concentrirte Schwefelsäure und Phosphorsäureanhydrid getrocknet ist, verliert es im Laufe einiger Tage bei gewöhnlicher Temperatur noch etwas Wasser

oder anhaftenden Alkohol, worauf das Gewicht constant bleibt. Das über Schwefelsäure im Vacuum getrocknete Jecorin zeigt nun ein eigenthümliches Verhalten gegen (käuflichen) absoluten Aether; im Gegensatz zu früher löst sich jetzt selbst bei längerem Stehen nur ein sehr kleiner Theil darin auf; setzt man aber nur ein wenig Wasser, nicht mehr als der Aether selbst aufzunehmen vermag, hinzu, so erfolgt in kürzester Frist völlige Lösung zu einer vollkommen klaren, im auffallenden Lichte nur ganz schwach opalisirenden Flüssigkeit. Hieraus scheint hervorzugehen, dass das Jecorin ein Hydrat bildet, welches in Aether löslich ist und sein Hydratwasser schon beim Stehen über Schwefelsäure verliert, dass aber das wasserfreie Jecorin in Aether höchstens sehr schwer löslich ist.

Für die Analyse wurde die Substanz bei gewöhnlicher Temperatur in einem durch concentrirte Schwefelsäure und über Phosphorsäureanhydrid geleiteten Luftstrom bis zur Gewichtsconstanz getrocknet. Dies geschah in einem kleinen breit U-förmigen Rohre, dessen beide Schenkel oben mit einer seitlich angesetzten kurzen Gasleitungsröhre versehen und mit Hahnstopfen verschliessbar waren; um das Ueberfüllen der getrockneten Substanz in ein Glasröhrchen unter Vermeidung von Luftzutritt ausführen zu können, hatte der mittlere Theil des Apparates in der Richtung der Längsaxe einen kleinen, mit einer aufgeschliffenen Kappe verschliessbaren Ansatz, an welchem das Füllröhrchen mit Hülfe eines kurzen weiten Stückes Gummischlauch befestigt wurde. Das zu den Analysen verwendete Präparat war aus mehreren Pferdelebern gewonnen worden; es wurde nochmals in Aether gelöst und in drei Fractionen mit Alkohol gefällt. Die mittlere, β, wurde wiederum in Aether gelöst und im Ganzen durch Alkohol gefällt; diese Fällung, β 2, wurde vollständig analysirt (1—5 und 7).

1) 0.2108 g Substanz wurden mit chromsaurem Blei und vorgelegtem metallischem Kupfer, zuletzt im Sauerstoffstrome und bei möglichst grosser Hitze (am Orte, wo die Substanz lag) verbrannt, und lieferten 0.1565 g H_2O = 0.01738889 H = 8.25 %, und 0.3992 g CO_2 = 0.10887273 C = 51.64 %.

2) 0.1945 g Substanz ebenso verbrannt lieferten: 0.1420 g H_2O = 0.01577778 H = 8.11 %, und 0.3660 g CO_2 = 0.09984818 C = 51.32 %.

3) 0.2311 g Substanz nach Dumas verbrannt lieferten:

5.6 CC. N bei 10°2 und 750.7^{mm} Hg = 5.266 CC. bei 0° und 760^{mm} Hg = 0.0066178 g N = 2.86 %.[1])

4) 0.2611 g Substanz wurden in reiner concentrirter Salpetersäure unter Zusatz von etwas salpetersaurem Silber zunächst in der Kälte gelöst, dann im zugeschmolzenen Rohre erst auf 100° und zuletzt, nach Oeffnen und Wiederzuschmelzen, auf 180—200° erhitzt; die Reactionsmasse (welche kein Chlorsilber enthielt) wurde sodann mit Wasser verdünnt, mit Salzsäure entsilbert, das Filtrat auf dem Wasserbade über der Spirituslampe mit Salzsäure mehrmals abgedampft, hierauf mit Chlorbaryum die Schwefelsäure, und aus dem Filtrate nach Zusatz von einer bekannten Menge Eisenoxyd und von essigsaurem Ammon durch Kochen die Phosphorsäure ausgefällt. So wurden erhalten: 0.0277 g $BaSO_4$ = 0.00380429 g S = 1.45 %, und 0.02215 g P_2O_5 = 0.00967113 g P = 3.70 %.

5) 0.3252 g Substanz auf dieselbe Art und Weise, doch ohne Zusatz von salpetersaurem Silber, behandelt, gaben: 0.0337 g $BaSO_4$ = 0.004628 g S = 1.42 %, und 0.0262 g P_2O_5 = 0.01144 g P = 3.51 %.[2])

6) 0.4832 g Substanz β gaben 0.0517 g $BaSO_4$ = 0.0071 g S = 1.47 %, und 0.0356 g P_2O_5 = 0.0155 g P = 3.2 %.

7) 0.8878 g Substanz wurden vorsichtig verkohlt und die Asche durch wiederholtes Befeuchten mit etwas reiner Salpetersäure und Glühen nach und nach weiss gebrannt; erhalten wurden 0.1073 g Asche = 12.09 %. Da dieselbe alkalisch reagirte, wurde die Bestimmung der vorhandenen Alkalien zugleich mit derjenigen des Phosphors und des Schwefels nach Carius versucht; leider platzten aber sämmtliche Röhren, sodass wegen Mangels an reinem Material diese Versuche vorläufig aufgegeben werden mussten. Nimmt man aber an, dass die Asche aus metaphosphorsaurem Natron (mit etwas Kali gemengt) besteht, so berechnet sich die Menge derselben für einen

1) Der N wurde über concentrirter Kalilauge (ca. 33 %) gemessen und deren Tension gleich der des Wassers gesetzt, also offenbar zu hoch; das Resultat wird aber nur auf 2.8995 % erhöht, wenn man die Tension = 0, also jedenfalls zu niedrig, annimmt.

2) Der gewogene $BaSO_4$ enthielt eine geringe Menge P_2O_5, sodass der S-Gehalt etwas zu hoch, der P-Gehalt etwas zu niedrig ausgefallen ist.

Phosphorgehalt der Substanz von 3.7% zu 12.18%, und hieraus die Menge des Natriums zu 2.72%.

Aus diesen Zahlen lässt sich die Formel

$$C_{105}H_{185}N_5SP_3Na_3O_{46}$$

ableiten, welche verlangt:

		Ber.:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
C_{105} =	1260	51.53%	51.64%	51.32%	—	—	—	—
H_{185} =	185	7.56	8.25	8.11	—	—	—	—
N_5 =	70	2.86	—	—	2.86%	—	—	—
S =	32	1.31	—	—	—	1.45%	1.42%	1.47%
P_3 =	93	3.80	—	—	—	3.70	3.51	3.2
Na_3 =	69	2.82	—	—	—	(2.72)	—	—
O_{46} =	736	30.10	—	—	—	—	—	—
	2445	99.98						

Wie man sieht, stimmen die gefundenen Werthe mit den für die aufgestellte Formel berechneten hinlänglich überein; ob diese aber richtig ist, wird sich natürlich erst aus dem Studium der Zersetzungsproducte des Jecorins ergeben, einstweilen beweist dieselbe nur, dass hier ein sehr complicirt zusammengesetzter Körper, vermuthlich ein Natronsalz, vorliegt.

Ueber das chemische Verhalten des Jecorins kann ich noch Folgendes mittheilen. Wie bereits erwähnt, ist die Substanz äusserst hygroskopisch und zerfliesst an der Luft zu einer dicken, syrupähnlichen Masse; in Wasser löst sie sich aber trotzdem nicht unmittelbar auf, sondern giebt mit demselben zunächst unter sehr starker Quellung (aber ohne Bildung deutlicher Myelinformen) eine sehr schleimige Masse, welche sich beim Stehen in eine klare Lösung und einen Niederschlag sondert, welcher sich seinerseits in viel Wasser löst. Hat man hierzu nicht allzuviel Wasser genommen, so trübt sich die geschüttelte Flüssigkeit beim ruhigen Stehen, wird aber beim Schütteln wieder klar. Beim Kochen entwickelt die Lösung einen eigenthümlichen seifenähnlichen Geruch, bleibt aber sonst anscheinend unverändert. Dennoch erscheint es fraglich, ob das Jecorin durch Wasser nicht verändert wird; lässt man nämlich die klare Lösung über Schwefelsäure verdunsten, so hinterbleibt ein amorpher, gummiähnlicher Rückstand, welcher in Aether auch bei Wasserzusatz unlöslich ist. Ebenso wenig

löst sich der durch Alkohol in der wässerigen Lösung erzeugte Niederschlag in Aether. Durch concentrirte Salzlösungen (*NaCl*, *BaCl$_2$*) wird die wässerige Lösung gefällt; der *NaCl*-Niederschlag löst sich beim Verdünnen mit Wasser wieder auf. Essigsaures Kupferoxyd und salpetersaures Silberoxyd fällen die Lösung gleichfalls; die Niederschläge lösen sich auf Zusatz von Jecorinlösung, nicht aber im Ueberschusse des Metallsalzes. Diese Lösungen sind stark opalisirend und werden durch Kochen anscheinend nicht verändert; die silberhaltige wird durch etwas Ammoniak völlig klar und färbt sich dann beim Kochen prachtvoll portweinroth (durch Reduction zu Silberoxydul?). Versetzt man die kupferhaltige Lösung mit einigen Tropfen Natronlauge, so wird sie schön blau und klar und scheidet beim Kochen rothes Kupferoxydul aus; dasselbe geschieht beim Kochen einer Jecorinlösung mit Fehling'scher Lösung. Alkalische Lösungen von rothem Blutlaugensalz werden in der Hitze durch Jecorin ebenfalls reducirt. Auf Zusatz von etwas starker Natronlauge verschwindet die Opalescenz einer Jecorinlösung sofort; kocht man hierauf, so entwickeln sich eigenthümlich unangenehm riechende, alkalisch reagirende Dämpfe und nach einigem Kochen erstarrt die Flüssigkeit beim Erkalten zu einem Seifenleim. Zersetzt man diesen mit Säuren, so entweicht etwas Schwefelwasserstoff, wie sich leicht durch Bleipapier nachweisen lässt; der auftretende Geruch ist fast genau derselbe, welchen man beim Ansäuern und Kochen von alkalischen Eiweisslösungen beobachtet. In dem salzsauren Filtrate entsteht durch Chlorbaryum ein schwacher Niederschlag, vermuthlich Baryumsulfat, und Molybdänlösung zeigt Phosphorsäure an. Barytwasser fällt wässerige Jecorinlösungen sofort flockig weiss; das Filtrat wirkt auf alkalische Kupferlösung reducirend. Auch durch Säuren wird das Jecorin leicht zersetzt. Eine kleine Menge verdünnter Salzsäure fällt nicht, durch mehr entsteht ein Niederschlag, der auch durch ziemlich viel concentrirte Salzsäure nicht gelöst wird; kocht man jetzt, so klärt sich die Flüssigkeit etwas, wird aber schnell wieder trübe und scheidet bei weiterem Kochen zunächst einen harzartigen Niederschlag aus, welcher sich unter Klärung der Flüssigkeit zu grossen Klumpen zusammenballt. Versucht man diese mit Wasser auszuwaschen, so quellen sie schon auf dem Filter und noch mehr beim Eintragen in viel kochendes Wasser ausserordentlich stark auf, schrumpfen aber

auf Zusatz von Säure wieder zusammen. Wird die saure Lösung mit den Klumpen weiter gekocht, so tritt neuerdings Trübung ein, und allmählich zergehen die Klumpen völlig zu feinen dunkelbraunen Tröpfchen von geschmolzener Stearinsäure. Dieselbe Zersetzung erleiden die Klumpen durch Kochen mit Alkalien: aus einer solchen Lösung wurde die Säure abgeschieden und dann in Barytsalz verwandelt: 0.1590 g desselben hinterliessen beim Glühen 0.0452 g $BaCO_3$ = 0.0314335 g Ba = 19.77% (ber. für $(C_{18}H_{35}O_2)_2Ba$: 19.49% Ba). Dass aber das Jecorin kein stearinsaures Salz ist oder enthält, erhellt auch daraus, dass es sich in kaltem Salpetersäurehydrat leicht und klar löst; beim Erhitzen scheidet die Lösung aber geschmolzene Stearinsäure aus. Die von der Stearinsäure abfiltrirte Lösung enthält basische Körper, deren Natur noch näher zu ermitteln ist. Kleine Splitterchen von Jecorin scheinen beim Erhitzen in Röhrchen unverändert zu schmelzen; grössere schmelzen nur unter Zersetzung, wobei in stärkerer Hitze unter Aufblähen dicke, schwere, gelbliche Dämpfe entweichen, die sich theils zu einer sauren, wässerigen, theils zu einer öligen, braunen, allmählich erstarrenden Flüssigkeit verdichten. Auf dem Platinblech erhitzt verbrennt Jecorin unter ähnlichen Erscheinungen mit hellleuchtender Flamme, wobei eine schmelzbare Asche und sehr schwer verbrennliche Kohle zurückbleibt.

Bei einer so complicirt zusammengesetzten Substanz wie das Jecorin ist der Zweifel, ob dieselbe ein chemisches Individuum oder nur ein Gemenge ist, sehr berechtigt und beansprucht genaue Widerlegung. Eine solche können die wenigen mitgetheilten Versuche natürlich noch nicht in aller Strenge geben, allein immerhin haben dieselben doch keine Thatsachen kennen gelehrt, welche direct gegen die Individualität des Jecorins sprächen. Man könnte vielleicht meinen, dass die reducirenden Eigenschaften der Substanz von beigemengtem Zucker herrührten, allein gegen eine solche Vermuthung spricht vor Allem die völlige Löslichkeit des Jecorins in Aether, in welchem Traubenzucker völlig unlöslich ist; auch müsste derselbe bei der Fällung mit Alkohol in Lösung bleiben. Dass kein Glykogen beigemengt ist, ergiebt sich daraus, dass das Jecorin durch Jod nicht gefärbt wird. Aus dem Verhalten des Jecorins gegen alkalische Kupferlösung lässt sich auf seine nahe Beziehung zum Glykogen oder Traubenzucker schliessen; zur Gewissheit wird

4*

diese Hypothese aber erst dann werden, wenn es gelungen sein wird, Zucker unter den Zersetzungsproducten desselben aufzufinden. Dass hier Vorsicht geboten ist, beweist das Verhalten des Chitins gegen Säuren, durch welche dieses in das reducirende Glukosamin übergeführt wird. Wie dem aber auch sein möge, so geht aus den mitgetheilten Versuchen doch zur Evidenz hervor, dass man künftig bei Zucker- und Gesammtkohlenhydratbestimmungen in der Leber (und anscheinend auch in anderen Drüsen) auf die Anwesenheit des Jecorins wird Rücksicht nehmen müssen, und dass es falsch ist, die ganze Menge des z. B. durch einen wässerigen Leberauszug reducirten Kupferoxydes auf Traubenzucker oder den ganzen Phosphorgehalt des Alkoholätherextractes auf Lecithin zu beziehen.

Walther Dyck, *Beiträge zur Analysis situs.* II. Mittheilung. (Vorgelegt von *F. Klein.*)

Die nachfolgenden Entwickelungen sind im weiteren Verfolge der Untersuchungen zur Analysis situs entstanden, von denen ich einen ersten Bericht der hohen Societät im Juli vorigen Jahres vorzulegen die Ehre hatte[1]).

Die Beziehung der *Grundzahl einer Fläche* zu der *Kronecker'schen Characteristik eines gewissen Functionensystems* zu kennzeichnen, war der wesentliche Zweck jener Mittheilung. Das weitere Studium jener Kronecker'schen Untersuchungen[2]) hat mich nun auch jene geometrischen Fragen in einer allgemeinen Form zurecht legen lassen, welche es ermöglicht, auf rein geometrischem Wege für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen eine characteristische Zahl zu definiren. Es sind schliesslich die *hier* besprochenen Zahlen keine *wesentlich* anderen, als die, welche schon in den Riemann-Neumann'schen Entwicklungen für die Grundzahl einer Fläche, in den Listing'schen[3]) und Betti'schen[4]) Untersuchungen für mehrdimensionale Gebilde enthalten sind[5]). Doch habe ich absichtlich auch die geometrische Entwickelung der Characteristik (im I. Abschnitte) etwas ausführlicher behandelt, *weil für meine gegenwärtigen Fragestellungen die Form der Ableitung solcher Zahlen wesentlich ist. Diese wird nämlich gegeben mit Hülfe eines Ent-*

---

1) Beiträge zur Analysis situs I. Mittheilung; im Folgenden stets A. S. I. citirt.

2) Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1869 u. 1878.

3) Census räumlicher Complexe. Man sehe insbesondere den Lehrsatz auf pag. 77.

4) Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Annali di matematica S^e 2. tom. 4.

5) Auf Characteristiken von der in meiner Note »On the Analysis situs of threedimensional spaces« (Report of the British Association, Montreal 1884) angedeuteten Art gehe ich hier nicht ein.

stehungsprocesses der Mannigfaltigkeit, welcher, von einem Elementargebilde beginnend, in den verschiedenen Stadien die Aenderung der characteristischen Zahl zu verfolgen gestattet[1]. *Diese Ableitung ermöglicht es dann — sofern nur analytisch zugängliche Entwickelungsarten eines geometrischen Gebildes zu Grunde gelegt werden — sofort auch zur analytischen Formulirung der Characteristik überzugehen* (Abschnitt II) *und diese ist eben keine andere als die Kronecker'sche, welche die Characteristik eines Systems von* $(n+1)$ *eindeutigen reellen Functionen*

$$f=0\,,\ f_1=0\,,\quad f_2=0\,,\ldots f_n=0$$

von n reellen Veränderlichen (wo die f_i *die ersten Ableitungen von f nach den Variabeln bedeuten) angiebt. Die Betrachtung eines solchen Entstehungsprocesses führt dabei — zunächst für zwei- und dreidimensionale lineare Gebiete ausgesprochen — zu je zwei Relationen zwischen den »besonderen Punkten« (Doppelpunkten) eines beliebigen im Endlichen gelegenen ebenen Curvensystems* $f(x, y, z) = 0$ *mit einem Parameter z, und zu zwei analogen Relationen für die »besonderen Punkte« (Knotenpunkte) eines in unserem Raume im Endlichen gelegenen Flächensystems* $f(x, y, z, w) = 0$ *mit einem Parameter w* — Beziehungen, von denen ich einen speciellen Fall für Systeme *sich nicht schneidender Curven* in der Ebene (und auch auf beliebiger Fläche) in der ersten Abhandlung bereits formulirt habe[2]. Zum Schlusse ist noch auf die Weiterführung dieser Untersuchungen hingewiesen, welche in der vorliegenden Form nur die wesentlichen systematischen Betrachtungen für die Behandlung aller solchen Fragen entwickeln wollen.

---

1) Dabei erscheint es dann auch geometrisch berechtigt, wenn ich in der Folge für eine Fläche *die Kronecker'sche Characteristik K statt der Neumann'schen Grundzahl G* einführe, insoferne es naturgemäss erscheint, dem »*Nichtvorhandensein*« einer Mannigfaltigkeit die Characteristik *Null* zu ertheilen. Auch gestaltet sich die Formel, welche die Characteristik einer aus mehreren getrennten Theilen bestehenden Mannigfaltigkeit angiebt, unter Zugrundelegung der Kronecker'schen Zahl einfacher — nämlich direct als Summe der Characteristiken der Bestandtheile (vergl. pag. 59) — als für die Neumann'sche Grundzahl, die sich aus den Grundzahlen der einzelnen Theile *und der Anzahl der Theile* zusammensetzt (vergl. z. B. A. S. I. § 1).

2) Man vergl. hierzu die dort erwähnten auf solche Curvensysteme bezüglichen Untersuchungen von Reech, Möbius und Poincaré.

I. Abschnitt.

Geometrische Ableitung der Characteristik einer Mannigfaltigkeit.

Der vorliegende Abschnitt enthält zunächst die Ableitung der Characteristik *linearer* Mannigfaltigkeiten aus einem Entstehungsprocess der Mannigfaltigkeit, geht dann (§ 5) zu »*geschlossenen*« Mannigfaltigkeiten über und kennzeichnet schliesslich (§ 6) die Abzählung der Characteristik an der *fertigen* Mannigfaltigkeit.

§ 1.

Punktgruppen als Mannigfaltigkeiten M_0.

Nur der Uebersichtlichkeit einiger nachfolgender Formulirungen wegen erwähnen wir als Anfangsglied unserer Mannigfaltigkeiten diejenigen nullter Dimension, *die Punkte, deren Characteristik K_0 gleich ihrer Anzahl ist.*

§. 2.

Eindimensionale Mannigfaltigkeiten M_1.

Das Elementargebilde E_1 einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit ist geometrisch vorgestellt durch ein begrenztes Stück einer Geraden.

Das Entstehen des Elementargebildes zählt $+1$, das Verschwinden -1. Die Trennung eines E_1 in zwei Stücke kommt dem Entstehen eines weiteren E_1 gleich und zählt somit für die Characteristik der Mannigfaltigkeit M_1 mit $+1$, die Vereinigung zweier E_1 entsprechend mit -1. Man kann sich die »Trennung« eines E_1 hergestellt denken durch Ausschaltung eines Punktes, also einer M_0 aus der Strecke, durch eine »Punktirung«, und mag dann den Satz formuliren[1]:

»*Punktirungen« zählen für die Characteristik K_1 einer M_1 im* S i n n e *ihrer Punktcharacteristik.*

Die entgegengesetzte Zählung tritt ein für die inverse Operation des Aufhebens einer Punktirung.

---

1) Der Satz ist in dieser Form nur mit Rücksicht auf die in § 3 und 4 gegebenen analogen Sätze ausgesprochen.

§ 3.

Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten M_2.

Das Elementargebilde E_2 einer ebenen Mannigfaltigkeit M_2 ist geometrisch gegeben durch das Innere einer geschlossenen, sich nicht selbst durchsetzenden ebenen Curve.

Das Entstehen des Elementargebildes zählt $+1$, sein Verschwinden -1. Die Trennung eines E_2 durch einen von Rand zu Rand geführten Schnitt »Querlinie« kommt dem Entstehen eines neuen E_2 gleich, und zählt also $+1$, die Vereinigung zweier Elementargebilde längs einer solchen Strecke zählt entsprechend -1 für die Characteristik K_2. Soferne eine solche Vereinigung zweier Randstücke auch an *einem* E_2 durch Zusammenbiegen statthaben kann und das entstehende ringförmige Ebenenstück auch durch Anbringung einer Oeffnung »Punktirung« in einem E_2 herzustellen ist, folgt, dass »Anbringung einer Oeffnung« als -1, Schliessen einer Oeffnung — eine Operation, die einer »Trennung« durch eine Querlinie im obigen Sinne gleichkommt — als $+1$ zu zählen ist.

Sonach kommen für die Abzählung der Charakteristik K_2 einer ebenen Mannigfaltigkeit M_2 die Sätze:

1. *Ein System von »Punktirungen« zählt für die Flächencharacteristik K_2 im entgegengesetzten Sinne seiner Punktcharacteristik K_0.*

2. *Ein System von »Querlinien« zählt für K_2 im Sinne seiner Curvencharacteristik K_1.*

Die entgegengesetzten Zählungen treten für die Aufhebung der besprochenen Operationen ein.

Weiter entnehmen wir den vorstehenden Ausführungen den Satz:

3. *Schneiden wir aus dem Innern unserer Mannigfaltigkeit M_2 eine andere Mannigfaltigkeit M_2' von gegebener Characteristik K_2' heraus, so ist dieses Entfernen von M_2' im entgegengesetzten Sinne der zugehörigen Characteristik K_2' zu zählen, und umgekehrt ist das Ausfüllen von eingeschlossenen Lücken im Sinne der zugehörigen Characteristik in Rechnung zu bringen.*

§ 4.

Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten M_3.

Das Elementargebilde E_3 ist geometrisch ein von einer Kugel oder einer daraus durch Biegung und Dehnung ohne Zerreissung ableitbaren Fläche begrenzter linearer Raum.

Das Entstehen von E_3 zählt $+1$, sein Verschwinden -1. Die Trennung eines E_3 durch eine ebene Lamelle E_2 »Querfläche«, deren Rand in der Begrenzung von E_3 liegt, zählt, weil damit ein weiteres E_3 hergestellt wird, $+1$ für die Characteristik K_3 von M_3; die Vereinigung zweier E_3 in einem solchen E_2 ist entsprechend -1 zu zählen. Die Vereinigung kann wieder an einem einzigen E_3 in zwei Stücken E_2 der Begrenzungsfläche vorgenommen werden und führt zu einem von einer Ringfläche begrenzten Raume, dessen Characteristik sonach Null beträgt. Wir können uns diese Umformung dadurch hergestellt denken, dass eine Durchbohrung an einem E_3 ausgeführt wird, dergestalt, dass zwei Punkte der Begrenzungsfläche von E_3 durch ein E_1 verbunden werden. Eine solche Durchbohrung oder *die Anbringung einer Querlinie* zählt demnach -1. Umgekehrt ist das Zuwachsen einer solchen Durchbohrung, also das Wegnehmen einer Querlinie E_1 mit $+1$ zu zählen. Um zu entscheiden, wie *die Anbringung einer Punktirung* für die Characteristik unserer M_3 zu zählen ist, denken wir uns einen von zwei concentrischen Kugeln begrenzten schalenförmigen Raum. Wir können denselben dadurch zu einem Elementargebilde E_3 umformen, dass wir beide begrenzende Schalen durch eine Querlinie verbinden, dass wir also durch eine Durchbohrung den innerhalb der Schalen gelegenen Raum mit dem Aussenraume vereinigen. Diese Durchbohrung ändert die Characteristik der von jenen beiden Kugeln begrenzten M_3 um -1. Die Characteristik des dabei entstandenen Raumes E_3 ist aber $+1$, also kommt dem erstgenannten Raume die Characteristik $+2$ zu. Soferne dieser aber auch durch Anbringung einer Punktirung aus einem E_3 abgeleitet werden kann, schliessen wir, dass eine solche hier $+1$ zu zählen ist. Jetzt können wir sofort auch entscheiden, wie sich die Characteristik einer M_3 ändert, wenn wir die M_3 mit solchen Querflächen schneiden, deren Flächencharacteristik nicht mehr gleich 1 ist.

Denken wir uns nämlich das E_3 durch n Punktirungen in eine M_3 von der Characteristik $n+1$ verwandelt, so lässt sich diese sofort in eine von $n+1$ Kugeln begrenzte M_3 (durch Erweiterung jener Punktirungen) verwandeln. Legen wir nun eine Querfläche, welche alle Kugeln schneidet, so besitzt diese Querfläche nach den Zählungen in § 3 die Characteristik $-n+1$. Nach Ausführung des Schnittes ist der Raum in zwei E_3 zerfällt, woraus folgt, dass der Schnitt in jener Querfläche für die Characteristik der M_3 nach Massgabe seiner Flächencharacteristik K_2 zu zählen ist.

Stellen wir die hiermit gewonnenen Sätze zusammen, so sind es die folgenden:

Für die Bestimmung der Characteristik K_3 einer M_3 zählen:

1. *Punktirungen im Sinne ihrer Characteristik K_0.*

2. *Querlinien im entgegengesetzten Sinne ihrer Characteristik K_1;*

3. *Querflächen im Sinne ihrer Characteristik K_2.*

Umgekehrt sind die Aufhebungen der bezeichneten Operationen zu zählen.

Weiter erschliessen wir aus den bisherigen Ausführungen den Satz:

4. *Schneiden wir aus dem Innern unserer Mannigfaltigkeit M_3 eine andere Mannigfaltigkeit M_3' von gegebener Characteristik K_3' heraus, so ist dieses Verschwindenlassen von M_3' im Sinne der zugehörigen Characteristik K_3' zu zählen, und umgekehrt ist das Ausfüllen von eingeschlossenen Hohlräumen im entgegengesetzten Sinne der zugehörigen Characteristik in Rechnung zu bringen.*

§ 5.

Uebergang zu »geschlossenen« Mannigfaltigkeiten M_2 und M_3.

Die hiermit gegebenen Sätze, welche die Characteristik der linearen Mannigfaltigkeiten erster bis dritter Dimension aus einem gemeinsamen Principe ergeben, können ersichtlich in ganz analoger Formulirung auch für mehr Dimensionen fortgeführt werden. Ich möchte indess auf diese weiteren Formulirungen hier nicht eingehen, vielmehr die in den vorstehenden Paragraphen gewonnenen Hülfsmittel noch verwenden, um die

bisherigen Abzählungen, welche nur für *lineare* Mannigfaltigkeiten fixirt sind, die von Punkten, Curven bez. Flächen begrenzt sind, auch noch auf geschlossene Mannigfaltigkeiten auszudehnen. Dabei seien nur zwei- und dreidimensionale Gebilde in Betracht gezogen.

Wir stellen uns dann »geschlossene Mannigfaltigkeiten« dadurch her, dass wir bei den ebenen M_2 die begrenzenden Randcurven paarweise einander zugeordnet denken, und ebenso für die bisher betrachteten M_3 eine paarweise Zuordnung ihrer Begrenzungsflächen gegeben denken. Um dann die Characteristik der geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu bestimmen, bedarf es nur noch zweier Sätze, welche die Aenderung der Characteristik durch die Zuordnung je zweier Begrenzungscurven bez. Begrenzungsflächen angeben, Sätze, deren Umkehrung den Einfluss einer Zerschneidung einer M_2 bez. M_3 längs geschlossener Flächen angiebt.

Insoferne man nun einen geschlossenen innerhalb einer M_2 verlaufenden Schnitt durch eine »Punktirung« (-1) und eine »Querlinie« ($+1$), welche von der Punktirung auslaufend wieder in dieselbe mündet, zusammengesetzt denken kann, folgt der Satz:

Ein geschlossener Curvenschnitt im Innern einer M_2 ändert deren Characteristik nicht. Ebenso bleibt also umgekehrt die Characteristik ungeändert bei der Zuordnung zweier Randcurven einer M_2.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich sofort die Characteristik einer beliebigen geschlossenen M_2 bestimmen durch Summation der Characteristik der ebenen Flächenstücke, deren Zusammensetzung jene M_2 ausmacht.

Beispielsweise wird eine »Kugelfläche« durch Zuordnung der Randcurven zweier E_2 gebildet und es kommt derselben sonach die Characteristik 2 zu. Eine Ringfläche, durch Zuordnung der Ränder eines ebenen zwischen zwei concentrischen Kreisen eingeschlossenen Gebietes herstellbar, erhält die Characteristik Null u. s. w.

Man erkennt gleichzeitig den (auch für mehr Dimensionen ausdehnbaren) Satz:

Die Characteristik K_2 einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M_2, die wir uns als Fläche in einem linearen dreidimensionalen Raume aufgeblasen denken können, ist gleich der doppelten Characteristik K_3 des zugehörigen Innenraumes jener Fläche.

Um auf den Einfluss eines im Innern einer M_3 ausgeführten Schnittes längs einer geschlossenen M_2 zu kommen, betrachten wir zunächst einen im Innern einer M_3 ausgeführten Kugelschnitt. Derselbe kann aus einer Punktirung $(+1)$ und einer Querfläche (von der Characteristik $+1$) zusammengesetzt werden, ändert also die Characteristik von M_3 um $+1+1=2$. Aehnliche Ueberlegungen ergeben den allgemeinen Satz:

Ein im Innern einer M_3 ausgeführter geschlossener Flächenschnitt von der Flächencharacteristik K_2 erhöht die Characteristik von M_3 um K_2. Umgekehrt wird durch die Zuordnung zweier Begrenzungsflächen einer M_3, welche beide die Characteristik K_2 besitzen, die Characteristik der M_3 um K_2 vermindert.

§ 6.

Unveränderlichkeit der Characteristik für verschiedene Erzeugungsweisen einer Mannigfaltigkeit.

Die Bedeutung der Characteristik liegt in der Unveränderlichkeit derselben all den verschiedenen Processen gegenüber, durch welche wir uns eine Mannigfaltigkeit erzeugt denken können. Bei der im Vorstehenden gegebenen Ableitung von K mit Hülfe *eines* Entstehungsprocesses der Mannigfaltigkeit ist es erforderlich, zu beweisen, *dass wir bei jedem Wege, auf welchem wir uns die Mannigfaltigkeit M entstanden denken können, auf dieselbe Zahl K geführt werden.* Dieser Satz ist unmittelbar bewiesen, sobald wir zeigen, dass unsere bisherige Ableitung der Characteristik *zu einer bestimmten Definition derselben an der fertigen Mannigfaltigkeit führt.*

Es seien diese Definitionen für *lineare zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten* (§ 3, 4) formulirt. Es genügt dabei nur von *zusammenhängenden* Mannigfaltigkeiten zu reden, denn es gilt (aus der *bisherigen* Ableitung von K) ganz allgemein der Satz:

Die Characteristik K einer aus beliebig vielen getrennten Theilen bestehenden Mannigfaltigkeit setzt sich aus der Summe der Characteristiken der Theile zusammen.

Ein zusammenhängendes ebenes Flächenstück kann man nun bezeichnen als ein Elementargebilde E_2, aus dessen Innern n ebensolche Elementargebilde E_2 herausgeschnitten sind: *Dann*

ist $K_2 = 1 - n$ d. i. die Differenz der Characteristiken des zu Grunde gelegten und der herausgeschnittenen Flächenstücke E_2 die unmittelbar an dem fertigen Flächenstücke ersichtliche Characteristik[1]).

Ein zusammenhängendes und nur von *einer* geschlossenen Fläche begrenztes Stück unseres Raumes kann man bezeichnen als einen Elementarraum E_3, welcher n Durchbohrungen erhalten hat *und hier ist wieder $K_3' = 1 - n$ die unmittelbar am Gebilde selbst abzulesende Characteristik.* Allgemein wird man jedes *zusammenhängende Stück unseres Raumes* bezeichnen können als einen von einer geschlossenen Fläche nach aussen abgegrenzten Raum von der Characteristik K_3', aus dessen Inneren weitere Räume der obigen Art bez. von den Characteristiken K_3'', K_3''', ... $K_3^{(\nu)}$ herausgeschnitten sind. *Dann ist $K_3 = \Sigma K_3^{(\nu)}$, d. h. die Summe der Characteristiken des zu Grunde gelegten und der herausgeschnittenen Raumstücke die unmittelbar am Gebilde selbst abzulesende Characteristik*[2]).

II. Abschnitt.

Analytische Formulirungen.

Nachdem wir im Vorhergehenden überhaupt irgend welche continuirlichen Processe zur Erzeugung einer Mannigfaltigkeit M betrachtet haben, handelt es sich jetzt, wo wir uns eine solche Mannigfaltigkeit durch eine Gleichung gegeben denken, darum, derartige geometrische Umformungsprocesse für die Herstellung unserer Gebilde einzuführen, die gleichzeitig einer analytischen Behandlung fähig sind. Die folgenden Darstellungen bieten für Mannigfaltigkeiten von ein bis drei Dimensionen specielle Beispiele solcher Umformungsprocesse, die, zu einem Theile schon in meiner ersten Abhandlung angeführt, hier in systematischer Zusammenfassung erscheinen. Sie bezeichnen, ungeachtet ihres specielleren Characters, im Wesentlichen die Art auch allgemeinerer Formulirungen, auf welche noch in § 11 kurz hingewiesen wird.

Es sei bezüglich der nachstehend betrachteten Functionen f, f_1, f_2 ... noch bemerkt, dass wir sie an dieselben Bedingun-

---

1) cf. § 3. Satz 3.

2) Vergl. § 4. Satz 4.

gen geknüpft annehmen, die Kronecker für die Functionen seines Functionensystems zu Grunde legt [1]; ebenso ist die Bezeichnungsweise, wie schon in der ersten Mittheilung, mit der Kronecker'schen übereinstimmend.

§ 7.

Characteristik eindimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Gegeben eine Curve $f(x, y) = 0$. Man bestimme die Characteristik derjenigen Mannigfaltigkeit M_1, welche von den innerhalb $f = 0$ liegenden Theilen der Geraden $y = y_a$ gebildet wird.

Indem man eine Gerade parallel zur Geraden $y = y_a$ über die ganze Curve, von oben beginnend, mit abnehmendem y hingleiten lässt, entsteht die fragliche M_1 in der Art, dass bei jedem Maximum der Curve eine neue Strecke auftritt, bez. eine vorhandene sich theilt, während bei jedem Minimum eine Strecke verschwindet, bez. zwei Strecken zusammenwachsen. *Nach der Definition der Characteristik einer M_1 haben wir also sofort*

(1) $$\underset{y = y_a}{K_1} = \Sigma\,[f_2 \cdot f_{11}]\,,$$

diese Summe verstanden über alle Punkte

$$f = 0\,, \quad f_1 = 0\,, \quad y > y_a\,.$$

Ferner ergiebt sich, da alle im Laufe der Bewegung entstandenen Strecken wieder verschwunden sind, wenn wir die ganze Curve mit der Geraden überstrichen haben:

(2) $$\Sigma\,[f_2 \cdot f_{11}] = 0\,,$$

soferne die Summation jetzt über alle Punkte

$$f = 0\,, \quad f_1 = 0$$

ausgedehnt wird. *Durch diese Formel* (2) *ist eine erste Beziehung zwischen den Berührungspunkten horizontaler Tangenten einer ebenen Curve ausgedrückt.*

---

1) Für die Zusammenstellung der Kronecker'shen Formeln vergl. Monatsberichte 1878 pag. 145 oder auch A. S. I. § 1.

§ 8.

Characteristik zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Gegeben eine Fläche $f(x, y, z) = 0$. Man bestimme die Characteristik der Mannigfaltigkeit zweiter Dimension M_2, welche von den innerhalb $f = 0$ liegenden Theilen der Ebene $z = z_0$ gebildet wird.

Wir lassen eine Ebene z = const. über die Fläche herabgleiten (mit abnehmenden Werthen z) und fragen nach der Characteristik des jedesmaligen ebenen Schnittes. Die Schnitte bilden auf die xy-Ebene projicirt das einfach unendliche System $f(x, y, z) = 0$ mit z als Parameter. Die Characteristik des Innern dieser Schnittcurven ändert sich jedesmal in den Tangentialebenen der Fläche, so zwar, dass wir für diese Aenderung vier Arten von Berührungen unterscheiden können.

(a) und (b). Die Schnittcurve hat an der Berührungsstelle einen isolirten Doppelpunkt.

Dann wird bei der Bewegung der Ebene z = const. im vorgeschriebenen Sinne (mit abnehmendem z) ein Stück der Mannigfaltigkeit M_2 entstehen, bez. eine Oeffnung in demselben verschwinden, oder aber es wird ein vorhandenes Stück der M_2 verschwinden bez. eine Oeffnung in einem solchen entstehen. Die beiden ersten Vorkommnisse sind ersichtlich mit $+1$ für die Aenderung der Characteristik von M_2 zu zählen, die letzten beiden als -1.[1])

(c) und (d). Die Schnittcurve hat an der Berührungsstelle einen Doppelpunkt mit reellen Zweigen.

Dann wird bei der Bewegung unserer Ebene z = const. mit abnehmendem z entweder ein Stück der M_2 sich in zwei spalten, oder es werden zwei vorher getrennte Theile sich vereinigen. Das erste Vorkommniss ist ersichtlich mit $+1$, das zweite mit -1 für die Characteristik von M_2 in Rechnung zu bringen[2]).

---

[1]) Man mag die Unterscheidung auch durch den Umstand characterisiren, dass man in den ersten beiden Fällen »von oben betrachtet« die Aussenseite, in den beiden letzten Fällen die Innenseite der Fläche $f = 0$ sieht. Die analoge Unterscheidung tritt auch für die Fälle (c) und (d) ein.

[2]) Vergl. die vorstehende Anmerkung.

Die analytische Formulirung der bezeichneten Unterschiede ergiebt nun sofort die verlangte *Characteristik* $K_{2\,z=z_a}$ *des ebenen Schnittes* $z = z_a$ *in der Formel:*

$$(3)\qquad K_{2\,z=z_a} = \Sigma\left[f_3 \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}\right],$$

in welcher die Summation über alle Punkte

$$f = 0\,,\quad f_1 = 0\,,\quad f_2 = 0\,,\quad z > z_a$$

verstanden ist.

Die Gleichung

$$(4)\qquad \Sigma\left[f_3 \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}\right] = 0\,,$$

welche, analog wie in § 7, wieder eintritt, wenn wir die Summation über alle Punkte

$$f = 0\,,\quad f_1 = 0\,,\quad f_2 = 0$$

ausdehnen, giebt dabei eine (erste) Beziehung zwischen den Doppelpunkten jenes Curvensystems. Dabei sei hervorgehoben, dass wir diese Beziehung auffassen können als geltend für ein auf der Fläche $f = 0$ *verlaufendes System von sich nicht schneidenden Curven*[1]) *oder aber, als geltend für ein beliebiges ebenes Curvensystem* $f(x, y, z) = 0$ *mit* z *als willkürlichem Parameter.*

Zusatz. Wir können die hiermit gefundene Characteristik eines Curveninneren sofort auch verwerthen, um für die in § 7 gegebenen Berührungspunkte horizontaler Tangenten einer Curve $f(x, y) = 0$ eine weitere Formel abzuleiten. Betrachten wir nämlich, um die Characteristik des Innenraumes der Curve $f(x, y) = 0$ zu bestimmen, das Curvensystem

$$f(x, y) + z = 0\,,$$

so wird nach Formel (3) die fragliche Characteristik gegeben durch

$$(5)\qquad K_{2\,z=0} = \Sigma\left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}\right],$$

wobei die Summation verstanden ist über alle Punkte

$$f(x, y) + z = 0\,,\quad f_1 = 0\,,\quad f_2 = 0\,,\quad z > 0\,,$$

[1]) Also für ein »Curvensystem S« von der in A. S. I (§ 2) gebrauchten Art.

oder kürzer, über alle Punkte

$$f(x, y) < 0\,, \quad f_1 = 0\,, \quad f_2 = 0\,.$$

Diese Characteristik lässt sich aber auch durch die andere Formel

$$(6) \qquad K_{2\atop z=0} = \tfrac{1}{2}\Sigma\,[f_{11}]$$

darstellen, wobei diese Summation jetzt über alle Punkte

$$f = 0\,, \quad f_1 = 0\,,$$

d. h. eben über jene in § 7 betrachteten Berührungspunkte, ausgedehnt ist[1]). *Formel* (6) *liefert also eine zweite Beziehung zwischen jenen Berührungspunkten, deren geometrische Bedeutung sich in einfachster Weise formulirt*[2]).

§ 9.

Characteristik dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Gegeben ein geschlossener Raum von drei Dimensionen in einem linearen Raume von vier Dimensionen durch $f(x, y, z, w) = 0$. *Man bestimme die Characteristik der Mannigfaltigkeit* M_3, *welche von den innerhalb* $f = 0$ *liegenden Theilen des linearen Raumes* $w = w_a$ *gebildet wird.*

Wir lassen die lineare M_3' $w =$ const. über die gegebene Mannigfaltigkeit $f = 0$ herabgleiten und fragen nach der Characteristik des vom jedesmaligen Schnitte begrenzten dreidimensionalen Raumes M_3. Die Reihenfolge aller dieser Schnitte bildet nach $w = 0$, d. h. in unsern Raum projicirt, das Flächensystem $f(x, y, z, w) = 0$ mit w als Parameter. Die Characteristik für den Innenraum der einzelnen Flächen dieses Systems ändert sich nun jedesmal für »berührende« $w =$ const., d. h. jedesmal, wenn eine Fläche des Systems einen Knotenpunkt besitzt. Dabei sind für die Aenderung der Characteristik, wie aus den Definitionen in § 4 des I. Abschnittes sofort folgt, vier Unterschiede bezüglich der Art der auftretenden Knotenpunkte zu treffen:

---

[1]) Vergl. Kronecker Monatsber. 1878 pag. 145.
[2]) A. S. I. § 5.

(a) und (b). Für isolirte Knotenpunkte ist zu unterscheiden

ob in dem betreffenden Punkte (und der durch »abnehmende« w bezeichneten Richtung der Durchlaufung unseres Flächensystems) ein reeller (elliptisch gekrümmter) Flächentheil entsteht, oder umgekehrt

sich ein reeller Flächentheil in einen Punkt zusammenzieht und dann verschwindet.

(c) und (d). Die Knotenpunkte mit reellem Tangentialkegel sind zu trennen

in solche, bei denen ein hyperbolisch gekrümmter Flächentheil sich in zwei elliptische spaltet, und umgekehrt

in solche, bei denen zwei elliptisch gekrümmte Flächentheile sich zu einem hyperbolisch gekrümmten vereinigen.

Die in § 4 des I. Abschnittes gegebenen Entwickelungen zeigen, dass für die Abzählung der Characteristik des Innenraumes unserer Flächen die Fälle (a) und (c) mit $+1$, die Fälle (b) und (d) mit -1 zu rechnen sind. *Analytisch ergiebt sich die fragliche Summation, welche die Characteristik des Schnittes $w = w_a$ von $f(x, y, z, w) = 0$ liefert, durch die Formel*

$$(7) \qquad \underset{w = w_a}{K_3} = \Sigma \left[f_4 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}\right]$$

die Summation erstreckt über alle Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \qquad w > w_a.$$

Dabei liegt wieder in der Gleichung

$$(8) \qquad \Sigma \left[f_4 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}\right] = 0,$$

welche bei der Summation über a l l e *Punkte*

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

statthat, eine erste Relation zwischen jenen Knotenpunkten vor. Auch diese Beziehung mag man dabei wieder geometrisch deuten als geltend für ein System von Flächen, welche sich nicht schneidend als lineare Schnitte auf jener M_3 $f(x, y, z, w) = 0$ angeordnet sind, o d e r *aber als eine Relation zwischen den Knotenpunkten*

eines beliebigen Flächensystemes $f(x, y, z, w) = 0$ in unserem gewöhnlichen Raume mit w als Parameter.

Zusatz. Die hiermit gefundene Characteristik eines von einer Fläche begrenzten linearen Raumes von drei Dimensionen können wir wieder für die in § 8 gegebene Fläche $f(x, y, z) = 0$ verwenden, indem wir diese successive entstehen lassen aus dem Flächensysteme (von sich nicht schneidenden Flächen):

$$f(x, y, z) + w = 0 .$$

Wir erhalten hierfür durch Anwendung der Formel, dass die Characteristik des Innenraumes der Fläche $w = 0$ gegeben ist durch

$$(9) \qquad K_{3\atop z=0} = \Sigma\left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}\right],$$

diese Summe verstanden über alle Punkte

$$f < 0 , \quad f_1 = 0 , \quad f_2 = 0 , \quad f_3 = 0 .$$

Diese Formel lässt sich, wie schon in dem ersten Aufsatze[1]) erwähnt, umsetzen in die andere

$$(10) \qquad K_{2\atop z=0} = \tfrac{1}{2}\Sigma\left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}\right],$$

in welcher die Summation über alle Punkte

$$f = 0 , \quad f_1 = 0 , \quad f_2 = 0$$

verstanden ist.

Sie giebt, da sie sich wieder auf die schon in Formel (4) betrachteten Berührungspunkte horizontaler Tangentialebenen der Fläche $f(x, y, z) = 0$ bezieht (und zwar diesmal ihrem Character als Doppelpunkte mit imaginären bez. reellen Tangenten entsprechend) eine zweite Relation für jene Punkte.

§ 10.

Zweite Relation zwischen den Knotenpunkten eines Flächensystems.

Die ganz analoge Ausführung der Abzählung bei mehr Dimensionen sei hier nur *in der einen Relation besprochen, welche*

1) Vergl. Kronecker, Monatsberichte 1878 pag. 145 und A. S. I. § 6.

(den Formeln (6) *und* (10) *analog) eine zweite Beziehung für die Knotenpunkte des in* § 9 *behandelten Flächensystems* $f(x, y, z, w) = 0$ *giebt*, durch die besondere Abzählung der Characteristik des durch $f = 0$ begrenzten linearen vierdimensionalen Raumes, bei welcher wir denselben entstehen lassen durch successives Anwachsen aus dem Systeme $f(x, y, z, w) + t = 0$. Es ergiebt sich dann für die Characteristik $\underset{t=0}{K_4}$ der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit zunächst eine den Formeln (5) und (9) analoge Darstellung, welche (Formel (6) und (11) entsprechend) umgesetzt werden kann in

$$(11) \qquad \underset{t=0}{K_4} = \tfrac{1}{2} \Sigma \left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \right],$$

die Summe auf alle Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

ausgedehnt. Diese Formel verlangt jetzt die Knotenpunkte des Flächensystems $f = 0$ derart zu summiren,

dass alle *isolirten Knotenpunkte* der einzelnen Flächen des Systems mit $+1$ oder -1 gezählt werden, je nachdem der den Knotenpunkt umgebende Raum positiv oder negativ ist mit Bezug auf die betreffende Fläche, und analog

die *Knotenpunkte mit reellem Tangentialkegel* mit $+1$ oder -1 für die Characteristik zählen, je nachdem der *ein*theilige oder der *zwei*theilige Raum, welcher die Kegelfläche umgiebt, positiv oder negativ ist.

Dieser Unterschied ist aber geometrisch sofort am Flächensystem selbst erkennbar, da nach unserer Annahme für alle Flächen des Systems der unendlich ferne Punkt des Raumes im positiven Gebiet von f liegt.

§ 11.

Allgemeinere Formulirungen.

Die in den vorstehenden Paragraphen gegebenen Entwickelungen haben uns — ich beschränke mich in der Sprechweise auf die Gebiete von zwei und drei Dimensionen — für ebene Curvensysteme $f(x, y, z) = 0$ und für Flächensysteme

$f(x, y, z, w) = 0$ je mit einem Parameter z bez. w in unserem gewöhnlichen Raume jedesmal zwei Relationen erkennen lassen, die zwischen den »besonderen Punkten« dieser Systeme bestehen. Die Auffassungsweise dieser Systeme als den Entstehungsprocess zwei- und dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten schildernd, macht es evident, dass irgend anderen als den hier zu Grunde gelegten einfachsten Entwickelungsarten einer Mannigfaltigkeit analoge Relationen entspringen müssen, dass also die hier abgeleiteten Beziehungen, ohne einen wesentlich neuen Gedanken auch übertragbar sind, beispielsweise für Curvensysteme auf beliebigen Flächen, für Flächensysteme in beliebig gestalteten dreidimensionalen Räumen.

Der Umstand weiter, dass die Characteristik unserer Mannigfaltigkeiten in *gleicher* Weise sich für »geschlossene«, wie für berandete Gebiete abzählen lässt, führt zur Aufstellung von Relationen für Curvensysteme, die nicht mehr ein geschlossenes Ganze bilden, sondern durch gewisse Randcurven begrenzt erscheinen[1]), weiter zu Relationen für solche Flächensysteme, die, in einem dreidimensionalen Raume gelegen, jetzt auch wieder nur bis zu gewissen Grenzflächen betrachtet sein sollen.

Auch wird man sich, geometrisch wenigstens, von den im Vorstehenden eingeführten Einschränkungen über die Art der »besonderen« Punkte in unseren Systemen frei zu machen haben, um auf die allgemeineren Formulirungen im Sinne des I. Abschnittes meiner ersten Mittheilung zu gelangen.

Ich hoffe im Verfolg der Untersuchungen auch hierauf eingehen zu können.

---

1) Also Relationen von der in A. S. I. Abschnitt I. gegebenen Art.

SITZUNG AM 8. MÄRZ 1886.

C. Neumann, *Ueber eine einfache Methode zur Begründung des Princips der virtuellen Verrückungen.* [1])

Die einer gegebenen Bedingung:

$$(1.) \qquad f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n) = 0$$

unterworfenen n Massenpunkte $m_1(x_1, y_1, z_1)$, $m_2(x_2, y_2, z_2)$, ... $m_n(x_n, y_n, z_n)$ mögen unter dem Einfluss irgend welcher *unbekannter* Kräfte P_1, P_2, ... P_n im *Gleichgewicht* sein. Es sollen die Eigenschaften und Formeln entwickelt werden, welche, aus dieser Annahme des Gleichgewichts, für jene unbekannten Kräfte sich ergeben.

Das vorhandene Gleichgewicht wird offenbar, falls man zur Bedingung (1.) noch irgend welche *neuen* Beschränkungen hinzutreten lässt, hierdurch *nicht gestört* werden [sondern im Gegentheil nur noch mehr *verstärkt* werden, falls ein solcher Ausdruck gestattet ist]. So z. B. wird jenes Gleichgewicht *bestehen* bleiben, falls man die $(n-1)$ Punkte m_2, m_3, ... m_n *festhält*, mithin ihre Coordinaten als *unveränderlich* betrachtet, wodurch alsdann der Punkt m_1 in seiner Beweglichkeit auf diejenige bestimmte Fläche Ω beschränkt sein wird, welche [jene Coordinaten *unveränderlich* gedacht] durch die Gleichung (1.) dargestellt ist. Alsdann aber reducirt sich die ursprüngliche Sachlage dahin, dass der auf Ω verschiebbare Punkt m_1 unter dem Einfluss der unbekannten Kraft P_1 im Gleichgewicht sich befindet. Hieraus folgt, dass diese Kraft P_1 zur Fläche Ω *normal* sein muss, dass mithin ihre Componenten X_1, Y_1, Z_1 Werthe besitzen müssen von folgender Gestalt:

---

1) Vorgetragen und zum Drucke überreicht in der Sitzung vom 8. März 1886.

$$X_1 = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1},$$
$$Y_1 = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y_1},$$
$$Z_1 = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z_1},$$

wo λ_1 einen noch unbekannten Factor vorstellt.

Analoges wird offenbar in analoger Weise für die übrigen Kräfte P_2, P_3, ... P_n respective für deren Componente X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3, ... X_n, Y_n, Z_n sich ergeben, sodass man also zu folgenden $3n$ Formeln gelangt:

$$(2.)\qquad \begin{aligned} X_h &= \lambda_h \frac{\partial f}{\partial x_h}, \\ Y_h &= \lambda_h \frac{\partial f}{\partial y_h}, \qquad h = 1, 2, 3, \ldots n, \\ Z_h &= \lambda_h \frac{\partial f}{\partial z_h}, \end{aligned}$$

wo λ_1, λ_2, ... λ_n noch *unbekannte* Factoren vorstellen.

Nachdem durch die Formeln (2.) die *Richtungen* der unbekannten Kräfte P_1, P_2, ... P_n ermittelt sind, handelt es sich nun weiter um die Untersuchung ihrer *Intensitäten*, oder (was dasselbe ist) um die Untersuchung der unbekannten Factoren λ_1, λ_2, ... λ_n. Um hierauf näher einzugehen, greifen wir zurück zur *ursprünglichen* Sachlage, welche darin besteht, dass die der Bedingung (1.) unterworfenen Punkte m_1, m_2, ... m_n unter dem Einfluss der Kräfte P_1, P_2, ... P_n im *Gleichgewicht* sind. Dieses Gleichgewicht wird bestehen bleiben, falls man die $(n-2)$ Punkte m_3, m_4, ... m_n *räumlich fixirt*, überdies aber die beiden Punkte m_1 und m_2, in ihrer Beweglichkeit, auf zwei *feste geradlinige Geleise* $m_1 G_1$ und $m_2 G_2$ beschränkt, welche einander *parallel* sein mögen, und deren gemeinschaftliche Richtungscosinus mit α, β, γ bezeichnet sein sollen. Alsdann werden die Punkte m_1 und m_2, in Folge der Bedingung (1.), längs dieser Geleise nur in solcher Weise sich bewegen können, dass ihre gleichzeitig durchlaufenen Wegelemente δs_1 und δs_2 zu einander in der Beziehung stehen:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_1}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_1}\gamma\right)\delta s_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_2}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_2}\gamma\right)\delta s_2 = 0.$$

Und diese simultanen Wegelemente δs_1, δs_2 werden daher einander *gleich* sein, sobald man die α, β, γ der Relation unterwirft:

$$(3.)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_1}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_1}\gamma\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_2}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_2}\gamma\right) = 0 .$$

Solches festgesetzt, sind also die Punkte m_1 und m_2 längs ihrer *parallelen* Geleise G_1 und G_2 nur um *gleichviel* verschiebbar, also nur der Art beweglich, dass ihr gegenseitiger Abstand *constant* bleibt. Demgemäss erleidet diese Beweglichkeit der beiden Punkte keinerlei Hemmung oder Beeinträchtigung, falls man die beiden Punkte durch eine *starre Linie L* miteinander verbindet.

Solches aber ausgeführt gedacht, reducirt sich jetzt die ursprüngliche Sachlage dahin, dass die *starre Linie L*, deren Endpunkte m_1 und m_2 auf den *parallelen festen Geleisen* G_1 und G_2 verschiebbar sind, unter Einwirkung der ihre Endpunkte sollicitirenden Kräfte P_1 und P_2 im *Gleichgewicht* ist. Hieraus folgt sofort, dass die Summe der diesen Geleisen entsprechenden Componenten von P_1 und P_2 gleich *Null* sein muss. Man erhält also die Formel:

$$P_1 \cos(P_1, G_1) + P_2 \cos(P_2, G_2) = 0 .$$

Diese Formel aber kann man auch so schreiben:

$$(X_1\alpha + Y_1\beta + Z_1\gamma) + (X_2\alpha + Y_2\beta + Z_2\gamma) = 0 ,$$

oder mit Rücksicht auf (2.) auch so:

$$\lambda_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_1}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_1}\gamma\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_2}\beta + \frac{\partial f}{\partial z_2}\gamma\right) = 0 ,$$

oder, weil α, β, γ der Relation (3.) unterworfen worden sind, auch so:

$$\lambda_1 = \lambda_2 .$$

In analoger Weise wird sich offenbar ergeben $\lambda_1 = \lambda_3$, ferner $\lambda_1 = \lambda_4$, u. s. w., mithin allgemein:

$$(4.)\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n .$$

Bezeichnet man aber den gemeinschaftlichen Werth dieser n Grössen kurzweg mit λ (ohne Index), so gelangt man auf Grund der Formeln (2.) zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Befinden sich die einer gegebenen Bedingung*

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0$$

unterworfenen n Massenpunkte m_h (x_h, y_h, z_h) *unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte* P_h (X_h, Y_h, Z_h) *im Gleichgewicht, so müssen diese Kräfte nothwendiger Weise Werthe besitzen von folgender Gestalt:*

$$X_h = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

$$(5.) \qquad Y_h = \lambda \frac{\partial f}{\partial y_h}, \qquad h = 1, 2, 3, \ldots n,$$

$$Z_h = \lambda \frac{\partial f}{\partial z_h},$$

wo λ einen unbekannten Factor vorstellt.

Dabei ist hinzuzufügen, dass dieser unbekannte Factor λ keinen bestimmten Werth zu haben braucht, sondern im Gegentheil jeden beliebigen Werth besitzen darf.

Um die Richtigkeit dieser letzten Behauptung darzuthun, werden wir offenbar nur zu zeigen brauchen, dass *irgend eine* von den Kräften P_1, P_2, ... P_n, z. B. P_1 von *beliebiger Stärke* sein kann.

Zu diesem Zweck wollen wir die $(n-1)$ Punkte m_2. m_3, ... m_n von Neuem *festhalten*; sodass also der Punkt m_1 nur noch verschiebbar ist längs der (früher besprochenen) Fläche Ω. Alsdann wird offenbar dieser Punkt m_1 im *Gleichgewicht* sein unter dem Einfluss einer *beliebig starken* Kraft P_1, falls nur dieselbe *normal* ist zur Fläche Ω. Denken wir uns nun aber eine solche Normalkraft P_1, von *beliebiger* Stärke, auf m_1 wirklich einwirkend, und bezeichnen wir die dabei zum Festhalten der $(n-1)$ Punkte m_2, m_3, ... m_n erforderlichen Kräfte mit P_2, P_3, ... P_n, so haben wir im Ganzen n Kräfte, die zusammengenommen das Punktsystem im Gleichgewicht halten, und von denen die erste (nämlich P_1) ihrer Stärke nach *beliebig* gewählt war. — Q. e. d.

Wie man schliesslich zu verfahren hat, um vom Satze (5.) aus zum *Princip der virtuellen Verrückungen* zu gelangen, soll hier nicht weiter dargelegt werden.

Bemerkung. — Sollte man es als einen Uebelstand empfinden, dass bei Anwendung der festen parallelen Geleise G_1, G_2 der gegenseitige Abstand der beiden Punkte m_1, m_2 nur im *ersten Augenblick* der eintretenden Bewegung constant bleibt, so kann man diesen Uebelstand leicht dadurch vermeiden, dass man an Stelle jener Geleise G_1, G_2 zwei *feste Curven* C_1, C_2 in Anwendung bringt. Diese Curven C_1, C_2 lassen sich alsdann leicht der Art festsetzen, dass die längs derselben verschiebbaren und überdies der Bedingung (1) unterworfenen Punkte m_1, m_2 einen gegenseitigen Abstand besitzen, der *fortdauernd* constant bleibt.

Man gelangt in solcher Weise ebenfalls zum Satze (5.), nur auf etwas umständlicherem Wege.

Schliesslich mag noch auf einige Sätze von sehr specieller Natur aufmerksam gemacht werden, die aber durch überraschende Einfachheit sich auszeichnen. Dieselben lauten:

Erster Satz. *Sind drei Punkte m_1, m_2, m_3 der Bedingung unterworfen, dass der Flächeninhalt des von ihnen gebildeten Dreiecks constant bleiben soll, und befinden sich diese Punkte unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte P_1, P_2, P_3 im Gleichgewicht, so werden P_1, P_2, P_3 in die Ebene des genannten Dreiecks fallen, ferner senkrecht stehen zu den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks, und mit diesen Seiten proportional sein.*

Zweiter Satz. *Sind vier Punkte m_1, m_2, m_3, m_4 der Bedingung unterworfen, dass das Volumen des von ihnen gebildeten Tetraëders constant bleiben soll, und befinden sich diese Punkte unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 im Gleichgewicht, so werden P_1, P_2, P_3, P_4 senkrecht stehen zu den gegenüberliegenden Tetraëderflächen und mit diesen Flächen proportional sein.*

Leipzig, 16. Januar 1886.

C. Neumann, *Ueber gewisse particulare Integrale der Differentialgleichung $\Delta F = F$, insbesondere über die Entwickelung dieser particularen Integrale nach Kugelfunctionen.* [1])

Die partielle Differentialgleichung $\Delta F = F$ oder (ausführlicher geschrieben):

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = F$$

wird bekanntlich erfüllt, wenn man für F einen der vier Ausdrücke substituirt:

$$(2.)\qquad \begin{aligned} u &= \frac{1}{R}\, e^R, & U &= \frac{1}{2R}\,(e^R - e^{-R}), \\ v &= \frac{1}{R}\, e^{-R}, & V &= \frac{1}{2R}\,(e^R + e^{-R}), \end{aligned}$$

und dabei unter R den *Abstand* des Punktes (x, y, z) von irgend einem festen Punkte (x_1, y_1, z_1) versteht.

Setzt man nun:

$$(3.)\qquad \begin{cases} x = r\cos\omega = r\mu, \\ y = r\sin\omega\cos\varphi = r\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \\ z = r\sin\omega\sin\varphi = r\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi, \end{cases} \quad \text{und:} \quad \begin{cases} x_1 = r_1, \\ y_1 = 0, \\ z_1 = 0, \end{cases}$$

so nimmt die Differentialgleichung (1.) die Gestalt an:

$$(4.)\qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial F}{\partial \mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = r^2 F,$$

während gleichzeitig R den Werth haben wird:

$$(5.)\qquad R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\mu}\,.$$

Denkt man sich aber diesen Werth von R in (2.) substituirt, so

---

1) Vorgetragen und zum Druck überreicht in der Sitzung vom 8. März 1886.

werden jene Ausdrücke u, v, U, V abhängig sein von r, r_1, μ, und im Allgemeinen entwickelbar sein nach den Kugelfunctionen $P_n(\mu)$; so dass man z. B. erhält:

$$(6.)\quad \begin{aligned} U &= \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n P_n(\mu), \\ V &= \sum_{n=0}^{n=\infty} V_n P_n(\mu), \end{aligned}$$

wo die U_n, V_n nur noch Functionen von r, r_1 sind. *Wir stellen uns die Aufgabe, diese Entwickelungen* (6.) *wirklich zu finden, d. h. die soeben genannten Functionen U_n, V_n wirklich zu berechnen.*

Man kann zuvörderst die Ausdrücke U, V, (2) folgendermassen schreiben:

$$(7.)\quad \begin{aligned} U &= 1 + \frac{R^2}{1.2.3} + \frac{R^4}{1.2.3.4.5} + \cdots \\ V &= \frac{1}{R} + \frac{R}{1.2} + \frac{R^3}{1.2.3.4} + \cdots \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass U für alle Werthe von R, mithin auch für alle Werthe von μ stetig ist, dass mithin eine convergente Entwickelung von der in (6.) genannten Art für die Function U *unter allen Umständen* existiren muss.

Die Function V hingegen wird, zufolge (7.), *unendlich gross*, sobald R *verschwindet*, und wird daher durch eine convergente Entwickelung von der in (6.) genannten Art nur dann darstellbar sein, wenn ihr Argument R, in Folge *verschiedener* Werthe von r und r_1, zu verschwinden ausser Stande ist trotz des beliebig variirenden μ. Wir werden daher, was speciell die Entwickelung von V [nach den $P_n(\mu)$] betrifft, stets voraussetzen müssen, dass r und r_1 von einander *verschieden* sind. Um diese Verschiedenheit in der Vorstellung zu fixiren, mag dieselbe dahin formulirt werden, dass $r < r_1$ sein soll.

Von den beiden Entwickelungen (6.) wird alsdann also

(8.) $\begin{cases} \text{die } \textit{erste} \text{ für beliebige Werthe von } r,\ r_1, \\ \text{hingegen die } \textit{zweite} \text{ für } r < r_1 \end{cases}$

auszuführen sein.

Die Function U ist, wie schon erwähnt, ein Integral der Gleichung (1.), oder, was dasselbe, ein Integral der Gleichung (4.). Demgemäss kann man den in (6.) angegebenen Werth von U in (4.) substituiren. Die in solcher Weise sich ergebende Formel:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U_n}{\partial r}\right) - r^2 U_n\right] P_n(\mu) + U_n\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\mu}\right)\right\} = 0$$

kann, weil $\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\mu}\right)$ bekanntlich $= -n(n+1)P_n(\mu)$ ist, auch so geschrieben werden:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U_n}{\partial r}\right) - [r^2 + n(n+1)]\,U_n\right\} P_n(\mu) = 0,$$

und führt daher zu dem Resultat, dass

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U_n}{\partial r}\right) - [r^2 + n(n+1)]\,U_n = 0$$

ist. Analoges ergiebt sich für V respective V_n; sodass man also, mit Rücksicht auf (8.), zu folgendem Satz gelangt.

Ist

(9.) $$R = \sqrt{r^2 + r_1{}^2 - 2rr_1\mu},$$

und denkt man sich die Ausdrücke

(10.) $$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2R}(e^R - e^{-R}) = 1 + \frac{R^2}{1.2.3} + \frac{R^4}{1.2.3.4.5} + \cdots \\ V &= \frac{1}{2R}(e^R + e^{-R}) = \frac{1}{R} + \frac{R}{1.2} + \frac{R^3}{1.2.3.4} + \cdots \end{aligned}$$

entwickelt nach den $P_n(\mu)$:

(11.) $$\begin{aligned} U &= \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n P_n(\mu), \qquad [r \text{ und } r_1 \text{ beliebig}], \\ V &= \sum_{n=0}^{n=\infty} V_n P_n(\mu), \qquad [r < r_1], \end{aligned}$$

so werden die hier auftretenden Coëfficienten U_n, V_n Functionen von r, r_1 sein, welche die Gleichung erfüllen:

(12.) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) - [r^2 + n(n+1)]\,F = 0,$$

und welche daher, weil R in Bezug auf r, r_1 symmetrisch ist, auch folgender Gleichung Genüge leisten:

$$(12a.) \qquad \frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^2 \frac{\partial F}{\partial r_1}\right) - [r_1^2 + n(n+1)]\,F = 0\,.$$

Die beiden particularen Integrale der Gleichung (12.) sind, wie sich leicht ergiebt, dargestellt durch folgende Potenzreihen:

$$(13.) \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}_n(r) &= r^n\left(1 + \frac{r^2}{2(2n+3)} + \frac{r^4}{2.4(2n+3)(2n+5)} + + \cdots\right), \\ \mathfrak{T}_n(r) &= \frac{1}{r^{n+1}}\left(1 - \frac{r^2}{2(2n-1)} + \frac{r^4}{2.4(2n-1)(2n-3)} - + \cdots\right), \end{aligned}$$

und demgemäss werden jene der Gleichung (12.) genügenden Functionen U_n, V_n Werthe haben von folgender Form:

$$(14.) \quad \begin{aligned} U_n &= A_n \mathfrak{S}_n(r) + B_n \mathfrak{T}_n(r)\,, \\ V_n &= C_n \mathfrak{S}_n(r) + D_n \mathfrak{T}_n(r)\,, \end{aligned}$$

wo A_n, B_n, C_n, D_n nur noch von r_1 abhängen. Da nun U, V, mithin [nach (11.)] auch U_n, V_n für $r = 0$ *endlich* bleiben, und folglich $\mathfrak{T}_n(r)$ in den Ausdrücken (14.) nicht vorkommen darf, so müssen B_n, D_n *Null* sein. Hierdurch reduciren sich die Formeln (14.) auf:

$$(15.) \quad \begin{aligned} U_n &= A_n \mathfrak{S}_n(r)\,, \\ V_n &= C_n \mathfrak{S}_n(r)\,. \end{aligned}$$

Nun wissen wir aber, dass U_n, V_n auch der Differentialgleichung (12a.) Genüge leisten. Hieraus folgt, dass die in (15.) vorhandenen, von r_1 abhängenden Factoren A_n, C_n in linearer Weise ausdrückbar sind durch die beiden particularen Integrale jener Differentialgleichung, d. i. durch $\mathfrak{S}_n(r_1)$ und $\mathfrak{T}_n(r_1)$. Wir erhalten somit:

$$(16.) \quad \begin{aligned} U_n &= [\alpha_n \mathfrak{S}_n(r_1) + \beta_n \mathfrak{T}_n(r_1)]\, \mathfrak{S}_n(r)\,, \\ V_n &= [\gamma_n \mathfrak{S}_n(r_1) + \delta_n \mathfrak{T}_n(r_1)]\, \mathfrak{S}_n(r)\,, \end{aligned}$$

wo α_n, β_n, γ_n, δ_n *Constanten* sind.

Um diese Constanten zu bestimmen, bemerken wir zuvörderst, dass U (10.) für *alle* Werthe von r und r_1 *endlich* und *stetig* bleibt, dass mithin, zufolge (11.), Gleiches auch gelten muss von sämmtlichen U_n. Demgemäss kann die für $r_1 = 0$ ins Unendliche aufspringende Function $\mathfrak{T}_n(r_1)$ im Werthe von

U_n *nicht* vorkommen. Folglich muss die in (16.) auftretende Constante β_n *Null* sein:

$$(17.)\qquad \beta_n = 0.$$

Eine ähnliche Schlussweise ist bei den Functionen V_n *nicht* anwendbar; denn die *zweite* der Formeln (11.) unterliegt der Voraussetzung $r_1 > r$, und ist also unbrauchbar für $r_1 = 0$. Um nun trotzdem über diese Functionen V_n, insbesondere über die in denselben enthaltenen Constanten γ_n, δ_n näheren Aufschluss zu gewinnen, substituiren wir in der *zweiten* Formel (11.) für V den Werth (10.) und für V_n den Werth (16.), und erhalten in solcher Weise:

$$(\text{f.})\quad \frac{1}{R} + \frac{R}{1.2} + \frac{R^3}{1.2.3.4} + \cdots = \sum_{n=0}^{n=\infty} [\gamma_n \mathfrak{S}_n(r_1) + \delta_n \mathfrak{T}_n(r_1)]\, \mathfrak{S}_n(r)\, P_n(\mu),$$

(vorausgesetzt $r < r_1$).

Diese Formel bleibt offenbar in Kraft, wenn man r und r_1 respective mit λr und λr_1 vertauscht, und dabei unter λ einen *beliebigen positiven* Factor versteht. Alsdann aber treten *linker* Hand [vgl. (9.)] folgende Potenzen von λ auf:

$$\lambda^{-1},\quad \lambda,\quad \lambda^3,\quad \lambda^5,\ \ldots,$$

während *rechter* Hand [vgl. (13.)] in den Producten $\mathfrak{S}_n(r_1)\,\mathfrak{S}_n(r)$ und $\mathfrak{T}_n(r_1)\,\mathfrak{S}_n(r)$ folgende Potenzen von λ enthalten sein werden:

$$\text{in } \mathfrak{S}_n(r_1)\,\mathfrak{S}_n(r):\ \lambda^{2n},\quad \lambda^{2n+2},\quad \lambda^{2n+4},\ \ldots$$
$$\text{in } \mathfrak{T}_n(r_1)\,\mathfrak{S}_n(r):\ \lambda^{-1},\quad \lambda,\quad \lambda^3,\quad \lambda^5,\ \ldots$$

Hieraus folgt sofort, dass das Product $\mathfrak{S}_n(r_1)\,\mathfrak{S}_n(r)$ in der Formel (f.) nicht vorkommen darf, dass also γ_n nothwendig $=0$ ist:

$$(18.)\qquad \gamma_n = 0.$$

Substituirt man jetzt in (11.) die Werthe (16.), so ergiebt sich mit Rücksicht auf (17.), (18.):

$$(19.)\qquad \begin{aligned} U &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n\, \mathfrak{S}_n(r)\, \mathfrak{S}_n(r_1)\, P_n(\mu), \quad [r \text{ und } r_1 \text{ beliebig}],\\ V &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \delta_n\, \mathfrak{S}_n(r)\, \mathfrak{T}_n(r_1)\, P_n(\mu), \quad [r < r_1], \end{aligned}$$

wo die α_n, δ_n noch *unbekannte Constanten* sind.

Um die α_n zu bestimmen, betrachten wir den *Specialfall:* $r = r_1$. Alsdann wird nach (9.): $R^2 = r^2(2 - 2\mu)$, also nach (10):

$$U = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{R^{2n}}{\Pi(2n+1)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^{2n}(2-2\mu)^n}{\Pi(2n+1)};$$

sodass also in diesem Fall die *erste* der Formeln (19.) die Gestalt annimmt:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^{2n}(2-2\mu)^n}{\Pi(2n+1)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n \, [\mathfrak{S}_n(r)]^2 P_n(\mu).$$

Denkt man sich hier beide Seiten geordnet nach *Potenzen von* μ, so wird das mit μ^n behaftete Glied auf der *linken* Seite die Gestalt haben:

$$\mu^n \left[\frac{(-2)^n}{\Pi(2n+1)} r^{2n} + \mathfrak{A} r^{2n+2} + \mathfrak{A}' r^{2n+4} + \cdots\right],$$

während gleichzeitig das mit μ^n behaftete Glied *rechter* Hand folgendermassen lauten wird:

$$\mu^n \left[\alpha_n \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi^2(n)} r^{2n} + \mathfrak{B} r^{2n+2} + \mathfrak{B}' r^{2n+4} + \cdots\right],$$

wie sich solches leicht ergiebt, falls man nur Gebrauch macht von der bekannten Formel:

$$P_n(\mu) = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi^2(n)} \mu^n + \mathfrak{C} \mu^{n-2} + \mathfrak{C}' \mu^{n-4} \cdots$$

Dabei sind unter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, ..., $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, ..., $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, ... *Constanten* zu verstehen, auf deren Werthe es nicht weiter ankommt. Da nun die genannten Glieder einander *gleich* sein müssen, so ergiebt sich, falls man in denselben die Coefficienten von r^{2n} mit einander vergleicht, die Formel:

$$\alpha_n \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi^2(n)} = \frac{(-2)^n}{\Pi(2n+1)};$$

und hieraus folgt sofort:

$$(20.) \qquad \alpha_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{2^n \Pi(n)}{\Pi(2n)}\right)^2.$$

Um ferner die δ_n zu finden, vertauschen wir in der *zweiten* Formel (19.) die Argumente r, r_1 mit λr, λr_1, wo λ wiederum einen *beliebigen positiven* Factor vorstellen soll, und erhalten in solcher Weise mit Rücksicht auf (10):

$$(\alpha.)\quad \frac{1}{\lambda R} + \frac{\lambda R}{1.2} + \frac{\lambda^3 R^3}{1.2.3.4} + \cdots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \delta_n \mathfrak{S}_n(\lambda r)\mathfrak{T}_n(\lambda r_1) P_n(\mu), \quad [r < r_1].$$

Hier hat alsdann R genau dieselbe Bedeutung wie bisher:

$$(\beta.)\qquad R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\mu}\,.$$

Nach (13.) ist aber:

$$(\gamma.)\quad \mathfrak{S}_n(\lambda r)\mathfrak{T}_n(\lambda r_1) = \frac{1}{\lambda}\frac{r^n}{r_1^{n+1}}(1 + \mathfrak{F}\lambda^2 + \mathfrak{F}'\lambda^4 + \cdots),$$

wo $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, ... gewisse Functionen von r, r_1 sind, auf deren Werthe es nicht weiter ankommt. Da nun die Formel (α.) gültig sein soll für *beliebige* Werthe des positiven Factors λ, so müssen daselbst die Coëfficienten von $\frac{1}{\lambda}$ auf beiden Seiten einander gleich sein. Hieraus folgt mit Rücksicht auf (γ.):

$$(\delta.)\qquad \frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \delta_n \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n(\mu), \quad [r < r_1].$$

Nun hat aber R die in (β.) angegebene Bedeutung; sodass also nach der bekannten *Laplace'schen Entwickelung* die Formel stattfindet:

$$(\varepsilon.)\qquad \frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n(\mu), \quad [r < r_1].$$

Aus den beiden letzten Formeln (δ.), (ε.) ersieht man jetzt sofort, dass die Constanten δ_n sämmtlich $= 1$ sind:

$$(21.)\qquad \delta_n = 1\,.$$

Die Formeln (19.) führen daher, mit Rücksicht auf (20.), (21.), zu folgendem Resultate.

Setzt man

$$(22.)\qquad R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\mu}\,,$$

und ferner:

$$(23.)\quad \begin{aligned} U &= \frac{1}{2R}(e^R - e^{-R}) = 1 + \frac{R^2}{1.2.3} + \frac{R^4}{1.2.3.4.5} + \cdots, \\ V &= \frac{1}{2R}(e^R + e^{-R}) = \frac{1}{R} + \frac{R}{1.2} + \frac{R^3}{1.2.3.4} + \cdots, \end{aligned}$$

so gelten für diese Ausdrücke U, V folgende nach den $P_n(\mu)$ fortschreitende Entwickelungen:

$$(24.)\quad \begin{aligned} U &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{2^n \Pi n}{\Pi 2n}\right)^2 \mathfrak{S}_n(r)\, \mathfrak{S}_n(r_1)\, P_n(u) \ , \\ V &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{S}_n(r)\, \mathfrak{T}_n(r_1)\, P_n(u)\, , \quad [r < r_1]\, , \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{T}_n$ die in (13.) angegebenen Functionen vorstellen.

Und zwar ist die erste der Entwickelungen (24.) ganz allgemein gültig, für beliebige Werthe von r und r_1; hingegen die zweite nur dann gültig, wenn $r < r_1$ ist.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die hier [in (23.)] angegebenen Ausdrücke U und V respective mit $\mathfrak{S}_0(R)$ und $\mathfrak{T}_0(R)$ identisch sind. Man erkennt solches direct durch Vergleichung der Formeln (23.) und (13.). Andererseits aber kann man zu den genannten Identitäten auch dadurch gelangen, dass man die Formeln (24.) auf den speciellen Fall: $r = 0$ in Anwendung bringt.

Friedrich Engel, *Zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen.* (Vorgelegt von *A. Mayer.*)

Bei verschiedenen Gelegenheiten hat Lie darauf hingewiesen, dass zwischen der Invariantentheorie und der Theorie der Transformationsgruppen ein sehr enger Zusammenhang besteht. In der That führen die Lie'schen Untersuchungen über Transformationsgruppen auf eine ganze Reihe von Problemen, zu deren Behandlung die Invariantentheorie wie geschaffen erscheint.

Das Folgende ist ein Versuch, in der angedeuteten Richtung einen Anfang zu machen und die beiden genannten Gebiete wirklich in Verbindung mit einander zu bringen. Es handelt sich dabei um das Problem, alle Zusammensetzungen von r-gliedrigen Transformationsgruppen zu bestimmen. Dasselbe ist namentlich für die Integrationstheorie von hervorragender Wichtigkeit, denn bei allen Integrationsproblemen mit bekannten Transformationsgruppen hängt die Zahl und die Ordnung der niedrigsten Resolventen nur von der Zusammensetzung der betreffenden Gruppe ab. Es ist diess ein Umstand, welchen Lie schon öfters hervorgehoben hat.

Vom invariantentheoretischen Standpunkte aus kommt nun das genannte Problem darauf hinaus, eine gewisse trilineare Form zu untersuchen, von welcher gewisse Covarianten identisch verschwinden. Wir werden zunächst die betreffende Form aufstellen. Die blosse Betrachtung und Interpretation derselben wird uns eine ganze Reihe von neuen Gesichtspunkten liefern. Jedenfalls scheint die hiermit angedeutete Untersuchungsrichtung zahlreiche und wichtige Ergebnisse zu versprechen.

§ 1.

Erklärungen. Aufstellung des Problems.

Die *Zusammensetzung* der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ ist durch die Constanten c_{iks} bestimmt, welche in den bekannten Gleichungen

$$(1) \qquad (X_i X_k) = X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} X_s f$$

auftreten. Diese Constanten genügen den Bedingungen

$$(2) \qquad c_{iks} + c_{kis} = 0$$

und ausserdem den Relationen

$$(3) \qquad C_{ikjs} = \sum_1^r {}_\nu \{c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}\} = 0$$

$$(i, k, j, s = 1 \dots r),$$

welche aus der Jacobi'schen Identität

$$(4) \qquad ((X_i X_k) X_j) + ((X_k X_j) X_i) + ((X_j X_i) X_k) = 0$$

folgen. Hat man umgekehrt ein System von Constanten c_{iks}, welches den Bedingungen (2) und (3) genügt, so giebt es immer r-gliedrige Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung (vgl. Lie, Math. Ann. XXV, S. 94).

Das System der Constanten c_{iks} wird im Allgemeinen ein anderes, wenn man die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \dots X_r f$ durch irgend r andere unabhängige Transformationen der Gruppe ersetzt, wenn man also die Xf linear transformirt. Zwei Systeme von c_{iks}, welche auf diese Weise in einander übergeführt werden können, bestimmen natürlich dieselbe Zusammensetzung. Die Aufgabe, alle möglichen Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen zu finden, kommt daher auf die Bestimmung aller Systeme von c_{iks} hinaus, welche nicht durch lineare Transformation der Xf aus einander hergeleitet werden können.

Wir interpretiren nun, wie es Lie gewöhnlich thut, die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_k X_k f$ unserer r-gliedrigen Gruppe als Punkte eines $(r-1)$fach ausgedehnten Raumes R_{r-1}. Die Grössen λ haben wir dabei als homogene

Punktcoordinaten aufzufassen, während die Xf die Rolle von homogenen Ebenencoordinaten spielen. Dass $\Sigma \lambda_k X_k f$ Symbol einer infinitesimalen Transformation ist, können wir nunmehr auch so aussprechen: $\Sigma \lambda_k X_k f = 0$ ist in Ebenencoordinaten die Gleichung des Punktes $\lambda_1 : \ldots : \lambda_r$, welcher geometrisch die betreffende Transformation darstellt.

Aus irgend zwei infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_i X_i f$ und $\Sigma \mu_k X_k f$ ergiebt sich durch Combination eine neue infinitesimale Transformation der Gruppe, nämlich:

$$(\Sigma \lambda_i X_i, \ \Sigma \mu_k X_k) = \sum_{ik}^{1 \ldots r} \lambda_i \mu_k (X_i X_k) \; .$$

Geometrisch hat diess den Sinn, dass irgend zwei Punkte unseres $(r-1)$ fachen Raumes nach einem gewissen Gesetze mit einander multiplicirt werden und als Product einen dritten Punkt des Raumes liefern. Sind zwei infinitesimale Transformationen mit einander vertauschbar, so wird das Product der entsprechenden Punkte ein unbestimmter Punkt.

Die Punkte des Raumes R_{r-1} stellen also die infinitesimalen Transformationen und insofern auch die eingliedrigen Untergruppen unserer r-gliedrigen Gruppe dar. Die *q-gliedrigen Untergruppen* werden durch gewisse lineare $(q-1)$ fache Mannigfaltigkeiten, M_{q-1}, dargestellt. Eine derartige M_{q-1} hat die Eigenschaft, dass zwei ihrer Punkte mit einander multiplicirt immer einen der M_{q-1} angehörigen Punkt liefern. Insbesondere kann der Fall eintreten, dass jeder Punkt einer M_{q-1} auch noch mit jedem Punkte des ganzen Raumes multiplicirt einen Punkt ergiebt, welcher in der M_{q-1} liegt. Jede M_{q-1} von dieser Beschaffenheit stellt eine q-gliedrige *invariante Untergruppe* dar.

Diese geometrischen Betrachtungen rühren von Lie her. Indem wir daran gehen, dieselben analytisch zu formuliren, wollen wir noch festsetzen, dass die Punktcoordinaten unseres R_{r-1} von jetzt ab $x_1 \ldots x_r$ heissen sollen, die Ebenencoordinaten: $u_1 \ldots u_r$.

Es seien $(x_1 \ldots x_r)$ und $(y_1 \ldots y_r)$ zwei Punkte des Raumes und also

$$\sum_1^r {}^i x_i u_i , \quad \sum_1^r {}^k y_k u_k$$

bezüglich ihre Symbole. Das Product dieser beiden Punkte ist ein Punkt, dessen Symbol geradezu durch Multiplication der beiden Symbole $\Sigma x_i u_i$, $\Sigma y_k u_k$ erhalten wird. Die Grössen $u_1 \dots u_r$ verhalten sich bei dieser Multiplication wie complexe Einheiten, deren Producte sich vermöge der Gleichungen

$$(u_i u_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} u_s$$

linear durch die ursprünglichen Einheiten ausdrücken. Kurz, das Symbol des Productes der Punkte (x) und (y) ist die trilineare Form:

$$(5) \qquad F = \sum_{iks}^{1 \dots r} c_{iks} x_i y_k u_s \,.$$

Anders ausgesprochen: $F = 0$ ist die Gleichung des betreffenden Punktes in Ebenencoordinaten.

Die Form F ist es nun, auf welche es uns hier ankommt. Jede solche Form, für deren Coëfficienten c_{iks} die Bedingungen (2) und (3) erfüllt sind, definirt eine Zusammensetzung. Zwei verschiedene Formen F definiren dieselbe Zusammensetzung, wenn die eine in die andere durch lineare Transformation der Veränderlichen x, y, u übergeführt werden kann.

Die ganze Aufgabe ist somit auf die invariantentheoretische Untersuchung der Form F zurückgeführt. Die Veränderlichen x, y und u bedeuten dabei homogene Punkt- bezüglich Ebenencoordinaten eines und desselben $(r - 1)$ fachen Raumes.

Für die Bedingungen (2) und (3) ergiebt sich nunmehr ein sehr einfacher Ausdruck.

Die Relationen (2) können nämlich durch die Forderung ersetzt werden, dass die Covariante

$$(6) \qquad \sum_{iks}^{1 \dots r} (c_{iks} + c_{kis}) x_i y_k u_s$$

der Form F identisch verschwinden soll. Andererseits zieht das identische Verschwinden der Covariante

$$(7) \qquad \sum_{ikjs}^{1 \dots r} C_{ikjs} x_i y_k z_j u_s$$

das Bestehen der Gleichungen (3) und also der Jacobi'schen

Identität (4) nach sich. Dass (7) wirklich eine Covariante von F ist, lässt sich ohne Schwierigkeit einsehen.

Rein invariantentheoretisch können wir somit unser Problem folgendermassen aussprechen:

Es soll das volle System von Invarianten und Covarianten der Form F aufgestellt werden unter der Voraussetzung, dass die beiden Covarianten (6) *und* (7) *identisch verschwinden.*

Das Verschwinden der Covariante (6) sagt aus, dass die x und y in F nur in den Verbindungen $x_i y_k - x_k y_i$ vorkommen, dass wir es also im Grunde nur mit einer bilinearen Form zu thun haben, welche ein System Linien- und ein System Ebenencoordinaten enthält.

Aus dem Verschwinden von (7) lässt sich schliessen, dass die drei Punkte, welche durch die symbolischen Producte $((xy)z)$, $((yz)x)$, $((zx)y)$ dargestellt werden, auf einer geraden Linie liegen.

Im Folgenden wird immer vorausgesetzt, dass die Covarianten (6) *und* (7) *identisch verschwinden.*

§ 2.

Interpretation der auftretenden Form.

Setzen wir die Form

$$\Phi = \sum_{iks}^{1\ldots r} c_{iks}\, x_i z_k u_s$$

gleich Null, so wird jedem Punkte $(z_1 \ldots z_r)$ unseres R_{r-1} eine Collineation zugeordnet. Diese Collineation führt jeden Punkt (x) in den Punkt über, welcher sich durch Multiplication von (x) mit (z) ergiebt; sie ist ausgeartet, denn dem Punkte (z) selbst ordnet sie keinen bestimmten Punkt zu, sie verschwindet ja identisch für $x_i = z_i$.

Aber die besprochene *endliche* Collineation lässt sich auch als Symbol einer *infinitesimalen* Collineation betrachten, derjenigen nämlich, welche durch die Gleichung

$$\sum_1^r x_i u_i + \delta t \sum_{iks}^{1\ldots r} c_{iks}\, x_i z_k u_s = 0$$

bestimmt ist. Schreiben wir diese Collineation in aufgelöster Form und zwar in Punktcoordinaten, so haben wir:

$$x_i' = x_i + \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\,\delta t; \tag{8}$$

schreiben wir sie dagegen in den zugehörigen Ebenencoordinaten, so erscheint sie in der Gestalt:

$$u_i' = u_i - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\,\delta t. \tag{9}$$

Lie hat diese Schaar von infinitesimalen Collineationen auf anderem Wege gefunden und von ihr bewiesen, dass sie eine projectivische Gruppe erzeugt, welche mit der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ isomorph ist (vgl. Lie, Math. Annalen XXV, S. 93); sie möge die *adjungirte Gruppe* der letzteren heissen.

Wir behaupten nun, dass *jede infinitesimale Transformation der adjungirten Gruppe die Form* (5) *invariant lässt.* Zum Beweise berechnen wir das Increment, welches diese Form bei der infinitesimalen Collineation (8), (9) erhält; wir finden:

$$\delta t \sum_{ikjs}^{1\dots r} c_{ikjs}\, x_i\, y_k\, z_j\, u_s\,.$$

Hier ist aber der Factor von δt genau die Covariante (7), welche nach Voraussetzung identisch verschwindet; damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Jeder Punkt des Raumes R_{r-1} stellt eine infinitesimale Transformation der adjungirten Gruppe dar und bleibt bei dieser Transformation invariant. Eine lineare M_{q-1}, welche alle infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe gestattet, die zu ihren ∞^{q-1} Punkten gehören, stellt eine *q-gliedrige Untergruppe* der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ dar. Gestattet die M_{q-1} überhaupt alle infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe, so stellt sie eine *invariante Untergruppe* dar.

Verbinden wir diese von Lie herrührenden Sätze mit dem oben aufgestellten, dass die Form F alle Transformationen der adjungirten Gruppe gestattet, so erhalten wir den Satz:

Jede lineare Mannigfaltigkeit des R_{r-1}, welche eine Covariante der Form F ist, stellt eine invariante Untergruppe der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ dar.

Die betreffende Mannigfaltigkeit gestattet nämlich alle Collineationen, welche die Form F zulässt, insbesondere gestattet

sie daher alle infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe.

Eine *einfache* Gruppe, d. h. eine *ohne invariante Untergruppen*, würde daher invariantentheoretisch dadurch zu charakterisiren sein, dass zu der entsprechenden Form F kein covarianter Punkt, keine covariante Gerade, überhaupt keine covariante lineare Mannigfaltigkeit gehört.

Die Form

$$(10) \qquad \sum_1^r{}_k \frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial u_k} = \sum_1^r{}_i x_i \sum_1^r{}_k c_{ikk}$$

ist eine Covariante von F. Gleich Null gesetzt, stellt sie eine covariante lineare M_{r-2} und in Folge dessen eine invariante $(r-1)$gliedrige Untergruppe dar (vgl. Lie, Archiv for Math. og Naturvid. X, S. 88 f.). Wäre also die Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ einfach, so müssten alle Ausdrücke $\sum_k c_{ikk}$ verschwinden.

Setzen wir die Coordinaten der covarianten M_{r-2} in die Gleichung $F = 0$ ein, so erhalten wir einen covarianten linearen Complex, nämlich:

$$(11) \qquad \sum_{ik}^{1\dots r} x_i y_k \sum_{s\nu}^{1\dots r} c_{iks} c_{s\nu\nu} = 0 .$$

Der Pol unserer M_{r-2} in Bezug auf diesen Complex würde ein covarianter Punkt sein, aber es zeigt sich, dass der Complex (11) in Folge der Jacobi'schen Identität verschwindet. Bilden wir nämlich von der Form (7) die Covariante $\Sigma \frac{\partial^2}{\partial z_s \partial u_s}$, welche natürlich auch identisch verschwindet, so erhalten wir den verschwindenden linearen Complex:

$$\sum_{ik}^{1\dots r} x_i y_k \sum_1^r{}_s c_{ikss} = 0 .$$

Diess aber ist genau der oben gefundene, wie aus den leicht zu verificirenden Gleichungen

$$(12)\qquad \sum_1^r {}_s\, c_{ikss} = \sum_1^r {}_\nu\, c_{ik\nu} \sum_1^r {}_s\, c_{\nu ss} = 0$$
$$(i,\, k = 1 \ldots r)$$

hervorgeht.

Die Gleichungen (12) liefern uns einen directen Beweis eines zuerst von Killing bemerkten Satzes (vgl. Killing, Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen § 4. Braunsberg 1886). Aus (12) folgt nämlich unmittelbar: entweder müssen die r Gleichungen

$$\sum_1^r {}_s\, c_{\nu ss} = 0 \quad (\nu = 1 \ldots r)$$

befriedigt sein oder es müssen alle r-gliedrigen Determinanten verschwinden, deren Horizontalreihen die Form

$$| \, c_{ik1} \cdots c_{ikr} \, |$$

haben. Letzteres ist die Bedingung dafür, dass die von Killing a. a. O. definirte Zahl p kleiner als r ist.

An dieser Stelle wird es vielleicht passend sein, wenigstens anzudeuten, wie sich die Untersuchung der Form F in dem interessanten und doch immer noch einfachen Falle $r = 3$ gestaltet.

Für $r = 3$ wird die Form F eine bilineare Form in Liniencoordinaten der Ebene und stellt somit eine Reciprocität dar. Zu dieser Reciprocität gehört eine covariante Gerade, eben die früher besprochene lineare M_{r-2} (vgl. (10)) und ausserdem eine covariante Curve zweiter Klasse. Die Jacobi'sche Identität verlangt, dass der Punkt (11), welchen die Reprocität der covarianten Geraden zuordnet, identisch verschwindet. Es sind daher zwei Hauptfälle zu unterscheiden: *Erstens* die Curve zweiter Klasse ist nicht ausgeartet, dann muss die besprochene Gerade identisch verschwinden und die Reciprocität ist ein Polarsystem. Ist dagegen *zweitens* die Curve zweiter Klasse ausgeartet, so braucht die covariante Gerade nicht zu verschwinden. Eine Reihe Unterfälle können da noch eintreten, denn die Curve zweiter Klasse kann sich entweder auf ein Punktepaar oder auf einen doppeltzählenden Punkt reduciren oder sie kann endlich identisch verschwinden. Zu allen diesen Fällen gehören Typen von Zusammensetzungen dreigliedriger Gruppen.

§ 3.

Sätze über zwei-, drei- und viergliedrige Untergruppen.

Wird die Form F als eine bilineare Form mit einem Systeme Linien- und einem Systeme Ebenencoordinaten aufgefasst, so ordnet sie, gleich Null gesetzt, jeder Geraden einen Punkt zu. Liegt zufällig dieser zugeordnete Punkt auf der Geraden oder wird er unbestimmt, so stellt die Gerade eine zweigliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ dar.

Nun giebt es im R_{r-1} ∞^{2r-4} Gerade und zu jeder gehört einer von den ∞^{r-1} Punkten des R_{r-1}. Soll dieser Punkt auf der Geraden liegen, so sind das $r-2$ Bedingungen, soll er unbestimmt werden, so sind das r; die erste Forderung ist daher mindestens für ∞^{r-2} Gerade erfüllt, die zweite für mindestens ∞^{r-4}; von den betreffenden ∞^{r-2} Geraden geht überdiess durch jeden Punkt des R_{r-1} mindestens eine. Also gilt der Satz:

Satz. *Jede r-gliedrige Gruppe enthält wenigstens ∞^{r-2} zweigliedrige Untergruppen, worunter sicher ∞^{r-4} mit vertauschbaren infinitesimalen Transformationen. Jede eingliedrige Untergruppe ist in einer zweigliedrigen enthalten.*

Wohl zu bemerken ist, dass auch für $r = 4$ sicher vertauschbare infinitesimale Transformationen in der Gruppe enthalten sind.

Die Existenz von zweigliedrigen Untergruppen hat Lie auf anderem Wege bewiesen (vgl. Archiv for Math. og Naturvid. I, Abh. II am Ende). Den wichtigen Satz, dass jede Gruppe mit mehr als drei Parametern sicher vertauschbare infinitesimale Transformationen enthält, hat Killing zuerst aufgestellt, ohne den Beweis mitzutheilen (vgl. den § 3 seiner »Erweiterung des Raumbegriffes«, Braunsberg 1884).

Lie hat weiter bewiesen (aber bisher ist der Beweis noch nicht veröffentlicht), dass innerhalb einer r-gliedrigen Gruppe jede zweigliedrige Untergruppe in einer dreigliedrigen enthalten ist.

Berücksichtigen wir aber den Umstand, dass es in jeder Gruppe mit mehr als drei Parametern vertauschbare infinitesimale Transformationen giebt, so können wir noch einen Schritt weiter gehen. Wir können zeigen, dass in jeder Gruppe mit

mehr als vier Parametern viergliedrige Untergruppen existiren. Zum Beweise dieses wichtigen Satzes führt uns genau dieselbe Methode, deren sich Lie bei dem noch nicht veröffentlichten Beweise für die Existenz von dreigliedrigen Untergruppen bedient hat.

Es seien $C_1 f \dots C_r f$ die infinitesimalen Transformationen der zu $X_1 f \dots X_r f$ gehörigen adjungirten Gruppe (siehe (8) und (9)) und also:

$$(C_i C_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} C_s f .$$

Jedem Punkte $z_1 \dots z_r$ ist eine infinitesimale Transformation (Collineation) der adjungirten Gruppe zugeordnet, nämlich:

$$z_1 C_1 f + \cdots + z_r C_r f ,$$

wir können daher diesen Ausdruck geradezu als Symbol des Punktes $z_1 \dots z_r$ ansehen. Führen wir auf den Punkt $(z_1 \dots z_r)$ die infinitesimale Collineation $C_i f$ aus, so geht derselbe in einen Punkt über, dessen Symbol ist:

$$\sum_1^r {}_k\, z_k C_k f + \delta t \sum_1^r {}_k\, z_k (C_i C_k) .$$

Wenn daher insbesondere die beiden infinitesimalen Collineationen $C_i f$ und $\Sigma z_k C_k f$ mit einander vertauschbar sind, so lässt $C_i f$ den Punkt $(z_1 \dots z_r)$ invariant.

Denken wir uns jetzt $(r > 3)$ die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe so gewählt, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ miteinander vertauschbar sind. $C_1 f$ und $C_2 f$ sind es da natürlich auch. Alle infinitesimalen Collineationen von der Form $z_1 C_1 f + z_2 C_2 f$ werden dann durch die Punkte einer Geraden dargestellt und zwar lässt jede solche infinitesimale Collineation alle Punkte der betreffenden Geraden stehen.

Nun transformiren wir den ganzen Raum R_{r-1} vermittelst der projectivischen Gruppe, welche von den ∞^1 infinitesimalen Transformationen $z_1 C_1 f + z_2 C_2 f$ erzeugt wird. Dabei bleibt die besprochene Gerade invariant, aber die ∞^{r-3} linearen M_2, welche durch dieselbe hindurchgehen, werden unter einander vertauscht und zwar durch eine projectivische Gruppe, die im Allgemeinen zwei, unter Umständen aber auch weniger Parameter enthält. Eine zweigliedrige projectivische Gruppe des

Raumes von n Dimensionen lässt aber sicher einen Punkt invariant. Wenden wir diess auf unseren Fall an, so erkennen wir, dass von den eben erwähnten ∞^{r-3} linearen M_2 sicher eine stehen bleibt.

Irgend ein Punkt $(z_1' \dots z_r')$ der invarianten M_2 bewegt sich dann bei allen infinitesimalen Transformationen $z_1 C_1 f + z_2 C_2 f$ auf dieser M_2. Analytisch ausgedrückt: zwischen $C_1 f$, $C_2 f$ und

$$C' f = \sum_1^r{}_k \, z_k' C_k f$$

bestehen Beziehungen von der Form:

$$\begin{aligned}(C_1 C') &= \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C' \\ (C_2 C') &= \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C'.\end{aligned}$$

Kurz, die lineare M_2, welche durch die drei Punkte $C_1 f$, $C_2 f$, $C' f$ bestimmt ist, stellt eine dreigliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ dar.

Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, dass $C' f$ eben die infinitesimale Transformation $C_3 f$ ist. Ausserdem setzen wir noch $r > 3$ voraus.

Nunmehr transformiren wir die Punkte unseres R_{r-1} durch die ∞^2 infinitesimalen Collineationen $z_1 C_1 f + z_2 C_2 f + z_3 C_3 f$. Dabei bleibt die eben definirte lineare M_2 stehen, hingegen werden die ∞^{r-4} hindurchgehenden linearen M_3 unter einander vertauscht und zwar durch eine projectivische Gruppe mit drei oder weniger Parametern.

Es ist klar, dass wenigstens eine von diesen linearen M_3 fest bleibt. Denn auch gesetzt die besprochene projectivische Gruppe wäre dreigliedrig: sie enthält, wie wir wissen, zwei vertauschbare infinitesimale Transformationen, es giebt daher in ihr eine zweigliedrige invariante Untergruppe; eine solche dreigliedrige projectivische Gruppe des Raumes von n Dimensionen lässt aber sicher einen Punkt invariant.

Ist $(\bar{z}_1 \dots \bar{z}_r)$ ein Punkt der invarianten M_3 und setzen wir zur Abkürzung

$$\sum_1^r{}_k \, \bar{z}_k C_k f = \bar{C} f,$$

so bestehen offenbar Relationen von der Form

$$(C_i \bar{C}) = \gamma_{i1} C_1 + \gamma_{i2} C_2 + \gamma_{i3} C_3 + \gamma_{i4} \bar{C}$$
$$(i = 1, 2, 3) ,$$

d. h. die betreffende M_3 stellt eine viergliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ dar. Dieses Ergebniss können wir folgendermassen aussprechen:

Satz. *Jede Gruppe mit mehr als vier Parametern enthält viergliedrige Untergruppen und zwar ist jede zweigliedrige Untergruppe, deren infinitesimale Transformationen vertauschbar sind, in einer viergliedrigen enthalten.*

Man kann nicht so ohne Weiteres in derselben Weise die Existenz von fünfgliedrigen Untergruppen erschliessen. Zwar enthält jede viergliedrige Gruppe eine invariante dreigliedrige Untergruppe, aber diese letztere braucht nicht nothwendig eine invariante zweigliedrige Untergruppe zu enthalten. Immerhin wird sich wohl ein dem vorhergehenden entsprechender allgemeiner Satz auch über fünfgliedrige Untergruppen aufstellen lassen.

Der eben gefundene Satz ist namentlich deswegen von Wichtigkeit, weil sich mit Hülfe desselben nachweisen lässt, *dass es keine einfache siebengliedrige Gruppe giebt.* Bisher hatte Lie nur nachgewiesen, dass eine einfache vier-, fünf- oder sechsgliedrige Gruppe nicht existirt.

Die grösste Untergruppe einer siebengliedrigen Gruppe enthält nämlich nach unserem Satze entweder sechs oder fünf oder vier Parameter. Lie hat aber gezeigt (Math. Ann. XXV, S. 132, 134), dass eine einfache r-gliedrige Gruppe, deren grösste Untergruppe mehr als $r-4$ Parameter enthält, entweder drei oder acht oder zehn oder endlich fünfzehn Parameter hat. Der Fall $r = 7$ ist somit ausgeschlossen.

Dr. W. von Tchisch (St. Petersburg), *Untersuchungen zur Anatomie der Grosshirnganglien des Menschen.* (Mitgetheilt von *Paul Flechsig.*[1])

Das Hauptobject dieser im Laboratorium der Irrenklinik zu Leipzig angestellten Untersuchungen bildeten in Chromsalzen erhärtete Gehirne Erwachsener, deren Ganglien irgendwie auffällige krankhafte Veränderungen nicht darboten. Zur Controle wurden menschliche Fötus und Neugeborene, sowie Gehirne Erwachsener mit grösseren Herderkrankungen und secundären Degenerationen herbeigezogen. Die in verschiedenen Richtungen (frontal, sagittal, horizontal etc.) angelegten möglichst lückenlosen Schnittreihen wurden mit Hämatoxylin nach Weigert's älterer Methode gefärbt, wobei es gelang, auch die feinsten nervösen Fasernetze der Grosshirnganglien klar darzustellen.

1) Sehhügel.

Die seit Burdach übliche Eintheilung des Thalamus opticus in drei »Kerne«, einen oberen, äusseren und inneren, entspricht nur unvollkommen den thatsächlichen Verhältnissen und bedarf demgemäss der Berichtigung. Der innere Kern Burdach's und das von Diesem zum äusseren Kern gerechnete Pulvinar fliessen nicht nur, wie insbesondere Horizontalschnitte aus höheren Ebenen des Sehhügels lehren, ohne scharfe Grenze in einander, sondern bieten überdies ein so übereinstimmendes Verhalten bezüglich ihrer Verbindungen mit anderen Theilen der Centralorgane dar, dass es sich empfiehlt, beide unter

---

1) Vorgetragen in d. Sitzung d. math.-phys. Classe v. 8. Febr. 1886, das Manuscript eingeliefert in d. Sitzg. v. 8. März.

einem Namen zusammen zu fassen. Sie bilden an Masse weitaus den grössten Theil des Sehhügels, weshalb die Bezeichnung »*Hauptkern*« des Thalamus am Platze sein dürfte. Charakteristisch für den Hauptkern, insbesondere dem »äusseren Kern« Burdach's abzüglich (!) des Pulvinar gegenüber, ist die *ausgiebige Verbindung mit der Grosshirnrinde* und der Mangel umfänglicher directer Leitungsbahnen zum Grosshirnschenkel bez. zu peripheren Apparaten. Der grösste Theil der Stabkranzbündel des Thalamus dringt in den Hauptkern ein und gelangt hier bis zu einem Gebiet, welches den Namen »*Centralgebiet des Hauptkerns*« führen möge. Dasselbe liegt ungefähr in der Mitte zwischen vorderem und hinterem Sehhügelrand, annähernd gleichweit entfernt von den Spitzen des Hinterhaupts- und Stirnlappens. Im Centralgebiet des Hauptkerns lösen sich die von allen Seiten her zuströmenden Stabkranzbündel auf, sodass innerhalb des fraglichen Gebiets nur ein dichtes Netzwerk markhaltiger Fäserchen angetroffen wird, neben welchem irgendwie compactere Fasermassen vom Charakter der Stabkranzbündel nicht zu finden sind. In den peripheren Zonen des Hauptkerns hingegen treten mit gegen die Peripherie zunehmender Mächtigkeit mehr und mehr markhaltige parallelfasrige Züge in den Vordergrund, welche sich in den Stabkranz verfolgen lassen — dazwischen ein örtlich an Dichte wechselndes Maschenwerk von feinen und stärkeren markhaltigen Fasern. Das Centralgebiet des Hauptkerns steht nun (wie insbesondere auch durch das Studium der secundären Degenerationen bei Rindenherden bewiesen wird) nicht nur mit *allen* Lappen bez. Windungsgebieten des Grosshirns, sondern auch (durch Linsenkernschlinge und »unteren Sehhügelstiel«) mit dem *Streifenhügel* (s. u.) in ausgiebigster Verbindung. Ueberdies gehen aus dem Centralgebiet des Hauptkerns Fasern hervor, welche sich der Taenia thalami optici [1]), sowie dem *centralen Höhlengrau des dritten Ventrikels* zugesellen. *Hiernach nimmt das Centralgebiet des Hauptkerns des Sehhügels eine ganz eigenartige Stellung in der Gesammtorganisation des Vorderhirns ein, indem es mit allen grauen Massen desselben in Verbindung tritt.* — Der

1) Möglicherweise gehen die Fasern der Taenia thalami optici *überwiegend direct* aus dem Stabkranz hervor, verbinden sich also nicht mit der Substanz des Thalamus.

»*obere*« Kern des Sehhügels unterscheidet sich vom Hauptkern durch den Besitz eines dichteren markhaltigen Fasernetzes, aus welchem u. A. auch das Vicq d'Azyr'sche Bündel zum grössten Theil hervorgeht. Die Netze des oberen und Hauptkerns hängen innig zusammen. — Das der inneren Kapsel anliegende Gebiet des Sehhügels, welches dem äusseren Kern der Autoren abzüglich des Pulvinars entspricht und den Namen »äusserer Kern« behalten möge, nimmt eine besondere Stellung insofern ein, als hier zahlreiche Fasern *aus dem Grosshirnschenkel* eintreten, welche zum grösseren Theil aus dem rothen Kern der Haube hervorgehen und eine Verknüpfung von Sehhügel und *Kleinhirn* etc. vermitteln. Auch einzelne Fasern der *Schleifenschicht* dringen (s. u.) bis zum äusseren Kern des Sehhügels vor, desgleichen Stabkranzfasern, welche überwiegend aus dem Scheitelhirn und den Centralwindungen hervorzugehen scheinen. Endlich lassen sich auch zahlreiche Faserbündel vom *Tractus opticus* und *äusseren Kniehöcker* her bis in den äusseren Kern verfolgen, in welch letzterem sie parallel der inneren Kapsel bis zur Oberfläche des Sehhügels aufsteigen. Durch das Zusammentreffen dieser, aus Grosshirnschenkel und Tractus opticus hervorgehenden Bündel entsteht im äusseren Kern ein ungemein dichtes engmaschiges Netzwerk markhaltiger Fasern, in welches überdies zahlreiche Stabkranzbündel, welche theils im äusseren Kern enden, theils ihn nur durchziehen, eingelagert sind. Die weisse Substanz überwiegt demgemäss im äusseren Kern gegenüber der grauen erheblich, während im Centralgebiet des Hauptkerns das umgekehrte Verhalten zu Tage tritt.

Zwischen Hauptkern und äusserem Kern liegt als theilweise wohlabgegrenzte Masse das *Centre médian* von Luys. Auf Horizontalschnitten aus höheren Ebenen erscheint es ziemlich genau in der Mitte des Sehhügels. In den basalen Regionen rückt es mehr gegen den inneren Sehhügelrand und schiebt sich ein zwischen den vorderen und hinteren Abschnitt des Hauptkerns d. i. zwischen den inneren Kern im Sinne Burdach's und das Pulvinar — worauf die von Burdach gegebene Eintheilung des Sehhügels zurückzuführen ist. Indess sind auch in den basalen Sehhügelbezirken der vordere und hintere Abschnitt des Hauptkerns nicht völlig getrennt, sondern durch Brücken grauer Substanz verbunden, da das Centre médian nirgends bis an die mediale Fläche des Thalamus heranreicht. In das Centre médian

dringt von unten her eine Fortsetzung der *Schleifenschicht* ein und zwar, wie das Studium des fötalen Gehirns lehrt, ein Faserzug, welcher nach abwärts mit den Kernen der zarten Stränge und somit indirect mit den Hinter- (Goll'schen) Strängen des Rückenmarkes zusammenhängt. Fraglich ist, ob die Mehrzahl dieser Bündel im Centre médian ein Ende findet; ein Theil überschreitet sicher die äussere Grenze des letzteren und geht in den äusseren Kern des Sehhügels über. Nach innen gehen aus dem Centre médian zahlreiche Fasernetze hervor, welche sich in das centrale Höhlengrau, besonders in der Umgebung des Meynert'schen Bündels einsenken. An nach vorn geneigten Frontalschnitten gelingt es, diese Netze im Höhlengrau des Aquaeductus Sylvii bis unmittelbar an die Oculomotorius-Kerne heran zu verfolgen. Auch Stabkranzbündel dringen in das Centre médian ein, welche darin zu enden scheinen; sie kommen überwiegend aus der Gegend des Scheitel- und Hinterhauptslappens.

Zwischen dem Centre médian und den vom rothen Kern der Haube zum äusseren Kern ziehenden Bündeln sondert sich eine weitere, ziemlich markarme Masse grauer Substanz, in Gestalt einer gekrümmten, das Centre médian an der Basis schalenförmig umhüllenden Platte. Die Scheide zwischen diesem »*schalenförmigen Körper*« und dem Centre médian wird gebildet durch eine Marklamelle, welche aus der Grosshirnschenkelhaube bez. dem anliegenden centralen Höhlengrau hervorgeht. Im Centre médian, wie im schalenförmigen Körper finden sich neben Faserbündeln feine markhaltige Fasernetze, welche ohne scharfe Grenze in einander übergehen, wie denn überhaupt die Nervenfasernetze aller Bezirke des Sehhügels durch dessen ganze Ausdehnung hindurch ununterbrochen zusammenhängen. Eigenthümlich sind den einzelnen »Kernen« nur die besonderen Beziehungen zu den von aussen in den Sehhügel eintretenden Leitungsbahnen, bez. Systemen.

2) Streifenhügel.

Im Linsenkern zeigt das dritte Glied (Putamen) andere Structurverhältnisse, als das zweite und erste Glied (Globus pallidus). Durchaus mit dem Putamen übereinstimmend ver-

hält sich der Nucleus caudatus, sodass beide zweckmässig als Streifenhügel dem Globus pallidus gegenüber gestellt werden.

Im »*Streifenhügel*« (in diesem Sinn) lassen sich zwei Arten von Fasern unterscheiden: 1) parallelfaserige Bündel von sehr geringem Markgehalt, welche von einzelnen stärkeren markhaltigen Fasern begleitet, streckenweise förmlich umsponnen werden; 2) Fasernetze, welche überwiegend aus stärkeren markhaltigen Fäserchen bestehen. Die ersteren entstehen aus der grauen Substanz des Putamen und Nucleus caudatus und ziehen meist radiär zur convexen Oberfläche dieser Massen gegen die innere Kapsel und in den Globus pallidus. Die in letzteren eingetretenen Züge entziehen sich darin zum grösseren Theil der weiteren Verfolgung, so dass es vorläufig unentschieden bleiben muss, in wie weit sie mit den Ganglienzellen des Globus pallidus Verbindungen eingehen bez. sich in letzterem in markhaltige Faserzüge von stärkerem Kaliber umwandeln (s. u.). Ein Theil der markarmen parallelfasrigen Züge des Streifenhügels dringt unverändert bis zur inneren Kapsel vor; dieselben liegen in höheren Schnittebenen zumeist längs dem Innenrand des ersten Linsenkerngliedes an der *äusseren* Fläche der Kapsel; weiter nach abwärts ziehen sie quer durch die Kapsel (zwischen den aus der Grosshirnrinde zum Fuss des Hirnschenkels vorlaufenden Bündeln) hindurch und gelangen so auf die mediale Fläche der Kapsel. Sie gehen in den Grosshirnschenkelfuss über und zwar in dessen obere Etage, wo sie sich zum Theil in den inneren zwei Dritteln der Substantia nigra verlieren, zum Theil in die Schleifenschicht der Brücke gelangen (medialer feinfaseriger Theil der Schleifenschicht). Ein weiterer Theil zieht gegen das tiefliegende Mark des vorderen Vierhügels. — Die stärkeren markhaltigen Elemente der parallelfaserigen Bündel des Streifenhügels lassen sich zum grossen Theil in den Sehhügel (Hauptkern) verfolgen, ein Theil verliert sich im Globus pallidus (s. u.). Vom Hemisphärenmark her dringen nur ganz vereinzelte compactere Faserzüge in den Streifenhügel ein; sie verbleiben nicht in letzterem, sondern ziehen weiter in den Globus pallidus und von da aus in die Capsula interna. Dagegen senken sich von der äusseren Kapsel her zahlreiche, *vereinzelt* laufende markhaltige Fäserchen in das Putamen ein, wo sie sich sofort an der Bildung des feinen Netzwerks betheiligen, welches das ganze Putamen durchsetzt.

In dieses Netz lösen sich auch die stärkeren Fasern der parallelfaserigen Bündel auf. In gleicher Weise dringen von der Oberfläche des Nucleus caudatus her (insbesondere an der dem Hemisphärenmark zugekehrten Seite und längs der Stria cornea) markhaltige Fäserchen in dieses Ganglion ein. Stabkranzbündel von der Compactheit der in Sehhügel und innere Kapsel eintretenden lösen sich nicht im Streifenhügel selbst auf; letzterer besitzt also nicht eine *morphologisch* als Stabkranz zu bezeichnende Verbindung mit der Hirnrinde. Die zahlreichen Fäserchen an der Oberfläche von Putamen und Schwanzkern kommen indess wohl zweifellos meist aus der Grosshirnrinde (auch durch den Balken?), insbesondere aus basalen Bezirken, da die äussere Kapsel sowohl als die Stria cornea zu letzteren in Beziehung stehen.

Im *Globus pallidus* des Linsenkerns herrschen neben den aus dem Streifenhügel eingetretenen feinen, sehr markarmen radiären Bündeln Faserzüge stärkeren Kalibers vor, welche vorwiegend in zwei Richtungen verlaufen: 1) radiär, 2) concentrisch zur Aussenfläche des zweiten Linsenkerngliedes. Beide Fasergattungen verlaufen in Form theils parallelfaseriger, durch deutliche Markscheiden charakterisirter Bündel, theils weitmaschiger Netze. Sie treten von drei verschiedenen Richtungen her in den Globus pallidus ein 1) durch die innere Kapsel aus dem Stabkranz, meist auf dem Weg der äusseren Lamina medullaris, 2) vom Streifenhügel her (aus den parallelfaserigen Bündeln, 3) aus der Regio subthalamica und dem Sehhügel. Die ersteren Faserbündel, welche zum Theil (alle?) den Globus pallidus durchziehen, *ohne* sich mit demselben zu verbinden, sind offenbar weit weniger zahlreich, als die Stabkranzfasern des Sehhügels; es konnte nicht sicher ermittelt werden, ob nur von einzelnen oder allen Windungsbezirken des Grosshirns her Stabkranzfasern in den Globus pallidus eintreten. Die zur Regio subthalamica und zum Sehhügel ziehenden Fasern des letzteren durchqueren bez. umgürten die innere Kapsel. Besonders zahlreich sind zum Luys'schen Körper ziehende Bündel, andere gehen zum rothen Kern der Haube, zur grossen Olive des verlängerten Markes etc., worüber später ausführlicher berichtet werden wird. Ein Faserbündelchen schlüpft unter dem Luys'schen Körper hindurch und gelangt in den Hirnschenkelfuss und von da in die Schleifenschicht der

Brücke u. s. w. (Vergl. diese Berichte 1885, S. 242.) Unentschieden muss es vorläufig bleiben, ob und in welcher Weise die im Globus pallidus zusammentreffenden Faserzüge mit einander sich verbinden. Mit Sicherheit zu verwerfen ist jedoch schon im Hinblick auf die grosse Anzahl der in Rede stehenden Systeme die Ansicht Meynert's, dass der Globus pallidus als Internodium eines zwischen Grosshirnrinde und Peripherie eingeschalteten Leitungssystems (»Projectionssystems«) aufzufassen sei.

SITZUNG AM 2. MAI 1886.

Ludwig Scheeffer †, *Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln.* Aus seinen hinterlassenen Papieren mitgetheilt von *A. Mayer.*[1])

§ 1.

Functionen einer Veränderlichen.

Um festzustellen, ob eine Function einer Veränderlichen, $f(x)$, deren erste Ableitung für $x = 0$ verschwindet, an dieser Stelle ein Maximum oder Minimum besitzt, verfährt man bekanntlich folgendermassen. Man bildet die höheren Ableitungen $f''(x)$, $f'''(x)$, ... Ist n die Ordnung der ersten unter denselben, welche für $x = 0$ einen von Null verschiedenen Werth annimmt, so wird, wenn wir noch der Kürze wegen $f(0) = 0$ voraussetzen, nach Lagrange:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n!} x^n, \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Dann kann man (vorausgesetzt, dass $f^{(n)}(x)$ eine stetige Func-

[1]) Die vorliegende Arbeit ist entstanden in der kurzen Zeit von Mitte Februar bis Mitte März 1885 (vgl. die Anmerkung zu § 2). Sie war jedoch noch nicht bis zur Reinschrift gediehen, als Scheeffer seine italienische Reise antrat, von der er den Todeskeim mit nach Hause zurückbringen sollte. Nach seinen Briefen hatte die Abhandlung jedenfalls noch nicht eine solche Abrundung erhalten, mit der er vollständig zufrieden gewesen wäre. Denn er spricht mehrmals davon, sie mir (wozu er selbst leider nicht mehr kam) baldmöglichst zu schicken, um zu erfahren, was ein Anderer an der Darstellung auszusetzen fände. Ich habe mich daher auch nicht vollkommen streng an das Manuscript gehalten; doch sind grössere Aenderungen nur in § 7 von Nr. 3 an vorgenommen worden, und auch diese kommen der Hauptsache nach auf blosse Umstellungen zurück. Ueberall sonst findet man, bis auf ganz geringfügige Correcturen und Zusätze, den Wortlaut der Originalarbeit. *A. Mayer.*

tion ist) für den absoluten Werth von x eine obere Grenze g so bestimmen, dass, so lange $-g < x < g$ ist, $f^{(n)}(\vartheta x)$ jedenfalls das Vorzeichen von $f^{(n)}(0)$ hat. Ist nun n eine ungerade Zahl, so wechselt die rechte Seite der Gleichung (1) mit x das Vorzeichen, die Function $f(x)$ kann also für beliebig kleine Argumente x sowohl positiv als negativ werden und es findet aus diesem Grunde weder ein Maximum noch ein Minimum statt. Ist dagegen n eine gerade Zahl, so hat die rechte Seite immer das Vorzeichen von $f^{(n)}(\vartheta x)$, welches für alle Argumente x zwischen $-g$ und $+g$ mit dem Vorzeichen von $f^{(n)}(0)$ übereinstimmt; das Gleiche gilt daher von der Function $f(x)$ und es findet also für $x = 0$ ein Maximum oder Minimum statt, je nachdem $f^{(n)}(0)$ negativ oder positiv ist.

Wir bemerken, dass die Gültigkeit der vorstehenden Deduction nicht von der Entwickelbarkeit der Function $f(x)$ abhängt. Vielmehr gelten alle Schlüsse unbedingt, sobald sämmtliche Ableitungen von $f(x)$ (eigentlich sogar nur die n ersten) in der Umgebung der Stelle $x = 0$ endlich und stetig sind. Das aufgestellte Kriterium bleibt daher beispielsweise auch für die Function

$$f(x) = x^2 - e^{-\frac{1}{x^2}}$$

richtig, obschon dieselbe nicht nach Potenzen von x entwickelt werden kann. Die beiden ersten Ableitungen sind hier stetige Functionen, ausserdem ist $f''(0)$ positiv $(= 2)$; daraus folgt ohne Bedenken, dass ein Minimum eintritt.

Das Kriterium versagt bei Functionen mit durchaus endlichen und stetigen Ableitungen nur dann, wenn für $x = 0$ gleichzeitig die sämmtlichen Ableitungen verschwinden, wie dies bei den Functionen $e^{-\frac{1}{x^2}}$ und $xe^{-\frac{1}{x^2}}$ der Fall ist. Die erste dieser beiden Functionen hat an der Stelle $x = 0$ ein Minimum, die zweite weder ein Minimum noch ein Maximum; aber die Veränderung *beider* Functionen ist in der Umgebung des Punktes $x = 0$ eine so langsame, dass sie in der Potenzentwickelung (1) überhaupt nicht zum Ausdrucke gelangt. Das Kriterium führt daher in diesem Falle nicht gerade zu falschen Resultaten, aber es lässt doch die Frage nach dem Maximum oder Minimum gänzlich offen, welches Verhalten wir eben mit den Worten »das Kriterium versagt« ausdrücken wollten.

Man kann den Unterschied solcher Functionen, welche für $x = 0$ sämmtliche Ableitungen gleich Null haben und aus diesem Grunde dem allgemeinen Kriterium unzugänglich sind, von den gewöhnlichen Functionen, auf welche dasselbe anwendbar ist, auch ohne Bezugnahme auf die *Ableitungen* folgendermassen charakterisiren:

Bei den gewöhnlichen Functionen geht die Werthänderung in der Umgebung der Stelle $x = 0$ nach beiden Seiten rascher vor sich, als die Aenderung einer angebbaren Potenz ax^n, d. h. es lassen sich positive Zahlen a, n, g so angeben, dass für alle Werthe von x zwischen $-g$ und $+g$ der absolute Betrag der Function $f(x)$ *grösser* als der von ax^n ist, ausgenommen den einzigen Werth $x = 0$, für den $f(x)$ *gleich* ax^n wird, wobei man offenbar zugleich n als ganze Zahl annehmen kann. Bei den Functionen der anderen Art dagegen existiren solche Zahlen n, a, g nicht, vielmehr wird, den absoluten Werthen nach, $f(x)$ in unmittelbarer Nähe der Stelle $x = 0$ noch *kleiner* als jede beliebige Potenz ax^n.

In der That kann man, wenn in der Gleichung (1) $f^{(n)}(0)$ nicht gleich Null ist, zunächst g so bestimmen, dass für $-g \leqq x \leqq g$ immer auch $f^{(n)}(x)$ von Null verschieden ist. Nimmt man dann die Zahl a kleiner als den kleinsten absoluten Werth von $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ im Intervalle $-g$ bis $+g$ an, so ist die Bedingung $[f(x)] > [ax^n]$ für $-g < x < g$ erfüllt; und umgekehrt, wenn diese letzte Bedingung erfüllt ist, können die n ersten Ableitungen von $f(x)$ für $x = 0$ nicht sämmtlich verschwinden, da sonst

$$f(x) = f^{(n+1)}(\vartheta x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

und somit $\lim\limits_{x=0} \frac{f(x)}{ax^n} = 0$ wäre, was mit der Voraussetzung $[f(x)] > [ax^n]$ für $-g < x < g$ unverträglich ist.

§ 2.

Functionen zweier Veränderlichen. Unrichtigkeit der üblichen Schlussweise.

Den Fall zweier Variabeln x und y sucht man häufig folgendermassen auf den eben erledigten zurückzuführen.

Verschwinden an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ die beiden ersten

partiellen Ableitungen der Function $f(x, y)$ nach x und y, so setzt man $x = \varkappa\xi$, $y = \varkappa\eta$ und entwickelt die Differenz $f(\varkappa\xi, \varkappa\eta) - f(0, 0)$, oder, wenn wir der Einfachheit wegen wiederum $f(0, 0) = 0$ annehmen, die Function $f(\varkappa\xi, \varkappa\eta)$ (kurz mit $f_{\xi\eta}(\varkappa)$ bezeichnet) unter Benutzung der Lagrange'schen Restform nach Potenzen von $\varkappa$. Dies giebt:

$$(2) \qquad f(\varkappa\xi, \varkappa\eta) = \frac{1}{1.2} f''_{\xi\eta}(0)\,\varkappa^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''_{\xi\eta}(0)\,\varkappa^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}_{\xi\eta}(\vartheta\varkappa)\,\varkappa^n, \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Hier ist $\frac{1}{r!} f^{(r)}_{\xi\eta}(0)$ ein homogener Ausdruck r^{ten} Grades in ξ und η, welcher sich von dem Gliede r^{ter} Ordnung in der Entwickelung der Function $f(x, y)$ nach Potenzen von x und y nur dadurch unterscheidet, dass überall ξ, η an Stelle von x, y steht.

Es lässt sich nun im Allgemeinen vermittelst der vorher angegebenen Kriterien für jeden bestimmten Werth des Verhältnisses $\xi : \eta$ entscheiden, ob die bloss noch von der einen Variabeln $\varkappa$ abhängige Function $f_{\xi\eta}(\varkappa)$ an der Stelle $\varkappa = 0$ ein Maximum oder Minimum besitzt. Deuten wir x und y als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene, so wird durch die Gleichungen $x = \varkappa\xi$, $y = \varkappa\eta$ bei constanten Werthen von ξ und η und veränderlichem $\varkappa$ jedesmal eine Gerade definirt, die durch den Nullpunkt geht, und umgekehrt kann jede den Nullpunkt enthaltende Gerade in jener Form dargestellt werden. Es findet dann auf der einzelnen Geraden ξ, η im Nullpunkte ein Maximum oder Minimum der Function $f(x, y)$ oder keines von beiden statt, je nachdem die erste von Null verschiedene Ableitung $f^{(n)}_{\xi\eta}(0)$ von gerader Ordnung und entweder negativ oder positiv, oder von ungerader Ordnung ist.

Man pflegt nun weiter zu schliessen, dass wenn auf jeder der unendlich vielen Geraden durch den Nullpunkt ein Maximum (resp. Minimum) für $\varkappa = 0$ vorhanden ist, ein solches auch für die Function $f(x, y)$ der beiden unabhängigen Variabeln x und y an der Stelle $(0, 0)$ stattfinden müsse, während, wenn auf einigen dieser Geraden ein Maximum, auf anderen ein Minimum eintritt, von einem Maximum oder Minimum der Function $f(x, y)$ an der Stelle $(0, 0)$ nicht die Rede sein könne. Auf diese Weise würde sich als *nothwendige* und *hinreichende* Bedingung des Minimums (resp. Maximums) die ergeben, dass für *jedes* beliebige

Werthepaar ξ, η die erste von Null verschiedene unter den in (2) vorkommenden homogenen Formen $f''_{\xi\eta}(0)$, $f''''_{\xi\eta}(0)$, ... von gerader Ordnung und positivem (resp. negativem) Werthe sein müsse, und dieses Kriterium würde nur dann versagen, wenn für gewisse Verhältnisse $\xi : \eta$ *alle* jene Formen gleichzeitig verschwänden.

Die vorstehende Deduction enthält indes einen Fehler. Daraus, dass an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ ein Minimum der Function $f(x, y)$ auf jeder einzelnen Geraden stattfindet, folgt noch nicht, dass auch ein Minimum überhaupt eintritt. Die Existenz eines solchen hängt vielmehr davon ab, ob sich eine obere Grenze g so angeben lässt, dass die Function $f(x, y)$ für alle Werthe x, y, welche der Bedingung $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < g$ genügen, positiv wird; oder — geometrisch zu reden — davon, ob ein Kreis mit dem Mittelpunkte (0, 0) existirt, innerhalb dessen die Function $f(x, y)$ durchaus positiv ist — ausgenommen die Stelle (0, 0) selbst, wo sie verschwindet. Es kann aber sehr wohl auf jeder einzelnen Geraden ein Minimum im Nullpunkte stattfinden, ohne dass ein solcher Kreis existirt. Man wird das am Besten an einem Beispiele ersehen.

Es seien durch die Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ zwei Curven definirt, deren jede den Nullpunkt enthält und die xy-Ebene wenigstens in der Umgebung desselben in zwei Theile zerschneidet: einen, in welchem $\varphi(x, y)$ (resp. $\psi(x, y)$) positiv, und einen, in welchem $\varphi(x, y)$ (resp. $\psi(x, y)$) negativ ist. Das Product $f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y)$ wird dann bei dem Fortgange auf einem den Nullpunkt umgebenden kleinen Kreise zweimal positiv und zweimal negativ werden (vgl. Fig. 1) und

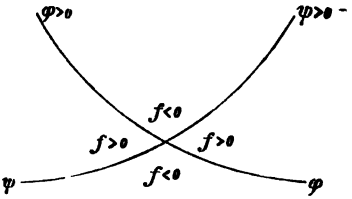


Fig. 1.

beim Fortgange auf einer den Nullpunkt enthaltenden Geraden an der Stelle (0, 0) einen Maximal- oder Minimalwerth anneh-

men, je nachdem die Gerade ins Gebiet $f(x, y) < 0$ oder ins Gebiet $f(x, y) > 0$ eintritt.

Nun kann es aber vorkommen, dass alle überhaupt möglichen Geraden, welche man durch den Nullpunkt legen kann, zunächst im Gebiete $f(x, y) > 0$ bleiben; und zwar wird dies immer eintreten, wenn die beiden Curven an der Stelle (0, 0) eine gemeinschaftliche Tangente haben und in gleichem Sinne gekrümmt sind. In diesem Falle findet auf jeder einzelnen Geraden im Nullpunkte ein Minimum statt, nicht aber ein Minimum überhaupt, da in jeder Nähe des Punktes (0, 0) noch negative Werthe von $f(x, y)$ vorkommen. Es sei z. B.

$$\varphi(x, y) = y - p^2x^2, \quad \psi(x, y) = y - q^2x^2.$$

Dann haben wir zwei Parabeln, welche im Nullpunkte die x-Axe berühren und ihre Höhlungen nach oben kehren. Das Product

$$f(x, y) = (y - p^2x^2)(y - q^2x^2)$$

ist sowohl oberhalb als unterhalb beider Curven positiv, in dem zwischen den Curven gelegenen Theile der Ebene aber negativ (vgl. Fig. 2). Jede von der y- und der x-Axe verschiedene, durch den Nullpunkt gelegte Gerade trifft in grösserem oder ge-

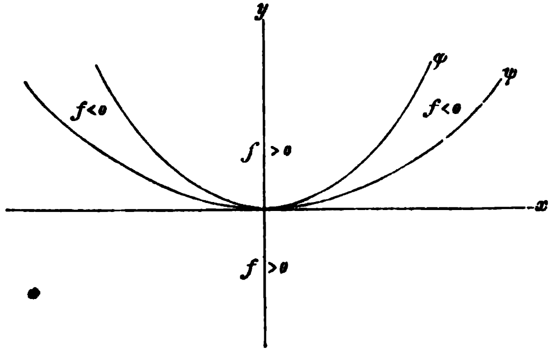


Fig. 2.

ringerem Abstande von diesem einmal das Gebiet $f < 0$, tritt aber vom Nullpunkte aus immer zunächst in das Gebiet $f > 0$. Die Strecke vom Nullpunkte bis zum Uebergange der Geraden in den negativen Theil sinkt allerdings, wenn die Gerade um

den Nullpunkt gegen die x-Axe hin gedreht wird, unter jede angebbare Grenze; aber in dem Momente, wo sie gleich Null werden würde, nämlich beim Zusammenfallen mit der x-Axe, streift die Gerade nur noch das negative Gebiet und hält sich gänzlich in dem positiven Theile.

Dieses Verhalten der Function $f(x, y)$ auf den verschiedenen Geraden, wonach die x-Axe eine ausgezeichnete Stellung unter den letzten einnimmt, spiegelt sich in dem Verhalten der Coëfficienten der Entwickelung (2) gleichsam ab. Es wird nämlich

$$f(\varkappa\xi, \varkappa\eta) = \eta^2\varkappa^2 - (p^2 + q^2)\,\xi^2\eta\varkappa^3 + p^2q^2\xi^4\varkappa^4\,;$$

der Coëfficient von $\varkappa^2$ ist also im Allgemeinen positiv, ausgenommen für $\eta = 0$, d. h. für den Fall, dass die Linie ξ, η mit der x-Axe zusammenfällt, wo dann gleichzeitig mit dem Coëfficienten von $\varkappa^2$ derjenige von $\varkappa^3$ verschwindet, sodass nun derjenige von $\varkappa^4$ ausschlaggebend wird, welcher wiederum positiv ist.[1])

---

1) Das Beispiel $(y - p^2x^2)\,(y - q^2x^2)$, (welches zugleich das denkbar einfachste sein dürfte), rührt von Herrn G. Peano her. Derselbe hat in einigen dem Werke: »*A. Genocchi*, *Calcolo differenziale pubblicato con aggiunte dal G. Peano, Torino 1884*« beigefügten Noten zuerst die oben auseinandergesetzte Schlussweise, welche man in der Theorie der Maxima und Minima von Functionen mehrerer Veränderlichen häufig angewandt findet, in ihrer Fehlerhaftigkeit erkannt und bis zu einem gewissen Punkte durch eine bessere ersetzt. Ich war, ohne Peano zu kennen, durch Untersuchungen über höhere Variationen bestimmter Integrale auf Beispiele geführt worden, welche mir für das Gebiet der Variationsrechnung schliesslich genau die gleiche Erkenntniss verschafften, welche Peano auf dem Gebiete der gewöhnlichen Maxima und Minima gewonnen hatte (vgl. meine Note: Ueber die Bedeutung der Begriffe »Maximum und Minimum« in der Variationsrechnung, diese Ber. 1885 und Mathem. Annalen XXVI, p. 197). Ich fand sodann, dass analoge Verhältnisse auch in der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima vorliegen, und hatte die hier folgenden Untersuchungen, welche über diejenigen von Peano wesentlich hinausgehen, der Hauptsache nach beendigt, als ich durch Herrn A. Mayer auf das neu erschienene Werk von Genocchi-Peano hingewiesen wurde, welches, wie mir derselbe mittheilte, auch von Herrn Harnack in einem Nachtrage zu seiner Serret-Uebersetzung (II, 1 p. 380) bereits citirt wird. Ich werde in diesem Aufsatze diejenigen Resultate, welche sich bei Peano finden, ausdrücklich als solche bezeichnen.

§ 3.

Verschiedene Versuche der Verbesserung.

Nachdem wir erkannt haben, dass aus dem Stattfinden des Maximums, resp. Minimums einer Function $f(x, y)$ auf allen einzelnen durch den Nullpunkt zu legenden Geraden noch keine Schlüsse auf ein Maximum oder Minimum in der *Ebene* gezogen werden können, tritt die Frage nach erweiterten Kriterien für die Maxima und Minima der letzten Art auf. Wir wollen, bevor wir diese Frage in völlig erschöpfender Weise beantworten, zunächst einige Schritte auf einem Wege vorwärts thun, welcher auf den ersten Augenblick verlockend erscheinen könnte, während eine nähere Betrachtung desselben uns überzeugen wird, dass er nicht wesentlich weiter führt als der zuerst eingeschlagene.

Bei dem Beispiele $f(x, y) = (y - p^2 x^2)(y - q^2 x^2)$ erhalten wir auf allen Geraden ein Minimum im Nullpunkte. Nicht so überhaupt auf allen Curven, welche durch den Nullpunkt gelegt werden können; vielmehr muss sich auf jeder Curve, welche in dem von den beiden gegebenen Parabeln eingeschlossenen Flächenstreifen liegt (beispielsweise auf der Parabel $y - \frac{p^2+q^2}{2} x^2 = 0$) ein Maximum ergeben. Nun lässt sich jede beliebige Curve analytisch durch einen variabeln Parameter $\varkappa$ darstellen, indem x und y als Functionen desselben ausgedrückt werden. Es liegt daher die Frage nahe, ob man nicht durch Untersuchung des Maximums oder Minimums auf allen einzelnen Curven, welche den Nullpunkt enthalten, zur Entscheidung über das Maximum oder Minimum in der *Ebene* gelangen kann. Es ist wohl zweifellos, dass hier ein Zusammenhang besteht; die Beschränkungen indessen, welche man den Functionen $x(\varkappa)$ und $y(\varkappa)$ und dadurch den in Betracht zu ziehenden Curven auferlegen muss, um auf die Function $f(x(\varkappa), y(\varkappa))$ die für Functionen einer Veränderlichen entwickelten Kriterien mit Erfolg anwenden zu können, machen auch diese Schlussweise unbrauchbar.

Offenbar nämlich ist die einzige Form, welche man den Functionen $x(\varkappa)$ und $y(\varkappa)$ geben kann, ohne die Principien der ganzen Theorie zu verlassen, diejenige von Reihen, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortschreiten. Man setze also:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x(\varkappa) &= \xi_1 \varkappa + \xi_2 \varkappa^2 + \cdots + \xi_m \varkappa^m, \\ y(\varkappa) &= \eta_1 \varkappa + \eta_2 \varkappa^2 + \cdots + \eta_n \varkappa^n, \end{aligned}$$

und stelle die Forderung, dass die Function $f(x(\varkappa), y(\varkappa))$ für $\varkappa = 0$ ein Maximum (resp. Minimum) werden solle, welche Werthe man auch für die ganzen positiven Zahlen m, n und die $m+n$ Grössen $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n$ annehmen mag, vorausgesetzt natürlich, dass nicht alle ξ und η gleichzeitig gleich Null sind.

Diese Forderung ist z. B. bei der Function

$$f(x, y) = (y - p^2x^2)(y - q^2x^2)$$

hinreichend, um das *Nichtstattfinden* eines Maximums oder Minimums zu Tage treten zu lassen. Denn für $m = 1$, $n = 2$ wird

$$f(x(\varkappa), y(\varkappa)) = \eta_1^2\varkappa^2 + \eta_1(2\eta_2 - (p^2 + q^2)\xi_1^2)\varkappa^3 + (\eta_2 - p^2\xi_1^2)(\eta_2 - q^2\xi_1^2)\varkappa^4.$$

Ist η_1 von Null verschieden, so ist der Coëfficient von $\varkappa^2$ positiv, es findet daher auf allen solchen Curven im Nullpunkte ein Minimum statt; ist dagegen $\eta_1 = 0$, so reducirt sich die Entwickelung auf das Glied 4ter Ordnung, und dieses kann durch geeignete Wahl der Constanten ξ_1 und η_2 (z. B. durch die Substitution $\eta_2 = \frac{p^2+q^2}{2}\xi_1^2$) negativ gemacht werden; es findet daher auf den Curven der letzten Art unter Umständen ein Maximum statt. Es ist aber gerade bei diesem Beispiele evident, dass man durch Anwendung dieses Verfahrens eigentlich keinen Vortheil erlangt. Denn der Coëfficient von $\varkappa^4$, welcher untersucht werden muss, hat genau die Gestalt der Function $f(x, y)$, nur dass x, y durch die Constanten ξ_1, η_2 ersetzt sind. Die Discussion des Vorzeichens dieser Coëfficienten für die verschiedenen Werthe jener Constanten bietet daher an sich genau dieselbe Schwierigkeit, wie die entsprechende Discussion für die Function $f(x, y)$ selbst.

Das folgende Beispiel zeigt noch weiter, dass die gestellte Forderung nicht einmal eine *hinreichende* Bedingung des Minimums ausdrückt und schon aus diesem Grunde werthlos ist. Setzen wir nämlich

$$\varphi(x, y) = y - \sin^2 x,$$

$$\psi(x, y) = y - \sin^2 x - e^{-\frac{1}{x^2}},$$

so werden durch die Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ zwei Curven definirt, welche im Nullpunkte die x-Axe als gemeinschaftliche Tangente und überdies mit einander eine Berührung von unendlich hoher Ordnung haben. Es giebt alsdann

keine in der Form (3) darstellbare Curve, welche vom Nullpunkte aus zwischen jene beiden fiele; denn eine solche müsste mit diesen Curven ebenfalls eine Berührung von unendlich hoher Ordnung haben, während offenbar jede Curve von der Form (3) als algebraische Curve nur eine Berührung von endlicher Ordnung mit jenen transcendenten Curven haben kann. Nun ist die Function $f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y)$ in der ganzen Ebene positiv, ausgenommen den zwischen den beiden Curven befindlichen Flächenstreifen, in welchem sie negativ ist; es findet daher an der Stelle $f(x, y)$ weder ein Maximum noch ein Minimum statt. Trotzdem tritt auf jeder Curve (3) ein wirkliches Minimum ein, und zwar ein solches, welches durch die für Functionen einer Variabeln gültigen allgemeinen Kriterien deutlich erkennbar ist; in der That überzeugt man sich leicht, dass bei *jeder* Wahl der Zahlen m, n und der Grössen $\xi_1, \ldots \eta_n$ von Null *verschiedene* Coëfficienten in der Entwickelung von $f(x(\varkappa), y(\varkappa))$ vorkommen, deren erster dann natürlich jedesmal von gerader Ordnung und positiv ist.

Man könnte die angegebene Methode so erweitern, dass sie auch bei dem letzten Beispiele nicht geradezu ein *falsches* Resultat liefern würde, indem man nämlich das Maximum und Minimum nicht nur auf allen Curven von der Form (3), sondern auch auf allen denjenigen Cuven untersucht, welche aus der Form (3) dadurch hervorgehen, dass man m und n unendlich gross werden lässt. In dieser erweiterten Form ist auch die Curve $y - \sin^2 x = 0$ darstellbar, wenn man

$$x = \varkappa, \quad y = \left(1 - \frac{\varkappa^3}{3!} + \frac{\varkappa^5}{5!} - \cdots\right)^2$$

setzt; es würden für diese Curve alsdann die sämmtlichen Entwickelungscoëfficienten der Function $f(x(\varkappa), y(\varkappa))$ verschwinden, sodass man einen Schluss auf das Minimum der Function $f(x, y)$ überhaupt nicht ziehen könnte. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese erweiterte Forderung wirklich eine zugleich nothwendige und hinreichende Bedingung des Minimums ausdrückt. Indes ist dieselbe praktisch noch unbrauchbarer, als diejenige, welche vorher angenommen war; denn sie macht durch Einführung unendlich vieler unbestimmter Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \eta_1, \eta_2, \ldots$ im Allgemeinen eine unendlich grosse Anzahl von Einzeluntersuchungen nothwendig, da durch Nullsetzen einer genügen-

den Menge jener Grössen immer beliebig viele der Entwickelungscoëfficienten von $f(x(\varkappa), y(\varkappa))$ zum Verschwinden gebracht werden können, wobei also jedesmal der erste nicht verschwindende Coëfficient hinsichtlich des Vorzeichens zu untersuchen bleibt. Wir sehen daher von einer weiteren Discussion jener Forderung ab und schlagen jetzt einen Weg ein, der uns auf bequeme Art zu völlig allgemeinen und gleichzeitig praktisch brauchbaren Kriterien hinführen wird.

§ 4.

Fundamentale Eintheilung der Functionen von zwei Variabeln.

Wir beginnen mit einer wichtigen Unterscheidung aller im Nullpunkte verschwindenden Functionen $f(x, y)$ hinsichtlich ihres Verhaltens in der Umgebung dieser Stelle. Wir sahen nämlich, dass bei Functionen einer einzigen Veränderlichen die Anwendbarkeit der auf Potenzentwickelung gegründeten Kriterien des Maximums oder Minimums davon abhängig war, ob die Function $f(x)$ sich in der Umgebung der Stelle $x = 0$, an der sie verschwindet, schnell genug mit x veränderte, sei es in dem einen oder anderen Sinne; es musste eine Potenz ax^n mit der Eigenschaft existiren, dass zwischen gewissen Grenzen $-g < x < g$ der absolute Wert von $f(x)$ beständig grösser als $[ax^n]$ (oder höchstens gleich $[ax^n]$) wurde; bei denjenigen Functionen, welche dieser Bedingung nicht genügten, konnte auf dem Wege der Potenzentwickelung überhaupt keine Entscheidung über das Maximum oder Minimum gewonnen werden. Offenbar wird für eine Function von zwei Variabeln eine analoge Bedingung existiren, von deren Erfüllung von vornherein die Möglichkeit abhängt, durch Potenzentwickelung über Maximum und Minimum zu entscheiden. Es fragt sich, wie diese Bedingung zu formuliren sein wird. Eine Potenz ar^n (wo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) mit der Eigenschaft, dass für $0 < r < g$, d. h. innerhalb eines Kreises mit dem Radius g, überall $f(x, y)$ absolut grösser als ar^n sei, darf man jedenfalls nicht verlangen; denn dadurch würden überhaupt alle Functionen $f(x, y)$, die an der Stelle (0, 0) weder ein Maximum noch ein Minimum haben, von der Untersuchung ausgeschlossen, da dieselben auf jedem noch so kleinen Kreise um den Nullpunkt sowohl positiv als negativ und daher auch gleich

Null werden können. Es wäre dies aber auch durchaus nicht die natürliche Verallgemeinerung unserer für Functionen eines einzigen Argumentes präcisirten Forderung; denn die charakteristische Eigenschaft der letzteren lag nur darin, dass das Verhalten der Function in der Umgebung des Nullpunktes bis zu einem *gewissen Grade der Deutlichkeit ausgeprägt* sein musste, gleichgültig, ob dies im Sinne des Maximums oder des Minimums oder des *Nichteintretens* von Maximum und Minimum der Fall war. Zu der wahren Verallgemeinerung jener Forderung für Functionen von zwei Variabeln führt folgende Ueberlegung.

Offenbar wird die im Nullpunkte verschwindende Function $f(x, y)$, da sie stetig ist, auf jedem um den Nullpunkt als Centrum mit einem beliebigen Radius r beschriebenen Kreise irgendwo einen grössten und einen kleinsten Werth annehmen (falls sie sich nicht auf eine Function der einen Variabeln $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ reducirt), und zwar werden die Vorzeichen dieser beiden *extremen Werthe*, welche wir mit $f_1(r)$ und $f_2(r)$ bezeichnen wollen, für genügend kleine Radien r das Eintreten oder Nichteintreten des Maximums oder Minimums im Nullpunkte erkennen lassen. Sind nämlich beide Grössen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ positiv, so wird ein Minimum, sind beide negativ, ein Maximum, sind endlich die Vorzeichen entgegengesetzt, weder ein Maximum noch ein Minimum stattfinden. Der Grad der *Deutlichkeit*, bis zu welchem das Verhalten der Function $f(x, y)$ ausgeprägt ist, ist nun in allen drei Fällen gleichmässig daran zu messen, ob eine Potenz ar^n mit der Eigenschaft existirt, dass für *jeden* Werth von r unterhalb einer gewissen Grenze g *beide Extremwerthe* $f_1(r)$ und $f_2(r)$, *absolut genommen*, grösser als ar^n werden. Die Forderung, dass eine solche Potenz angebbar sei, ist die gesuchte Verallgemeinerung der vorher für Functionen einer Veränderlichen präcisirten Bedingung, von welcher die Anwendbarkeit der allgemeinen Kriterien abhing; ist jene Forderung nicht erfüllt, so kann man auf die Gewinnung sicherer Kennzeichen des Maximums oder Minimums durch Potenzentwickelungen irgend welcher Art keinenfalls rechnen. Denn alsdann ist der äusserste Betrag, bis zu welchem die Function $f(x, y)$ in der Umgebung der Stelle (0,0) entweder dem Werthe Null von der einen Seite nahekommt, oder um den sie darüber hinausgehend sich nach der andern Seite von demselben entfernt, ein so geringer, dass er sich durch keine noch so hohe Potenz von r ausdrücken lässt; die Potenz-

entwickelung kann daher auch nicht zur Unterscheidung zwischen den beiden Fällen führen, wo der Werth Null nicht ganz erreicht und wo er noch um ein Weniges überschritten wird. Ein Beispiel dieser Art liefert die Function $y^2 + e^{-\frac{p^2}{x^2}}$, welche ein Minimum, sowie die Function $y^2 - e^{-\frac{p^2}{x^2}} = \left(y + e^{-\frac{p^2}{2x^2}}\right)\left(y - e^{-\frac{p^2}{2x^2}}\right)$, welche weder ein Maximum noch ein Minimum hat. Jene nähert sich dem Werthe Null von der positiven Seite bis zum Betrage $e^{-\frac{p^2}{r^2}}$ (für $y = 0$), diese überschreitet die Null um denselben Betrag nach der negativen Seite hin. Uebrigens gehören hierher auch sämmtliche Quadrate von Functionen, die sowohl positiv als negativ werden können, sowie überhaupt alle Functionen, welche in *jeder* Nähe der Stelle (0,0) den Werth 0 zwar noch erreichen, aber nicht überschreiten.

Existirt nun andrerseits eine Potenz ar^n, deren Werth, so lange r unterhalb einer gewissen Grenze g bleibt, immer kleiner als die absoluten Werthe der beiden Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ ist, so lässt sich die Frage, ob im Nullpunkte ein Maximum oder ein Minimum der Function $f(x, y)$ oder keins von beiden stattfindet, auf Grund der Potenzentwickelung immer mit Sicherheit und vermittelst einer endlichen Anzahl principiell geordneter Einzeluntersuchungen beantworten. Wie das geschieht, soll im Folgenden auseinandergesetzt werden.

§ 5.

Reduction des Problems von beliebigen Functionen auf ganze rationale Functionen.

Man entwickle die Functionen $f(x, y)$ mit Benutzung der Lagrange'schen Restform nach Potenzen von x und y. Bezeichnet man dann die Gesammtheit der Glieder r^{ter} Ordnung kurz mit $f^{(r)}(x, y)$, so wird:

$$(4)\quad \begin{aligned} f(x, y) &= f^{(1)}(x, y) + \cdots + f^{(n)}(x, y) + R_{n+1}(x, y) \\ &= G_n(x, y) + R_{n+1}(x, y). \end{aligned}$$

Das Restglied $R_{n+1}(x, y)$ ist eine binäre Form $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coëfficienten aus den partiellen Ableitungen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ord-

nung der Function $f(x, y)$ für die Argumente ϑx, ϑy $(0 < \vartheta < 1)$ gebildet sind. Man kann in diesem Restgeliede x und y durch r und zugleich alle Coëfficienten durch die grösstmöglichen absoluten Werthe ersetzen, welche sie überhaupt annehmen können, so lange r unterhalb einer gewissen Grenze bleibt, und erhält so für den absoluten Werth von $R_{n+1}(x, y)$ eine obere Grenze Ar^{n+1}. Da nun für alle genügend kleinen r die mit $f_1(r)$ und $f_2(r)$ bezeichneten extremen Werthe der Function $f(x, y)$ nach Voraussetzung absolut grösser als ar^n sind, ar^n aber andrerseits wiederum grösser als Ar^{n+1} ist, so folgt aus Formel (4) *erstens*, dass für genügend kleine r immer die extremen Werthe der ganzen rationalen Function $G_n(x, y)$ mit den Grössen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entsprechend gleiche Vorzeichen haben; und *zweitens*, dass, wenn a' irgend eine Zahl zwischen 0 und a bedeutet, immer eine obere Grenze g' für den Radius r so angegeben werden kann, dass die beiden extremen Werthe von $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^n$ werden, solange r kleiner als g' bleibt.

Fixiren wir nämlich fürs Erste einen Radius r, welcher kleiner als $\frac{a}{A}$ ist und somit der Bedingung $ar^n > Ar^{n+1}$ genügt, so wird auf der rechten Seite der Gleichung

$$(5) \qquad G_n(x, y) = f(x, y) - R_{n+1}(x, y)$$

jedenfalls an denjenigen beiden Stellen, welche den Extremen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ der Function $f(x, y)$ auf der Peripherie des Kreises r entsprechen, das Vorzeichen des ersten Gliedes massgebend sein, da dasselbe hier (absolut) grösser als ar^n ist, während das zweite Glied kleiner als Ar^{n+1} wird; haben nun die beiden Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ gleiches Vorzeichen, so ist überhaupt auf der ganzen Peripherie der Werth von $f(x, y)$, als zwischen den beiden Extremen liegend, absolut grösser als ar^n und stimmt daher nach (5) im Vorzeichen mit $G_n(x, y)$ überein, es haben daher auch die beiden Extreme von $G_n(x, y)$ gleiches Vorzeichen mit den Extremen von $f(x, y)$; haben dagegen die beiden Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entgegengesetzte Vorzeichen, so haben die entsprechenden Werthe von $G_n(x, y)$ ebenfalls entgegengesetzte Vorzeichen, es müssen daher um so mehr den beiden *Extremen* der letzteren Function entgegengesetzte Vorzeichen zukommen. Hiermit ist die *erste* der aufgestellten Behauptungen erwiesen.

Die *zweite* Behauptung ergiebt sich durch ganz ähnliche Ueberlegungen, wenn man den Radius r nicht nur kleiner als $\frac{a}{A}$, sondern so klein annimmt, dass $ar^n - Ar^{n+1}$ grösser als $a'r^n$ wird, d. h. wenn man g' gleich $\frac{a-a'}{A}$ und r kleiner als g' macht. Dann nämlich hat die rechte Seite der Gleichung (5) für die den Extremen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entsprechenden Werthe von x, y nicht nur das Vorzeichen von $f(x, y)$, sondern ist auch absolut grösser als $a'r^n$. Es wird daher, wenn die Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ gleiches Vorzeichen haben, die rechte Seite der Gleichung (5) überhaupt auf der ganzen Peripherie absolut grösser als $a'r^n$ sein; und wenn die Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ engegengesetztes Vorzeichen haben, werden die jenen Extremen entsprechenden, ebenfalls mit entgegengesetztem Zeichen versehenen Werthe von $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^n$ sein, um so mehr muss also dasselbe von den Extremen dieser letzteren Function gelten.

Wir können die beiden eben bewiesenen Behauptungen folgendermassen zusammenfassen.

»Es sei $f(x, y)$ eine an der Stelle (0, 0) verschwindende Function, deren Verhalten in der Umgebung jener Stelle genügend deutlich ist, damit die Entscheidung über das Eintreten oder Nichteintreten eines Maximums resp. Minimums auf dem Wege der Potenzentwickelung nicht principiell unmöglich sei; mit anderen Worten, es existire eine Potenz ar^n von der Art, dass auf jedem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise, dessen Radius r kleiner als eine bestimmte Grösse g ist, die beiden extremen Werthe (der grösste und der kleinste) der Function $f(x, y)$, $f_1(r)$ und $f_2(r)$, absolut grösser als ar^n seien. Entwickelt man dann $f(x, y)$ mit Benutzung der Lagrange'schen Restform nach Potenzen von x, y und bezeichnet die Gesammtheit aller Glieder der n ersten Dimensionen mit $G_n(x, y)$, das Restglied mit $R_{n+1}(x, y)$, sodass:

$$f(x, y) = G_n(x, y) + R_{n+1}(x, y)$$

wird, so verhält sich die ganze rationale Function $G_n(x, y)$ in der Umgebung der Stelle (0, 0) ganz so wie die Function $f(x, y)$. Erstens nämlich stimmen die extremen Werthe beider Functionen für jeden genügend kleinen Radius r dem Vorzeichen nach entsprechend überein, woraus folgt, dass im Nullpunkte für beide Functionen gleichzeitig ein Maximum oder ein Mini-

mum oder weder eines noch das andere eintritt; und zweitens sind, wenn a' irgend eine Zahl zwischen 0 und a bedeutet, für jeden Radius r innerhalb eines gewissen Kreises g' die extremen Werthe der Function $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a' r^n$, woraus folgt, dass auch der Grad der *Deutlichkeit*, welchen das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ zeigt, der nämliche, wie bei der Function $f(x, y)$ ist.«

Man überzeugt sich leicht, dass in dem zum Beweise des vorstehenden Satzes angestellten Ueberlegungen überall $f(x, y)$ mit $G_n(x, y)$ vertauscht werden kann, da nur die Gleichung (5) zur Anwendung kommt. Man erhält dadurch einen neuen Satz, welcher gewissermassen als Umkehrung des vorstehenden gelten kann. Bedenkt man noch, dass, wenn $f(0, 0)$ verschieden von Null ist, man nur im Vorhergehenden überall $f(x, y)$ durch die Differenz $f(x, y) - f(0, 0)$ zu ersetzen hat, so ergiebt sich durch Zusammenfassung beider Sätze schliesslich Folgendes:

Eine beliebig gegebene Function $f(x, y)$ werde nach Potenzen von x, y entwickelt. Lässt sich dann die Zahl n und eine positive Grösse a' so bestimmen, dass die aus allen Gliedern der ersten n Dimensionen gebildete ganze rationale Function $G_n(x, y)$ auf jedem Kreise r, der in einem gewissen Gebiete g' liegt, extreme Werthe von absolut grösserem Betrage als $a' r^n$ besitzt, so haben die beiden Functionen $f(x, y)$ und $G_n(x, y)$ im Nullpunkte gleichzeitig ein Maximum oder ein Minimum oder weder ein Maximum noch ein Minimum. Lässt sich dagegen eine solche Zahl n mit der angegebenen Eigenschaft nicht bestimmen, so ist die Entscheidung über das Verhalten der Function $f(x, y)$ auf dem Wege der Potenzentwickelung überhaupt principiell unmöglich. Es genügt hiernach, um aus der Function $G_n(x, y)$ einen Schluss auf die Function $f(x, y)$ zu ziehen, noch nicht, dass $G_n(x, y)$ ein deutliches Verhalten hinsichtlich des Maximums oder Minimums zeigt; vielmehr muss noch die auf die Grössenordnung der Extreme von $G_n(x, y)$ bezügliche Bedingung erfüllt sein.

Wir werden die letztere Thatsache später schon an Beispielen von der denkbar einfachsten Beschaffenheit bestätigt finden, *wo nämlich die Function $f(x, y)$ selbst eine ganze rationale Function ist und wo einmal die aus den ersten n Dimensionen zusammengesetzte Function $G_n(x, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes beständig positiv ist, während $f(x, y)$ auch negativ werden kann, ein andermal hingegen $G_n(x, y)$ sowohl positiv als negativ*

wird, während $f(x, y)$ constantes Vorzeichen bewahrt (vgl. Beispiel (1) und (2) am Schluss).

Durch den aufgestellten Fundamentalsatz ist die Untersuchung der Function $f(x, y)$ zurückgeführt auf die Untersuchung der ganzen rationalen Function $G_n(x, y)$. Man wird zunächst $n = 2$ annehmen, dann $n = 3$ u. s. w., und jedesmal die entsprechende Function $G_n(x, y)$ hinsichtlich ihrer Extremwerthe prüfen. Ist dann die Entscheidung über das Maximum oder Minimum der Function $f(x, y)$ überhaupt auf dem Wege der Potenzentwickelung ausführbar, so muss man früher oder später zu einer Function $G_n(x, y)$ gelangen, für welche jene Extremwerthe absolut grösser als ein Ausdruck $a'r^n$ sind, und diese Function liefert die gesuchte Entscheidung.

Es ist jetzt die Frage zu beantworten: Wie kann man erkennen, ob eine Grenze g' und eine Grösse a' von der Art existiren, dass auf jedem Kreise $r < g'$ die Extremwerthe einer gegebenen ganzen rationalen Function n^{ten} Grades $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^n$ werden? Und wie kann man eventuell die Vorzeichen jener Extremwerthe feststellen und damit schliesslich zur Entscheidung über das Maximum oder Minimum der Function $G_n(x, y)$ im Nullpunkte kommen? Mit anderen Worten: Wie gestaltet sich die Theorie der Maxima und Minima für ganze rationale Functionen, auf deren Behandlung der Fundamentalsatz das allgemeine Problem zurückführt?

Diese Frage lässt sich, wie die nachfolgende Untersuchung zeigen wird, mit absoluter Vollständigkeit beantworten.

§ 6.

Homogene Functionen.

Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, wo $G_n(x, y)$ ein *homogener* Ausdruck n^{ten} Grades ist:

$$G_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} y^i .$$

Der Werth einer solchen homogenen Function ändert sich auf jeder den Nullpunkt enthaltenden Geraden proportional der n^{ten} Potenz von r. Sind also G und G' die Extremwerthe von $G_n(x, y)$ auf der Peripherie des Einheitskreises, so sind Gr^n

und $G'r^n$ die Extremwerthe auf einem beliebigen Kreise r. Die Vorzeichen von G und G' kann man direct durch Zerlegung der Form G_n in ihre linearen Factoren erkennen, zu deren Auffindung die Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades genügt. Im Voraus sieht man, dass, wenn die Ordnung n eine *ungerade* ist, G und G' von Null verschieden und entgegengesetzt gleich sein müssen, da der Ausdruck $G_n(x, y)$ bei Vertauschung von x, y gegen $-x$, $-y$ sein Vorzeichen wechselt. Ist dagegen n eine *gerade* Zahl, und sind erstens die Linearfactoren imaginär, so kann die Form $G_n(x, y)$ weder ihr Vorzeichen wechseln, noch verschwinden, sie ist *definit* und die Extreme G und G' haben gleiche Vorzeichen; sind zweitens reelle Linearfactoren und mindestens einer derselben in ungerader Ordnung vorhanden, so nimmt die Form $G_n(x, y)$ beide Vorzeichen an, sie ist *indefinit* und das Vorzeichen von G' ist dem von G entgegengesetzt; treten endlich drittens reelle Linearfactoren zwar auf, aber jeder nur in gerader Ordnung, so kann die Form $G_n(x, y)$ zwar verschwinden, aber nicht das Zeichen wechseln, sie ist *semidefinit* und eins der Extreme G und G' ist gleich Null.

In allen Fällen, mit Ausnahme des letzten, ist eine positive Zahl a' so bestimmbar, dass auf jedem beliebigen Kreise r die Extremwerthe der Function $G_n(x, y)$, nämlich Gr^n und $G'r^n$, absolut grösser als $a'r^n$ werden; man braucht ja nur a' kleiner als die absoluten Werthe von G und G' anzunehmen. In allen jenen Fällen findet daher an der Stelle (0, 0) auf genügend *deutliche* Weise (im vorher präcisirten Sinne des Wortes) entweder ein Maximum oder ein Minimum der Function $G_n(x, y)$ oder keins von beiden statt, worüber die Vorzeichen der Extreme G und G' entscheiden. Welches diese Vorzeichen sind, ist jedesmal leicht aus den Linearfactoren erkennbar; denn wenn die Form $G_n(x, y)$ indefinit ist, so sind die Vorzeichen entgegengesetzt, und wenn sie definit ist, stimmen sie unter einander und mit dem Vorzeichen der Form $G_n(x, y)$ selbst für irgend ein specielles Werthepaar von x, y überein. In dem Falle endlich, wo reelle Linearfactoren vorhanden sind, aber jeder nur in gerader Ordnung, tritt an der Stelle (0, 0) weder ein Maximum noch ein Minimum der Form $G_n(x, y)$ ein, da dieselbe in der Umgebung zwar nicht beide Vorzeichen erhalten, wohl aber verschwinden kann. Eine Grösse a' mit der verlangten Eigenschaft existirt in diesem Falle nicht.

Die Zerlegung der Function $G_n(x, y)$ in Linearfactoren, welche die Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades erfordert, ist übrigens nicht unbedingt nothwendig, sondern man kann auch durch elementare algebraische Operationen zum Ziel gelangen.

Zunächst nämlich wird man nach bekannter Methode durch Absonderung der etwaigen vielfachen Factoren die Function $G_n(x, y)$ auf die Form bringen:

$$G_n = \psi_m^m \, \psi_{m-1}^{m-1} \cdots \psi_2^2 \, \psi_1 \, ,$$

wo allgemein $\psi_\varkappa$ das einfache Product aller der Linearfactoren bezeichnet, welche G_n in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung enthält (sodass also, wenn kein Factor dieser Ordnung vorkommt, $\psi_\varkappa$ eine blosse Constante ist, und im Besondern die Function G_n sich auf ψ_1 reducirt, wenn sie nur einfache Factoren besitzt). Vermittelst des Sturm'schen Satzes lässt sich dann weiter für jede der Functionen $\psi_m, \ldots$ entscheiden, ob sich unter ihren Linearfactoren reelle befinden oder nicht; worauf man, da man auch die Exponenten $m, \ldots$ kennt, die vorher angegebenen Sätze unmittelbar anwenden kann.

Die eben skizzirte Theorie der ganzen homogenen Functionen liefert uns auf Grund des Fundamentaltheorems für die allgemeine Theorie des Maximums und Minimums beliebiger Functionen den bekannten Satz:

»*Sind in der Entwickelung der Function $f(x, y)$ nach Potenzen von x, y alle Glieder 1ter bis $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension identisch gleich Null, während die Glieder n^{ter} Dimension eine Form $G_n(x, y)$ bilden, und ist erstens $G_n(x, y)$ indefinit (was bei ungeradem n immer der Fall ist), so findet an der Stelle $(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum der Function $f(x, y)$ statt; ist zweitens $G_n(x, y)$ definit, so tritt je nach dem Vorzeichen dieser Form ein Maximum oder Minimum von $f(x, y)$ ein; ist endlich $G_n(x, y)$ semidefinit, so lässt sich das Verhalten der Function $f(x, y)$ aus dem Verhalten von $G_n(x, y)$ überhaupt nicht erkennen.*«[1])

---

1) Der Beweis dieses bekannten Satzes wird häufig auf Betrachtungen gegründet, deren Fehlerhaftigkeit wir im Anfange dieses Aufsatzes nachgewiesen haben. Herr Peano giebt, um den gewöhnlichen Fehler zu vermeiden, einen Beweis (p. 197), welcher auf demselben Grundgedanken wie der unsrige beruht. Es scheint mir indes, dass dieser Beweis viel zu umständlich ist, wofern man bei dem einzelnen Satze stehen bleiben und denselben nicht vielmehr bloss als Bestandtheil einer umfassenderen Theorie

§ 7.

Nicht homogene Functionen.

Es sei nun $G_n(x, y)$ ein beliebiger (nicht homogener) Ausdruck n^{ten} Grades ohne constantes Glied. Die Frage, ob im Nullpunkte ein Minimum oder ein Maximum von $G_n(x, y)$ stattfindet, d. h. ob in der Umgebung desselben $G_n(x, y)$ überall dasselbe Vorzeichen hat, ist dann offenbar gleichbedeutend mit der Frage, ob die algebraische Curve $G_n(x, y) = 0$ im Nullpunkte einen isolirten Punkt besitzt, oder nicht. Hierdurch wird der Gedanke nahe gelegt, die bei der Discussion der Singularitäten algebraischer Curven gebräuchlichen Methoden auf unsern Fall anzuwenden. In der That werden uns jene Methoden von wesentlichem Nutzen sein; denn wir werden vermittelst derselben die Discussion der Function $G_n(x, y)$ auf die Discussion

---

ansehen will. Hat man nur jenen einen Satz im Auge, so lässt sich der Beweis (für beliebig viele Variabeln $x, y, z, \ldots$) wohl am kürzesten dadurch führen, dass man in der Entwickelung der Function $f(x, y, z, \ldots)$ schon für das Glied n^{ter} Ordnung (nicht erst für das nächste) die Lagrange'sche Restform einführt. Es wird dann nämlich

$$f(x, y, \ldots) = \bar{G}_n(x, y, \ldots),$$

wo $\bar{G}_n(x, y, \ldots)$ eine Form n^{ten} Grades ist, deren Coëfficienten nicht, wie diejenigen von $G_n(x, y, \ldots)$ aus den n^{ten} partiellen Ableitungen der Function $f(x, y, \ldots)$ für die Argumente $0, 0, \ldots$, sondern aus den entsprechenden Ableitungen für die Argumente $\vartheta x, \vartheta y, \ldots$ $(0 < \vartheta < 1)$ zusammengesetzt sind. Man erkennt nun leicht, dass, so lange r, d. i. $\sqrt{x^2 + y^2 + \cdots}$ und somit gleichzeitig die Grössen $\vartheta x, \vartheta y, \ldots$ unterhalb einer gewissen Grenze g bleiben, die Form $\bar{G}_n(x, y, \ldots)$ definit oder indefinit ist, jenachdem die Form $G_n(x, y, \ldots)$ definit oder indefinit ist. Denn die beiden extremen Werthe, welche eine Form n^{ter} Ordnung mit unbestimmten Coëfficienten annimmt, wenn man ihre Argumente $x, y, \ldots$ der Bedingung $x^2 + y^2 + \cdots = 1$ unterwirft, sind offenbar stetige (algebraische) Functionen jener Coëfficienten; und da diese Extremwerthe für die Form $G_n(x, y, \ldots)$, falls dieselbe entweder definit oder indefinit (nur nicht semidefinit) ist, beide von Null verschieden sind, werden sie bei genügend kleinen Veränderungen der Coëfficienten der Form, d. h. (wofern wir diese in die Form $\bar{G}_n(x, y, \ldots)$ übergehen lassen) bei genügend kleinen Werthen von ϑx, $\vartheta y, \ldots$ ihre Vorzeichen nicht wechseln. — Es findet daher an der Stelle $(0, 0, \ldots)$ ein Maximum oder Minimum der Function $\bar{G}_n(x, y, \ldots)$ (d. h. der Function $f(x, y, \ldots)$) oder weder das eine noch das andere statt, je nachdem die Form $G_n(x, y, \ldots)$ definit und entweder negativ oder positiv, oder indefinit ist. W. z. b. w.

einer Reihe *homogener* Functionen reduciren und so zur vollständigen Beantwortung nicht nur der Frage nach dem Maximum oder Minimum von $G_n(x, y)$, sondern auch der Frage nach der Existenz eines Ausdrucks $a' r^n$ gelangen, welcher für alle genügend kleinen Werthe von r kleiner sein soll, als die absoluten Beträge der dem Radius r entsprechenden Extremwerthe von $G_n(x, y)$.

1. Um uns zunächst über die verschiedenen Möglichkeiten, welche in dem Verhalten der Function $G_n(x, y)$ auftreten können, zu orientiren, fassen wir einen kleinen Kreis r ins Auge und suchen auf demselben diejenigen beiden Stellen, an welchen die Function $G_n(x, y)$ ihren grössten und ihren kleinsten Werth annimmt. Man findet dieselben bekanntlich, indem man die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial G_n(x, y)}{\partial x} - \lambda x = 0\,,$$
$$\frac{\partial G_n(x, y)}{\partial y} - \lambda y = 0\,,$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

nach x, y und λ auflöst. Durch Elimination von λ aus den beiden ersten Gleichungen entsteht die Gleichung n^{ten} Grades

$$(1) \qquad y\,\frac{\partial G_n(x, y)}{\partial x} - x\,\frac{\partial G_n(x, y)}{\partial y} = 0\,.$$

Dieselbe muss für alle Werthe von x und y befriedigt werden, welche den Stellen der extremen Werthe von $G_n(x, y)$ auf ganz beliebigen Kreisen r entsprechen. Es liegen daher alle jene Extremstellen auf der durch die Gleichung (1) definirten algebraischen Curve. Nun ist aus der Theorie der algebraischen Functionen bekannt, dass jeder den Nullpunkt enthaltende Zweig einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung sich in der Umgebung des Nullpunktes durch eine unabhängige Variable $\varkappa$ in der Form:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a_1\varkappa + a_2\varkappa^2 + \cdots\,, \\ y = b_1\varkappa + b_2\varkappa^2 + \cdots\,, \end{cases}$$

darstellen lässt; und zwar kann die Darstellung, welche auf unendlich viele Arten möglich ist, immer so eingerichtet werden, dass in jeder der *beiden* Reihen der erste von Null verschiedene Coëfficient (falls ein solcher überhaupt existirt) höchstens den Index n hat. Es sind also auch diejenigen beiden den Nullpunkt

enthaltenden Zweige der algebraischen Curve (1), deren Schnittpunkte mit jedem Kreise von hinreichend kleinem Radius r die Stellen liefern, welche den extremen Werthen von $G_n(x, y)$ auf diesem Kreise entsprechen, in der Form (2) durch einen unabhängigen Parameter $\varkappa$ darstellbar, so lange wenigstens, als es sich nur um die unmittelbare Umgebung des Nullpunktes, d. h. um genügend kleine Werthe von $\varkappa$ handelt. Wir wollen jene Zweige kurz die beiden *Extremcurven* der Function $G_n(x, y)$ nennen.

Es ist jetzt der Fall, wo (ausser etwa für vereinzelte Werthe von r) die Extremwerthe von $G_n(x, y)$ beide von Null verschieden sind, von dem andern, wo einer derselben beständig gleich Null ist, zu trennen. Sind beide Extremwerthe von Null verschieden, so wird der Ausdruck $G_n(x, y)$, falls man für x und y die einer Extremcurve entsprechenden Reihen (2) einsetzt, mit einer Potenz $A\varkappa^m$ beginnen, welche für genügend kleine Werthe von $\varkappa$ sowohl das Vorzeichen als auch die Ordnung der Kleinheit des ganzen Ausdrucks bestimmt. Diese Ordnung ist die m^{te}, wofern man $\varkappa$ als Grösse erster Ordnung, und die $\frac{m}{\mu}^{\text{te}}$, wofern man r als Grösse erster Ordnung betrachtet und mit μ den niedrigsten in den Reihen (2) *wirklich vorkommenden* Exponenten von $\varkappa$ bezeichnet. Die Zahl μ ist, wie schon erwähnt, bei geeigneter Wahl der Parameterdarstellung (2) höchstens gleich n. Entsprechende Grössen A', m' und μ' erhält man für die zweite Extremcurve. Sind nun die Zahlen m und m' nicht beide gerade, so kann von einem Minimum oder Maximum der Function $G_n(x, y)$ im Nullpunkte keinenfalls die Rede sein, da die Function dann jedenfalls auf einer Extremcurve das Vorzeichen mit $\varkappa$ wechselt. Das Gleiche gilt, wenn zwar m und m' gerade Zahlen sind, A und A' aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, da alsdann auch die Function $G_n(x, y)$ auf den beiden Extremcurven verschiedene Vorzeichen aufweist. Ist endlich m und m' gerade und zugleich A von gleichem Vorzeichen mit A', so tritt ein Maximum oder Minimum der Function $G_n(x, y)$ ein, je nachdem dieses Vorzeichen das positive oder das negative ist. In allen drei Fällen lässt sich offenbar eine Grösse a' und eine obere Grenze g' des Radiusvector r so bestimmen, dass für $r < g'$ die Werthe von $G_n(x, y)$ auf beiden Extremcurven überall absolut grösser als $a'r^p$ werden, wo mit

p die grössere der beiden Zahlen $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{m'}{\mu'}$ bezeichnet ist, und zwar ist dieser Exponent p (der aber natürlich nicht nothwendig eine ganze Zahl zu sein braucht) zugleich der *kleinste*, für welchen ein Ausdruck $a'r^p$ mit der angegebenen Eigenschaft existirt.

Ist dagegen der Werth von $G_n(x, y)$ auf einer der beiden Extremcurven beständig gleich Null, so findet selbstverständlich kein Maximum oder Minimum im Nullpunkte statt, und noch weniger giebt es einen Ausdruck $a'r^p$ von der eben verlangten Art. Dieser Fall kann aber nur dann eintreten, wenn die Function $G_n(x, y)$ einen quadratischen Factor enthält, durch dessen Nullsetzen eine den Nullpunkt enthaltende reelle Doppelcurve definirt wird, da sonst mit dem Verschwinden der Function $G_n(x, y)$ beim Fortgange auf irgend einem Kreise r ein Zeichenwechsel verbunden sein müsste. Nun kann man sich allemal im Voraus durch elementaralgebraische Operationen Gewissheit hinsichtlich der Existenz quadratischer Factoren überhaupt verschaffen. Wir wollen daher in der Folge der Einfachheit wegen annehmen, dass die Function $G_n(x, y)$ solche quadratische Factoren, durch welche *reelle* Doppelcurven definirt würden, jedenfalls nicht enthält.

Unter dieser Voraussetzung, deren Eintreffen man bei jedem einzelnen Beispiele in erster Linie zu prüfen haben wird, giebt es, den vorher angestellten Ueberlegungen zufolge, immer eine kleinste Zahl p, zu welcher sich eine Constante a' und eine obere Grenze g' des Radius r so bestimmen lässt, dass auf jedem Kreise $r < g'$ beide Extremwerthe der Function $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^p$ werden; und zwar drückt jene Zahl p (wenn man die Ordnung von r als Einheit nimmt) die Ordnung der Kleinheit der Function $G_n(x, y)$ auf derjenigen der beiden Extremcurven aus, auf welcher diese Ordnung die höhere ist. Ist p höchstens gleich n, so ist $a'r^p$ für kleine r nicht kleiner als $a'r^n$, die beiden Extremwerthe von $G_n(x, y)$ sind daher sicher auch absolut grösser als $a'r^n$; ist dagegen p grösser als n, so wird für kleine r mindestens einer der Extremwerthe von G_n absolut kleiner als ar^n, wie auch die Constante a gewählt werden mag; denn p ist der kleinste Exponent, für welchen die Extremwerthe absolut noch grösser als ein Ausdruck $a'r^p$ bleiben. Je nach dem Verhalten auf beiden Extremcurven tritt im Nullpunkte ein Maximum oder ein Minimum der Function $G_n(x, y)$ oder

weder eins noch das andere ein. Indessen ist nach unserem Fundamentaltheorem die Function $G_n(x, y)$ für eine Function $f(x, y)$, aus deren Entwickelungsgliedern 1ter bis n^{ter} Ordnung sie besteht, hinsichtlich des Maximums oder Minimums nur dann massgebend, wenn der charakteristische Exponent p höchstens gleich n ist.

2. Wollte man im einzelnen Falle die Function $G_n(x, y)$ auf dem Wege, welchen die vorstehenden allgemeinen Ueberlegungen genommen haben, discutiren, so müsste man die Coëfficienten in den Reihen (2) wirklich berechnen und alsdann diese Reihen in die Function $G_n(x, y)$ einsetzen. Ein solches Verfahren wäre, da jene Coëfficienten von unübersichtlichen Gleichungen höheren Grades abhängen, äusserst schwerfällig. Nun lässt sich aber ein Algorithmus aufstellen, der aus lauter elementaren Operationen besteht und indirect schliesslich zu demselben Ziele führt, welches bei den vorstehenden Ueberlegungen direct ins Auge gefasst wurde. Dieser Algorithmus ist in seinen wesentlichen Zügen als Newton-Cramer'sche Regel aus der Theorie der Singularitäten algebraischer Curven längst bekannt.

Der Grundgedanke, durch welchen man zu diesem Algorithmus hingeleitet wird, ist folgender: Man denke sich zunächst die Reihen (2) mit ihren unbestimmten Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots$ $b_1, b_2, \ldots$ in die Function $G_n(x, y)$ eingesetzt und diese nach Potenzen von x entwickelt. Dann nehme man für die Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ alle überhaupt möglichen Werthe an und untersuche jedesmal die niedrigste in der Entwickelung von $G_n(x, y)$ auftretende Potenz von x. Jedes System von Werthen der Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ stellt eine bestimmte Curve dar, und die niedrigste Potenz von x charakterisirt jedesmal das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ auf derselben hinsichtlich des Maximums oder Minimums. Unter den unendlich vielen Curven kommen dann jedenfalls auch die beiden Extremcurven vor, welche die endgültige Entscheidung der gestellten Fragen liefern; die Discussion derselben wird daher in der Discussion aller überhaupt möglichen Curven implicite erhalten sein.

Es läst sich aber weiter zeigen, dass man auf diesem Wege jedesmal schon durch eine *endliche* Anzahl einzelner Untersuchungen zu sicherer Entscheidung gelangen kann.

Man erkennt dies am besten, wenn man die Form der Reihen

(2) von Anfang an noch beschränkt. Jede beliebige Einschränkung nämlich ist für unsern Zweck zulässig, sobald nur die Gewissheit vorliegt, dass durch dieselbe keine der beiden Extremcurven ausgeschlossen wird. Nun lässt sich jeder Zweig einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung, welche den Nullpunkt enthält, immer durch Gleichungen von der Form

$$(3) \qquad \begin{cases} x = a_\alpha \varkappa^\alpha, \\ y = b_\beta \varkappa^\beta + b_{\beta+1} \varkappa^{\beta+1} + \cdots \end{cases}$$

ausdrücken, wo sowohl α als auch der Index β des ersten von Null verschiedenen Coëfficienten b_β (falls ein solcher überhaupt existirt) höchstens gleich n ist. Unter den Curven von der Form (3) müssen daher nothwendig auch die beiden unbekannten Extremcurven enthalten sein.

Enthält nun, wie wir angenommen haben, die Function $G_n(x, y)$ keinen quadratischen Factor, dessen Nullsetzung eine reelle Doppelcurve definirt, so beginnen die den beiden Extremcurven (3) entsprechenden Entwickelungen von $G_n(x, y)$ mit Potenzen $A\varkappa^m$, resp. $A'\varkappa^{m'}$. In die Coëfficienten A und A' dieser Potenzen können die Grössen b jedenfalls höchstens bis zum Index m, resp. m' eingehen. Es wird daher, um das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes und speciell auf ihren beiden Extremcurven zu erkennen, genügen, dass man, unter M die grösste der Zahlen m und m' verstanden, nach Einführung der unbestimmten Reihen

$$x = a_\alpha \varkappa^\alpha,$$
$$y = b_1 \varkappa + b_2 \varkappa^2 + \ldots$$

in die Function $G_n(x, y)$ nur den ersten M Grössen $b_1, b_2, \ldots$ alle möglichen Werthe giebt; denn die Werthe der folgenden sind ohne Einfluss auf das Verhalten der Function. Nun kennt man allerdings die Zahl M nicht im Voraus; dieselbe ergiebt sich indessen im Laufe der Untersuchungen von selbst. Denn für beliebig angenommene Werthe einer gewissen Anzahl von Coëfficienten b kann man, wie in der Folge ausführlich gezeigt werden soll, jedesmal entscheiden, ob die höheren Coëfficienten noch Einfluss auf das erste Glied der Entwickelung von $G_n(x, y)$ haben können, oder nicht; zieht man also der Reihe nach immer mehr Coëfficienten b in Betracht, so erkennt man den Moment, wo die Zahl M erreicht ist, ganz genau.

Durch die vorangehende Ueberlegung sollte zunächst nur

nachgewiesen werden, dass man schliesslich immer zu einer Zahl M mit der Eigenschaft gelangen muss, dass die Coëfficienten $b_{M+1}, b_{M+2}, \ldots$ für die Beurtheilung des Verhaltens von $G_n(x, y)$ auf den beiden Extremcurven unwesentlich sind.

3. Wir gehen jetzt dazu über, das in den Grundzügen angedeutete Verfahren schrittweise im Einzelnen durchzuführen.

Setzt man nach (3)

$$x = a_\alpha \varkappa^\alpha,$$
$$y = b_\beta \varkappa^\beta + b^{\beta+1} \varkappa^{\beta+1} + \ldots$$

und lässt die Coëfficienten a_α, $b_\beta, \ldots$ unbestimmt, während man den Zahlen α und β irgend welche Werthe giebt, so werden im Allgemeinen nicht alle Glieder der Function $G_n(x, y)$ bei der Entwickelung nach $\varkappa$ Beiträge zu der niedrigsten Potenz liefern. Man gewinnt einen Ueberblick über die verschiedenen möglichen Fälle vermittelst der Newton-Cramer'schen Regel.

Es sei nämlich $x^\xi y^\eta$ ein Potenzausdruck mit unbestimmten Exponenten ξ, η; wir fragen zunächst nach den sämmtlichen Werthen ξ, η, welche denselben, wenn darin

(4) $$x = \varkappa^\alpha, \quad y = \varkappa^\beta$$

gesetzt wird, in eine gegebene Potenz $\varkappa^m$ verwandeln. Offenbar haben diese Eigenschaft alle diejenigen Zahlen ξ, η, welche der Gleichung

$$\alpha\xi + \beta\eta = m$$

genügen, und nur diese. Deuten wir ξ und η als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so definirt jene Gleichung eine gerade Linie, welche, wofern α, β, m positive Zahlen sind, sowohl die ξ- wie die η-Axe auf der *positiven* Seite schneidet. Fixirt man einen beliebigen Punkt $(\xi\eta)$ im *Innern* des von jener Geraden und den Axen ξ und η gebildeten Dreiecks, so ist für denselben immer $\alpha\xi + \beta\eta$ kleiner als m, d. h. $x^\xi y^\eta$ wird durch die Substitutionen (4) einer niedrigeren als der m^{ten} Potenz von $\varkappa$ gleich; umgekehrt wird für jeden, *ausserhalb* des Dreiecks in dem von der $+\ \xi$- und der $+\ \eta$-Axe gebildeten Winkel gelegenen Punkt $\alpha\xi + \beta\eta$ grösser als m, d, h. $x^\xi y^\eta$ wird einer höheren als der m^{ten} Potenz von $\varkappa$ gleich.

Wir denken uns nun sämmtliche, den einzelnen Gliedern $x^\xi y^\eta$ des Ausdrucks $G_n(x, y)$ entsprechende Punkte $\xi\eta$ construirt und fixiren von diesen Punkten (die sämmtlich zwischen (oder auf) der $+\ \xi$- und der $+\ \eta$-Axe liegen) zunächst den-

jenigen, welcher der η-Axe am nächsten (resp. auf derselben) liegt, und, falls deren mehrere existiren, speciell denjenigen, welcher die kleinste Ordinate η hat. Um diesen Punkt P_1 drehen wir eine gerade Linie aus einer durch die *negative* η-Axe bestimmten Anfangslage gegen die Richtung der positiven ξ-Axe hin, bis sie einen der übrigen Punkte (P_2) trifft (oder gleichzeitig mehrere, in welchem Falle unter P_2 der am weitesten von P_1 entfernte zu verstehen ist) und verbinden P_1 mit P_2 durch eine Gerade. Hierauf drehen wir die bewegliche Linie in demselben Sinne so lange um den Punkt P_2, bis sie einen der übrigen Punkte (P_3) trifft (wobei, wenn gleichzeitig mehrere getroffen werden, wiederum unter P_3 der am weitesten von P_2 entfernte verstanden werden soll) und ziehen die Gerade $P_2 P_3$. Dies ist so lange fortzusetzen, bis derjenige der Punkte P erreicht ist, welcher der ξ-Axe am nächsten (resp. auf derselben) liegt und, falls mehrere solche existiren, unter diesen zugleich die kleinste Abscisse ξ hat. Auf diese Weise entsteht eine *aus geradlinigen Stücken bestehende Curve* C, deren convexe Seite gegen den Anfangspunkt des Coordinatensystems gerichtet ist.

Nimmt man nun in den Reihen (3) für α und β irgend welche bestimmte Zahlen an, während die Coëfficienten a und b noch unbestimmt bleiben sollen, so rührt die niedrigste Potenz von x in der Entwickelung der Function $G_n(x, y)$ auf den Curven (3) zunächst nur von den Substitutionen $x = a_\alpha x^\alpha$, $y = b_\beta x^\beta$ her. Es können ferner zu dieser niedrigsten Potenz immer nur solche Glieder von $G_n(x, y)$ beitragen, deren entsprechende Punkte P auf der Curve C liegen. Denn ist $P_0 = (\xi_0 \eta_0)$ ein beliebiger jener Punkte, der nicht auf C liegt, so bildet, wie wir gesehen haben, die durch P_0 gelegte Gerade

$$\alpha\xi + \beta\eta = \alpha\xi_0 + \beta\eta_0$$

mit der ξ- und der η-Axe ein Dreieck von der Beschaffenheit, dass jedes Glied $x^\xi y^\eta$, dessen Exponenten einem *innern* Punkte des Dreiecks entsprechen, eine niedrigere Potenz von x liefert, als das dem Punkte P_0 selbst entsprechende Glied; bedenkt man aber, dass die durch P_0 gelegte Gerade (da α wie β positiv ist) sowohl die ξ-Axe als die η-Axe auf der positiven Seite trifft, so überzeugt man sich durch den Augenschein leicht davon, dass von den auf der Curve C gelegenen Punkten P immer mindestens einer ein innerer Punkt des betrachteten Dreiecks ist. — Aber

auch von denjenigen Gliedern der Function $G_n(x, y)$, welchen Punkte auf der Curve C entsprechen, können nicht alle *gleichzeitig* Beiträge zu der niedrigsten Potenz von $\varkappa$ liefern; vielmehr betheiligen sich daran, je nach der Wahl der Zahlen α und β, entweder nur ein einziger der vorher mit P_1, P_2, P_3, ... bezeichneten Eckpunkte, oder doch höchstens die Gesammtheit aller derjenigen Punkte, welche auf einer und derselben in der Curve C enthaltenen Geraden liegen. Denn verbindet man irgend zwei nicht auf derselben Geraden befindliche Curvenpunkte (P und P') mit einander, so entsteht wiederum ein Dreieck, in dessen Innerem das ganze Stück der Curve C von P bis P' verläuft; und da dieses Curvenstück sicher einen Eckpunkt enthält, d. h. einen Punkt, dem ein Glied der Function G_n entspricht, so hat man für dieses Glied wiederum eine niedrigere Potenz von $\varkappa$, als für die den Punkten P und P' entsprechenden Glieder.

Andrerseits betheiligt sich, wie sogleich gezeigt werden soll, jeder beliebige Eckpunkt von C und jede beliebige in C enthaltene Gerade bei richtiger Wahl der Zahlen α und β auch wirklich an der niedrigsten Potenz von $\varkappa$ in der Entwickelung von $G_n(x, y)$; und zwar kann man nach Belieben bewirken, dass diese niedrigste Potenz nur von einem einzigen (einem Eckpunkte entsprechenden) Gliede herrührt, oder aus mehreren (einer Geraden entsprechenden) Gliedern zusammengesetzt ist.

4. Wir ziehen zunächst einen beliebigen *Eckpunkt* (oder auch einen der beiden Endpunkte) der Curve C in Betracht und legen durch denselben irgend eine Gerade, welche sowohl die positive ξ-Axe als die positive η-Axe schneidet und zugleich zwischen diesen beiden Schnittpunkten niemals auf die concave Seite der Curve C übertritt. Ist $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$ die Gleichung einer solchen Geraden, wobei offenbar in Anbetracht des Spielraums, den wir derselben gelassen haben, für α und β *ganze positive* Zahlen angenommen werden dürfen, so liefert, wenn wir $x = \varkappa^\alpha$, $y = \varkappa^\beta$ setzen, einzig und allein das jenem Eckpunkte entsprechende Glied von $G_n(x, y)$ die niedrigste Potenz von $\varkappa$; und zwar ist dies die Potenz $\varkappa^{\alpha\xi + \beta\eta}$, wenn ξ und η die Coordinaten des Eckpunktes sind. Denn alle anderen Punkte P liegen wiederum ausserhalb der von der Linie $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$ und den Axen ξ und η gebildeten Dreiecks. Man sieht nun, dass auf den Curven

$$
(5)\qquad \begin{cases} x = \varkappa^{\alpha}, & y = \varkappa^{\beta}, \\ x = \varkappa^{\alpha}, & y = -\varkappa^{\beta}, \\ x = -\varkappa^{\alpha}, & y = \varkappa^{\beta}, \\ x = -\varkappa^{\alpha}, & y = -\varkappa^{\beta}, \end{cases}
$$

und überhaupt auf allen Curven von der Form (3) für die angenommenen Werthe von α und β im Nullpunkte nur dann gleichzeitig ein Minimum oder gleichzeitig ein Maximum der Function $G_n(x, y)$ stattfinden kann, wenn in dem betrachteten Gliede $x^{\xi} y^{\eta}$ dieser Function die Exponenten ξ und η beide gerade sind; und zwar findet alsdann, wenn der Coëfficient jenes Gliedes positiv ist, ein Minimum, wenn er negativ ist, ein Maximum statt; ist dagegen mindestens einer der beiden Exponenten ξ und η ungerade, so hat die Function $G_n(x, y)$ an der Stelle $(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Betrachten wir zunächst den letzten Fall eingehender! Offenbar wird bei geeigneter Bestimmung einer positiven Constanten a' die Function $G_n(x, y)$ auf den Curven (5) für genügend kleine Werthe von $\varkappa$ sowohl grösser als $a'\varkappa^{\alpha\xi+\beta\eta}$, als auch kleiner als $-a'\varkappa^{\alpha\xi+\beta\eta}$. Nennen wir nun ε die kleinere der beiden Zahlen α und β, und r, wie früher, den Radiusvector $\sqrt{x^2+y^2}$, so ist r auf den betrachteten Curven von der Ordnung $\varkappa^{\varepsilon}$ und das Anfangsglied in der Entwickelung der Function $G_n(x, y)$ von der Ordnung $r^{\frac{\alpha\xi+\varkappa\eta}{\varepsilon}}$. Es wird daher (wiederum bei geeigneter Bestimmung einer positiven Constante a'') die Function $G_n(x, y)$ auf den Curven (5) sowohl grösser als $a''r^{\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}}$ als auch kleiner als $-a''r^{\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}}$. Nun ist klar, dass die Veränderung der Function $G_n(x, y)$ auf den beiden unbekannten Extremcurven mindestens ebenso rasch vor sich gehen muss, d. h. dass auf einer derselben $G_n(x, y)$ sicherlich auch grösser als $a''r^{\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}}$, auf der andern kleiner als $-a''r^{\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}}$ sein wird. Ist die Grösse $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ höchstens gleich n, so sind damit überhaupt alle hinsichtlich der Function G_n gestellten Fragen erledigt; denn es folgt in diesem Falle, dass das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ deutlich genug ist, um für eine beliebige Function $f(x, y)$, von der sie die Entwickelungsglieder 1ter bis

n^{ter} Ordnung bildet, massgebend zu sein. Ist dagegen $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ grösser als n, so zeigt die Untersuchung des einzelnen Eckpunktes zwar, dass die Function $G_n(x, y)$ selbst kein Maximum oder Minimum hat, aber sie entscheidet nicht die Frage, ob die Aenderung auf den Extremcurven genügend stark ist, um für die Function $f(x, y)$ den Ausschlag zu geben. Indessen ist es möglich, dass man durch Ausnutzung des Spielraumes, den die Gerade $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$ und mit ihr die Zahlen α und β haben, auch dann noch die Grösse $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ gleich n oder kleiner als n machen kann, wenn dieses bei der zufällig getroffenen Wahl von α und β nicht der Fall war. Offenbar entspricht (für eine wirkliche Ecke) der *grösste* und der *kleinste* Werth jenes Quotienten $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ den beiden zur Curve C gehörigen Geraden, die in der betrachteten Ecke zusammenstossen. Da wir aber diese Geraden nachher noch besonders untersuchen werden, ist die Erörterung der entsprechenden Werthe von $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ an *dieser* Stelle unnöthig; wie wir denn überhaupt den Quotienten $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ hier nur zum Zwecke einer vorläufigen Orientirung über die verschiedenen Möglichkeiten erwähnt haben.

Im anderen Falle, wenn beide Exponenten ξ und η in dem betrachteten Gliede von $G_n(x, y)$ gerade sind, erkennt man aus der Untersuchung der einzelnen Ecke noch weniger als in dem eben besprochenen Falle. Man sieht nämlich alsdann nur erstens, dass auf den jenem einen Eckpunkte von C entsprechenden Curven (5) gleichzeitig ein Minimum, resp. Maximum von $G_n(x, y)$ im Nullpunkte stattfindet, und eventuell, wenn $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ höchstens gleich n ist, noch zweitens, dass das Verhalten auf *einer* der beiden Extremcurven allerdings die genügende Deutlichkeit besitzt. Dagegen bleibt das Verhalten auf der anderen Extremcurve durchaus ungewiss, man kann nicht einmal über das Vorzeichen auf derselben irgend einen Schluss ziehen, geschweige denn auf den Grad der Deutlichkeit. In diesem Falle muss man also die Discussion schon weiter führen, wenn man überhaupt nur die Antwort auf die erste der beiden Hauptfragen, nämlich die Frage nach dem Maximum oder Minimum von $G_n(x, y)$ erhalten will.

Es sind dann zunächst der Reihe nach alle Eckpunkte der Curve C einzeln zu untersuchen, und, falls sich unter ihnen keiner findet, von dessen Coordinaten ξ, η wenigstens eine ungerade ist, und für den zugleich

$$\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon} \leqq n$$

werden kann, die Ergebnisse dieser Einzeluntersuchungen mit einander zu vergleichen. Sind die Coordinaten irgend einer Ecke nicht beide gerade (ohne dass sich jedoch die obige Ungleichung erfüllen liesse), oder aber kommen unter den Gliedern von $G_n(x, y)$, welche Eckpunkten entsprechen, wenigstens zwei $c\,x^\xi y^\eta$ und $c'\,x^{\xi'} y^{\eta'}$ vor, in denen alle Exponenten gerade Zahlen und die Coëfficienten c und c' von entgegengesetztem Zeichen sind, so zeigt dies wenigstens, dass $G_n(x, y)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum im Nullpunkte besitzt. Sind dagegen in allen denjenigen Gliedern $c\,x^\xi y^\eta$ von $G_n(x, y)$, welche Ecken der Curve C angehören, beide Exponenten ξ und η gerade und zugleich die Coëfficienten c sämmtlich von demselben Vorzeichen, so bleibt auch schon unsere erste Hauptfrage vorläufig noch unentschieden.

5. Unter Umständen können aber dann die *Endpunkte* der Curve C dieselbe entscheiden. Auch für sie werden die angedeuteten Untersuchungen auszuführen sein, und zwar in derselben Weise, wie für die eigentlichen Eckpunkte. Es tritt diesen gegenüber nur der eine Unterschied ein, dass in jedem Endpunkte bloss eine einzige Gerade der Curve C ausmündet und man daher in dem Werthe, welchen die Ordnungszahl $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ für diese Gerade annimmt, nur entweder den grössten oder den kleinsten von den, im Endpunkte ihr gestatteten Werthen erhält. Offenbar wird man aber den andern Extremwerth jener Zahl für den einen Endpunkt (den Ausgangspunkt unserer Construction) dadurch erhalten, dass man (in dem entsprechenden Gliede von $G_n(x, y)$) $x = 0$, für den zweiten dadurch, dass man $y = 0$ setzt. Verschwindet dieses Glied hierbei nicht, so giebt seine Ordnung unmittelbar jenen anderen Extremwerth an. Liegt dagegen der erste Endpunkt nicht auf der y-Axe oder der zweite nicht auf der x-Axe, so enthält $G_n(x, y)$ den Factor x oder y und wird also durch jene Substitution identisch Null, sodass in diesem Falle etwa von einer unendlichhohen Ordnungszahl

$\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ gesprochen werden und von einem Maximum oder Minimum der Function $G_n(x, y)$ keinenfalls die Rede sein kann. Indem wir übrigens in dieser Weise bei der Discussion der beiden Endpunkte von C gleich die Curven $x = 0$ und $y = 0$ in Betracht ziehen, werden wir in die Lage gesetzt, später die beiden Coëfficienten a_α und b_β in den Reihen (3) immer von Null verschieden anzunehmen.

6. Hat auch die Untersuchung der beiden Endpunkte noch keine vollständige Entscheidung der gestellten Fragen gegeben, so sind nun diejenigen Werthe von α und β in Betracht zu ziehen, für welche gleichzeitig mehrere Glieder von $G_n(x, y)$, deren entsprechende Punkte *auf einer und derselben in der Curve C enthaltenen Geraden liegen*, Beiträge zu der niedrigsten Potenz von $\varkappa$ liefern. Wie sind die Zahlen α und β einer bestimmten jener Geraden entsprechend zu wählen? Offenbar muss, wenn $\xi\eta$ und $\xi'\eta'$ zwei Punkte der Geraden sind,

$$\alpha\xi + \beta\eta = \alpha\xi' + \beta\eta', \text{ d. h. } \alpha : \beta = \eta - \eta' : \xi' - \xi$$

werden; und durch diese Proportion ist α und β vollständig definirt, wenn man noch festsetzt, dass diese beiden ganzen positiven Zahlen frei von gemeinschaftlichen Divisoren sein sollen. Wir bestimmen jetzt der Reihe nach die Zahlen α, β für alle in der Curve C enthaltenen Geraden. Bilden wir dann jedesmal die Ausdrücke

$$(3)\qquad \begin{cases} x = a_\alpha \varkappa^\alpha, \\ y = b_\beta \varkappa^\beta + b_{\beta+1}\varkappa^{\beta+1} + \cdots \end{cases}$$

und lassen die Coëfficienten a_α, b_β, ... zunächst unbestimmt, so rührt (nach Nr. 3) in der Entwickelung der Function $G_n(x, y)$ die niedrigste Potenz von $\varkappa$ immer nur von denjenigen Gliedern dieser Function her, welche Punkten der in Betracht gezogenen Geraden entsprechen; und zwar treten darin, wie bereits früher bemerkt wurde, von den in (3) vorkommenden Coëfficienten nur die ersten, nämlich a_α und b_β auf. Es ist nun jedesmal zu untersuchen, wie jene niedrigste Potenz sich für ganz beliebige Werthe der Grössen a_α und b_β, von denen jedoch keine gleich Null sein darf, verhält: ob sie beständig positiv oder beständig negativ oder beider Zeichen fähig ist, oder ob sie endlich zwar verschwinden, aber nicht das Vorzeichen wechseln kann. Tritt einer der drei ersten Fälle ein, so ist die Untersuchung für die

betreffende Gerade abgeschlossen; auf allen Curven (3), die der betrachteten Geraden α, β entsprechen, beginnt dann die Entwickelung der Function $G_n(x, y)$ sicher mit der Potenz $x^{\alpha\xi+\beta\eta}$ und die Function selbst wird also, wenn wieder ε die kleinere der beiden Zahlen α und β bezeichnet, auf jeder dieser Curven in der Nähe des Nullpunktes von der Ordnung $r^{\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}}$. Im letzten Falle hingegen wird, falls nicht die für eine andere Gerade angestellte Untersuchung bereits definitive Ergebnisse hinsichtlich des Verhaltens der Function G_n zu Tage gefördert hat, die Hinzufügung der höheren Coëfficienten $b_{\beta+1}, \ldots$ nothwendig.

Wir wollen zunächst den Fall in Betracht ziehen, dass man für alle den verschiedenen Geraden von C entsprechenden Exponenten α, β, auch ohne Berücksichtigung der höheren Coëfficienten $b_{\beta+1}, \ldots$ abgeschlossene Resultate erhalten hat, also nirgends dem letzten Falle begegnet ist. Dann ist die Untersuchung überhaupt beendet. Denn sie ist bei der Betrachtung der Ecken und der Geraden von C für alle in der Form (3) darstellbaren Curven durchgeführt worden, die nicht mit der x- oder der y-Axe zusammenfallen, und bei der Discussion der beiden Endpunkte von C auch für die Curven $x = 0$ und $y = 0$ selbst, und unter allen diesen Curven müssen sich auch die beiden Extremcurven befinden, welche für das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ entscheidend sind. Es ergiebt sich nun entweder, dass alle jene Curven bei der Entwickelung von $G_n(x, y)$ ein positives Anfangsglied, oder dass alle ein negatives Anfangsglied, oder dass einige ein positives, andere ein negatives Anfangsglied liefern. Im ersten Falle hat $G_n(x, y)$ im Nullpunkte ein Minimum, im zweiten ein Maximum, im dritten endlich weder Minimum noch Maximum. In allen drei Fällen aber ist das Verhalten von $G_n(x, y)$ auf jeder der beiden Extremcurven durch eine Potenz von r gegeben, deren Exponent einer der im Laufe der Untersuchung vorgekommenen Ordnungszahlen $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ ist. Findet ein Maximum oder Minimum statt, so gelten für die beiden Extremcurven offenbar der *grösste* und der *kleinste* aller im Laufe der Untersuchung vorgekommenen Werthe von $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$; tritt weder Maximum, noch Minimum ein, so gilt für die eine Extremcurve der *kleinste* vorgekommene Werth von $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$, wel-

cher einem *positiven* Anfangsgliede entspricht, für die andere der *kleinste* Werth derselben Zahl, welcher ein *negatives* Anfangsglied geliefert hat. In allen Fällen sind die Werthe von $\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varepsilon}$ für die beiden Extremcurven jetzt mit Sicherheit festgestellt und damit die Deutlichkeit des Verhaltens von $G_n(x, y)$ erkannt; dasselbe ist für eine beliebige Function $f(x, y)$, deren Entwickelungsglieder erster bis n^{ter} Ordnung G_n bildet, massgebend oder nicht, jenachdem beide Werthe jener Ordnungszahl höchstens gleich n sind oder nicht.

Es bleibt aber noch übrig zu zeigen, wie man für eine bestimmte Gerade der Curve C entscheidet, welcher von unsern vier Fällen eintritt. Zur Beantwortung dieser Frage reichen die für die Untersuchung *homogener* Ausdrücke angegebenen Hülfsmittel aus. Der Coëfficient des Anfangsgliedes in der Entwickelung des Werthes, welchen $G_n(x, y)$ durch die einer bestimmten Geraden α, β von C zugehörigen Substitutionen (3) erhält, ist nämlich aus den Coëfficienten derjenigen Glieder der Function $G_n(x, y)$, welche Punkten der betrachteten Geraden entsprechen, und aus den beiden unbestimmten Grössen a_α und b_β zusammengesetzt und es handelt sich darum, ihn hinsichtlich seines Vorzeichens für beliebige Werthe der letzten beiden Grössen zu prüfen. Setzen wir aber, was die Willkürlichkeit derselben nicht beschränkt,

$$a_\alpha = \pm a^\alpha, \quad b_\beta = \pm b^\beta,$$

d. h. also geben wir den Substitutionen (3) die Form

$$x = \pm a^\alpha \varkappa^\alpha, \quad y = \pm b^\beta \varkappa^\beta + b_{\beta+1} \varkappa^{\beta+1} + \dots,$$

so wird offenbar der zu untersuchende Coëfficient homogen in a und b, und seine Discussion damit zurückgeführt auf die Discussion von *vier homogenen* Functionen der Grössen a und b (entsprechend den vier Vorzeichencombinationen), welche sich auf zwei, resp. auf eine reduciren, wenn alle Glieder von $G_n(x, y)$, deren Punkte der betrachteten Geraden entsprechen, in Bezug auf x oder in Bezug auf y, resp. in Bezug auf beide Variabeln von gerader Ordnung sind. Erweisen sich diese homogenen Functionen sämmtlich als *definit* oder als *indefinit*, so tritt für die betrachtete Gerade einer der ersten drei Fälle ein; ist aber irgend eine derselben semidefinit, so erhalten wir den vierten Fall.

7. Bevor wir zur Untersuchung dieses vierten Falles übergehen, wollen wir noch zeigen, dass die Untersuchung der *ein-*

zelnen Ecken, mit welcher wir die Discussion begonnen haben, durch die jetzt angegebene Erörterung der verschiedenen in C enthaltenen Geraden *ganz und gar überflüssig wird.* Zu dem Zwecke fassen wir eine der *beiden* Geraden von C ins Auge, welche in einer beliebigen Ecke P zusammenstossen, und zwar, um die Vorstellung zu fixiren, diejenige, welche von P aus gegen die ξ-Axe gerichtet ist. Sind α und β die derselben entsprechenden Exponenten, so ist $x = \pm a^\alpha \varkappa^\alpha$, $y = \pm b^\beta \varkappa^\beta$ zu setzen, und derjenige homogene Ausdruck der Grössen a und b zu untersuchen, welcher den ersten Entwickelungscoëfficienten von $G_n(x, y)$ bildet. Nun enthält in diesem Ausdrucke das dem Punkte P entsprechende Glied zugleich die höchste Potenz von b und die niedrigste von a; man wird also dadurch, dass man a sehr klein gegen b macht, immer erreichen können, dass der ganze Ausdruck das Vorzeichen jenes Gliedes annimmt. Dasselbe kann bei der anderen in dem Eckpunkte P mündenden Geraden dadurch bewirkt werden, dass man umgekehrt b klein gegen a macht. Was aber die vorher mit $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ bezeichnete Ordnung betrifft, welche das zur Ecke P gehörige Glied von $G_n(x, y)$ im Vergleiche zu r besitzt, so sind, wie schon in Nr. 4 erwähnt wurde, der grösste und der kleinste aller Werthe, die jene Ordnungszahl $\frac{\alpha\beta + \xi\eta}{\varepsilon}$ in dem Eckpunkte überhaupt annehmen kann, eben diejenigen, welche den beiden in P zusammenstossenden Geraden der Curve C entsprechen. In derselben Weise wird durch die Discussion der *einen* Geraden von C, die in einem *Endpunkte* mündet, sowohl das Vorzeichen des ihm entsprechenden Gliedes von $G_n(x, y)$ als auch (Nr. 5) der grösste oder der kleinste von allen den Werthen erkannt, deren $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ in dem Endpunkte fähig ist. Man braucht also in der That schliesslich *nur die Geraden der Curve C, sowie* (für $x = 0$, resp. $y = 0$) *die beiden Glieder von $G_n(x, y)$ zu untersuchen, welche dem ersten und dem letzten Punkte dieser Curve entsprechen.*

8. Wir kommen jetzt schliesslich zu dem Falle, wo die Untersuchung der verschiedenen in der Curve C enthaltenen Geraden und der Endpunkte von C noch nicht zu abgeschlossenen Resultaten geführt hat, indem für eine oder mehrere jener Geraden die niedrigste Potenz in der Entwickelung von $G_n(x, y)$ ohne eines Zeichenwechsels fähig zu sein, doch durch geeignete

Bestimmung der beiden Grössen a_α und b_β, oder, wenn man nach Nr. 7, $a_\alpha = \pm a^\alpha$, $b_\beta = \pm b^\beta$ setzt, bei passender Wahl der Vorzeichen und des Verhältnisses $a : b$, zum Verschwinden gebracht werden kann. In diesem Falle wird möglicher Weise die eine von beiden Extremcurven, oder unter Umständen beide, in der Schaar derjenigen Curven (3) zu suchen sein, für welche jener erste Entwickelungscoëfficient verschwindet. Existiren mehrere Geraden α, β von C oder auch zu einer und derselben Geraden mehrere Werthe von $a : b$, resp. mehrere Zeichencombinationen, welche dieses Verschwinden bewirken, so wird die Untersuchung für jede einzelne solche Werth- und Zeichenzusammenstellung weiter zu führen sein. Man bilde alsdann für jeden einzelnen Fall mit den betreffenden bestimmten Werthen von α, β und $a : b$ und mit den bezüglichen Vorzeichen die Substitutionen:

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \pm a^\alpha \varkappa^\alpha, \\ y = \pm \varkappa^\beta (b^\beta + \varkappa') \end{cases}$$

und verwandle dadurch die Function $G_n(x, y)$ in eine Function $G'(\varkappa, \varkappa')$ von $\varkappa$ und $\varkappa'$. Dann untersuche man die Function $G'(\varkappa, \varkappa')$ der beiden Argumente $\varkappa$ und $\varkappa'$ genau in derselben Weise, wie vorher die Function $G_n(x, y)$ der beiden Argumente x und y. Man construire also wieder in einem rechtwinkligen Axensystem $\xi'\ \eta'$ diejenigen Punkte, deren Coordinaten den Exponenten ξ' und η' von $\varkappa$ und $\varkappa'$ in den verschiedenen Gliedern des Ausdrucks $G'(\varkappa\ \varkappa')$ gleich sind, und zeichne die zugehörige Curve C'. Dann untersuche man auf die frühere Weise die verschiedenen Geraden, welche diese Curve bilden, sowie denjenigen (End-) Punkt von C', welcher auf der ξ'-Axe oder ihr zunächst liegt. Der andere Endpunkt (der Anfangspunkt) der Curve C' kommt nämlich hier nicht mehr in Betracht, weil der Fall $\varkappa = 0$ nach (6) $x = 0$, $y = 0$ nach sich ziehen würde und daher auszuschliessen ist, während der Fall $\varkappa' = 0$ nicht übergangen werden darf. Man erhält so, den verschiedenen Graden von C' entsprechend, eine Reihe von Substitutionen

$$\varkappa = \pm a'^{\alpha'} \varkappa''^{\alpha'}, \quad \varkappa' = \pm b'^{\beta'} \varkappa''^{\beta'},$$

welche, in $G'(\varkappa, \varkappa')$ eingeführt, bei unbestimmten Werthen von a' b', jedesmal ein Anfangsglied

$$A'' \varkappa''^{\alpha' \xi' + \beta' \eta'}$$

der Entwickelung dieser Function liefern. Dieses Anfangsglied ist in Bezug auf $\varkappa$ von der Ordnung:

$$\varkappa^{\frac{\alpha'\xi' + \beta'\eta'}{\alpha'}}$$

und in Bezug auf r also von der Ordnung:

$$r^{\frac{\alpha'\xi' + \beta'\eta'}{\alpha'\varepsilon}},$$

wenn ε, wie vorher, die kleinere der beiden Zahlen α und β bedeutet. Es kommt dann zur Entscheidung des Maximums oder Minimums von $G_n(x, y)$ wieder auf den Coëfficienten jenes Anfangsgliedes, zur Entscheidung des Deutlichkeitsgrades auf den Quotienten $\frac{\alpha'\xi' + \beta'\eta'}{\alpha'\varepsilon}$ an. Ausserdem ist noch das Verhalten der Function $G'(\varkappa\varkappa')$ für $\varkappa' = 0$ zu untersuchen, welches sich durch das dem letzten Punkte von C' entsprechende Glied der Function offenbart.

Treten auch hier wieder unbestimmte Resultate auf, so ist das Verfahren in derselben Weise fortzusetzen. Den in Nr. 2 angestellten Ueberlegungen zu Folge muss die Untersuchung nach einer endlichen Anzahl von Operationen schliesslich von selbst ihren Abschluss finden, falls nicht $G_n(x, y)$ einen quadratischen Factor enthält, durch dessen Nullsetzen eine den Nullpunkt enthaltende reelle Doppelcurve definirt wird. Es lassen sich also — wenn man diesen Fall ausschliesst — die beiden Fragen nach dem Eintreten oder Nichteintreten eines Maximums oder Minimums und nach dem Grade der Deutlichkeit, welchen das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ zeigt, auf dem angegebenen Wege jedesmal mit Sicherheit entscheiden.

§ 8.

Beispiele.

1., $G_4(x, y) = y^2 - (p^2 + q^2)x^2y + p^2q^2x^4$

(Beispiel von Peano). Die den einzelnen Gliedern von $G_4(x, y)$ entsprechenden Punkte der $\xi\eta$-Ebene sind (02), (21), (40); die Curve C verbindet dieselben in der Reihenfolge, in welcher sie eben genannt wurden, und zwar ist C hier eine einzige Gerade. Es sind zunächst die den Endpunkten entsprechenden Glieder y^2 und $p^2q^2x^4$ einzeln zu untersuchen, und zwar das erste für

$x = 0$, das letzte für $y = 0$; es zeigt sich, dass beide positiv und resp. von der Ordnung r^2 und r^4 sind. Es bleibt nun noch übrig, die Gerade C selbst zu untersuchen. Die Gleichung derselben ist $\xi + 2\eta = 4$; ihr entspricht die Proportion $\alpha : \beta = 1 : 2$ und es ist daher

$$x = a\varkappa, \quad y = \pm\, b^2\varkappa^2$$

zu setzen, wodurch $G_4(x, y)$ in:

$$(b^4 \pm (p^2 + q^2)\, a^2 b^2 + p^2 q^2 a^4)\varkappa^4$$

übergeht. Zur Untersuchung des homogenen Ausdrucks

$$b^4 \pm (p^2 + q^2) a^2 b^2 + p^2 q^2 a^4$$

löst man denselben am Einfachsten in seine Factoren auf. Dies giebt zunächst $(b^2 \pm p^2 a^2)\,(b^2 \pm q^2 a^2)$; und für das untere Vorzeichen weiterhin

$$(b + pa)\,(b - pa)\,(b + qa)\,(b - qa)\,.$$

Es sind also, wenn das untere Vorzeichen gewählt wird, reelle einfache Linearfactoren vorhanden, die Form ist daher indefinit und es findet kein Maximum oder Minimum der Function $G_4(x, y)$ statt.

Da auch die der Geraden C entsprechende Potenz $\varkappa^4$ von der Ordnung r^4 ist $\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{s} = \frac{4}{1}\right)$, so verhält sich zugleich die Function $G_4(x, y)$ genügend deutlich, um massgebend für jede beliebige Function $f(x, y)$ zu sein, deren Entwickelungsglieder 1ter bis 4ter Ordnung sie bildet, d. h. jede Function, welche aus $G_4(x, y)$ durch Vermehrung um Glieder von 5ter und höherer Dimension entsteht, theilt mit $G_4(x, y)$ die Eigenschaft, im Nullpunkte weder ein Maximum noch ein Minimum zu haben. —

$$2., \quad G_3(x, y) = y^2 + x^2 y\,.$$

Die den beiden Gliedern der Function entsprechenden Punkte $\xi\eta$ sind (02) und (21); die Curve C besteht aus der sie verbindenden Geraden. Für den ersten Endpunkt ist $x = 0$, für den andern $y = 0$ zu setzen. Dies giebt für $G_3(x, y)$ resp. die Werthe y^2 und 0, und man sieht schon, dass ein Maximum oder Minimum jedenfalls nicht stattfinden kann. Um den Grad der Deutlichkeit zu erkennen, welchen das Verhalten der Function aufweist, ist noch die Linie C in Betracht zu ziehen. Dieselbe hat die nämliche Gleichung $\xi + 2\eta = 4$, wie im ersten Beispiel; man

muss also wieder $x = a\varkappa$, $y = \pm b^2\varkappa^2$ setzen, wodurch $G_3(x, y)$ in $(b^4 \pm a^2 b^2)\varkappa^4$ übergeht. Die dem unteren Vorzeichen entsprechende Form $b^4 - a^2 b^2$ oder $b^2(b^2 - a^2)$ ist offenbar indefinit, $G_3(x, y)$ kann daher sowohl positiv als negativ werden. Indessen ist $\varkappa^4$ von der Ordnung $r^4 \left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{6} = \frac{4}{4}\right)$, also von höherer Ordnung als r^3. Es hat daher die Function $G_3(x, y)$ auf allen denjenigen Curven, wo sie negativ wird, eine höhere Grössenordnung als r^3, woraus folgt, dass das Verhalten jener Function für eine beliebige Function $f(x, y)$, deren Glieder 1ter bis 3ter Dimension sie bildet, *nicht* massgebend ist. In der That hat z. B. die Function

$$f(x, y) = y^2 + x^2 y + x^4$$

im Nullpunkte ein richtiges Minimum (siehe das folgende Beispiel).

$$3., \quad G_4(x, y) = y^2 + x^2 y + x^4.$$

Dass diese Function ein Minimum hat, erkennt man leicht, wenn man sie in der Form $\left(y + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^4$ schreibt. Aber ist das Minimum deutlich genug, um massgebend für eine beliebige Function $f(x, y)$ zu sein, die in den Gliedern 1ter bis 4ter Ordnung mit jener Function übereinstimmt?

Um hierüber zu entscheiden, müssen wir unsere allgemeine Methode in Anwendung bringen. Die Punkte $\xi\eta$ und die Curve C sind dieselben, wie im Beispiel (1). Die Endpunkte geben für $G_4(x, y)$ die positiven Werthe y^2 und x^4, deren Ordnung resp. r^2 und r^4, also jedenfalls nicht höher als r^4 ist. Für die Gerade C ist wieder $x = a\varkappa$, $y = \pm b^2\varkappa^2$ zu setzen, wodurch

$$G_4(x, y) = (b^4 \pm a^2 b^2 + a^4)\varkappa^4$$

wird. Die Formen $b^4 + a^2 b^2 + a^4$ und $b^4 - a^2 b^2 + a^4$ sind beide definit und positiv, was man am leichtesten durch die Transformation

$$b^4 \pm a^2 b^2 + a^4 = (b^2 \pm \tfrac{1}{2}a^2)^2 + \tfrac{3}{4}a^4$$

erkennt. Es findet also ein Minimum statt, und da auf keiner Curve die Ordnung von $G_4(x, y)$ höher als r^4 ist, so haben auch alle Functionen $f(x, y)$, deren Glieder 1ter bis 4ter Dimension gleich $G_4(x, y)$ sind, im Nullpunkte ein Minimum.

$$4., \quad G_4(x, y) = y^2 - 2x^2 y + x^4 + y^4.$$

Schreibt man $G_n(x, y) = (y - x^2)^2 + y^4$, so sieht man unmittelbar, dass ein Minimum stattfindet, es ist indessen nicht erkennbar, ob dasselbe einen genügenden Grad der Deutlichkeit besitzt, um für beliebige Functionen $f(x, y)$, deren Glieder 1ter bis 4ter Dimension mit $G_4(x, y)$ übereinstimmen, massgebend zu sein. Wir führen daher die Untersuchung nach unserer allgemeinen Methode durch.

Die Punkte $\xi\eta$ sind hier (02), (21), (40), (04). Die Curve C besteht hier wieder aus der einen Geraden, welche die drei Punkte (02), (21), (40) verbindet und die Gleichung $\xi + 2\eta = 4$ hat. Der Punkt (04) kommt, da er nicht auf C liegt, zunächst gar nicht in Betracht. Für die beiden Endpunkte von C wird, wie vorher, $G_4(x, y)$ resp. gleich y^2 oder gleich x^4, also positiv und höchstens von der Ordnung r^4. Setzt man, der Geraden C entsprechend, $x = a\varkappa$, $y = \pm b^2\varkappa^2$, so enthält das Anfangsglied der Entwickelung von $G_4(x, y)$ nach Potenzen von $\varkappa$ die Gestalt

$$(b^4 \mp 2\, a^2 b^2 + a^4)\, \varkappa^4.$$

Der Coëfficient von $\varkappa^4$ ist hier für das untere Zeichen definit und positiv, für das obere hingegen semidefinit, indem er zwar (für $a^2 = b^2$) verschwinden, aber nicht negativ werden kann. Es lässt sich also vorläufig nur behaupten, dass die Function $G_4(x, y)$ positiv und höchstens von der Ordnung r^4 auf allen denjenigen Curven ist, welchen bei der Darstellung durch einen Parameter $\varkappa$ nicht die Anfangsglieder $\pm a\varkappa$ für x und $a^2\varkappa^2$ für y (resp. $\pm a\varkappa^m$ für x und $a^2\varkappa^{2m}$ für y, da nur das Verhältniss der Exponenten α und β bestimmt ist) zukommen. Für diese speciellen Curven muss die Untersuchung weiter geführt werden.

Wir setzen, entsprechend unsern allgemeinen Vorschriften,

$$x = \varkappa, \quad y = \varkappa^2\,(1 + \varkappa'),$$

indem wir $\varkappa$ statt $a\varkappa$ schreiben, wodurch offenbar die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird. Dann geht $G_4(x, y)$ über in:

$$G'(\varkappa\varkappa') = \varkappa^4\varkappa'^2 + \varkappa^8\,(1 + \varkappa')^4.$$

Der Ausdruck $G'(\varkappa\varkappa')$ könnte nun auf demselben Wege, wie vorher der Ausdruck $G_4(x, y)$ geprüft werden. Man übersieht indessen direct, dass derselbe immer positiv ist, da ja der Fall $\varkappa = 0$ hier ausgeschlossen werden muss.

Die Function $G_4(x, y)$ hat also auf allen Curven der letzten Art, ebenso wie auf allen früheren und somit sicher auch auf

den beiden massgebenden Extremcurven ein Minimum im Nullpunkte, woraus folgt, dass ein Minimum überhaupt stattfindet. Indessen ist die Grössenordnung der Functionswerthe auf einer der beiden Extremcurven durch eine sehr hohe Potenz von r (die 8te) gegeben; denn die Entwickelung von $G'(\varkappa\varkappa')$ fängt, sobald $\varkappa'$ der zweiten oder einer höheren Potenz von $\varkappa$ proportional gesetzt wird, mit $\varkappa^8$ an, und $\varkappa$ hat selbst die Ordnung des Radius r. Das Verhalten der Function $G_4(x, y)$ ist daher, obschon dieselbe selbst ein deutliches Minimum zeigt, für eine beliebige Function $f(x, y)$, deren Glieder 1ter bis 4ter Dimension sie bildet, nicht massgebend. In der That hat z. B. die Function $f(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^4 + y^4 - x^6$ kein Minimum. Denn nähert man sich dem Nullpunkte auf der Curve $y - x^2 = 0$, auf welcher $f(x, y) = x^6(x^2 - 1)$ ist, so tritt im Nullpunkte sogar ein Maximum ein.

5., Wir geben noch ein Beispiel, bei welchem die Curve C nicht, wie in den vorhergehenden Fällen, aus einer einzigen Geraden, sondern aus mehreren geradlinigen Stücken besteht. Es sei

$$G_{12}(x,y) = x^8y^4 - 3x^4y^3 + x^6y^2 - 3xy^7 + y^8 - 10x^{10}y + 5x^{12}.$$

Von den 7 Punkten, welche man, entsprechend den 7 Gliedern des vorstehenden Ausdruckes, in der $\xi\eta$-Ebene zu construiren hat, fallen 5 auf die Curve C, nämlich der Reihe nach die Punkte (0,8), (2,4), (4,3), (6,2), (12,0); die beiden übrigen Punkte (1,7) und (10,1) kommen überhaupt nicht in Betracht. Den Endpunkten von C entsprechen die Ausdrücke y^8 und x^{12}, welche positiv und resp. von der Grössenordnung r^8 und r^{12} sind. Die drei in C enthaltenen Geraden haben resp. die Gleichungen

$$2\xi + \eta = 8,$$
$$\xi + 2\eta = 10,$$
$$\xi + 3\eta = 12.$$

Für die erste derselben ist also $x = a^2\varkappa^2$, $y = b\varkappa$,

für die zweite $x = a\varkappa$, $y = \pm b^2\varkappa^2$,

für die dritte $x = a\varkappa$, $y = b^3\varkappa^3$

zu setzen. Dies giebt für $G_{12}(x, y)$ die drei Anfangsglieder:

$$(b^8 + a^4b^4)\varkappa^8 = b^4(b^4 + a^4)\varkappa^8,$$
$$(a^2b^8 \mp 3a^4b^6 + a^6b^4)\varkappa^{10} = a^2b^4((a^2 \mp b^2)^2 \mp a^2b^2)\varkappa^{10},$$
$$(a^6b^6 + 5a^{12})\varkappa^{12} = a^6(b^6 + 5a^6)\varkappa^{12}.$$

Dieselben sind resp. von den Grössenordnungen r^8, r^{10}, r^{12}; das erste und dritte ist ferner durchaus positiv, das zweite hingegen wird bei der Wahl des oberen Vorzeichens auch negativ (z. B. für $b^2 = a^2$). Es kann daher weder ein Maximum noch ein Minimum stattfinden, und zwar wird $G_{12}(x, y)$ auf einer der beiden unbekannten Extremcurven sicher das der ersten Geraden von C entsprechende Verhalten zeigen, nämlich in der Nähe des Nullpunktes positiv und proportional r^8 sein, auf der anderen Extremcurve hingegen entsprechend der zweiten jener Geraden, schliesslich negativ und proportional r^{10} werden. Das Verhalten der Function ist also genügend deutlich, um den Schluss zu motiviren, dass *jede beliebige* Function $f(x, y)$, deren Glieder erster bis 12ter Dimension mit $G_n(x, y)$ übereinstimmen, ebenfalls weder ein Maximum noch ein Minimum im Nullpunkte haben kann. —

Axel Harnack, *Existenzbeweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume.*

I.

Die Probleme in der Ebene.

§ 1.

Allgemeine Sätze.

1. Für jedes geradlinig begrenzte Polygon, auch wenn dasselbe einspringende Ecken besitzt, ist die Aufgabe als gelöst anzusehen: Eine Function $u(x, y)$ zu construiren, welche nebst ihren Ableitungen im Innern des Polygons allenthalben eindeutig und stetig ist, daselbst der Bedingung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt, und am Rande des Polygons vorgeschriebene Werthe besitzt. Eine Function dieser Art, die also innerhalb eines gegebenen Gebietes eine Lösung der partiellen Differentialgleichung und zwar ohne singuläre Punkte bildet, soll kurz eine »harmonische« in diesem Gebiete genannt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe ist auf zweierlei Weisen erreicht worden. Erstlich durch die gewissermassen expliciten Formeln, mittels deren die Herren Christoffel und Schwarz die conforme Abbildung jedes Polygones auf die Halbebene ausgeführt haben (Annali di Matem. S. II. t. I. und Journal f. Math. Bd. 70), zweitens durch die von Herrn Neumann angegebene »Methode des arithmetischen Mittels«, welche zunächst für Polygone ohne einspringende Ecken das Problem lösen lässt. Der Uebergang von diesen Polygonen zu den anderen ist durch die Combinationsmethoden ermöglicht, welche von den Herren Schwarz und Neumann gleichzeitig gefunden wurden.

und $\frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ über, wobei ϱ die Entfernung des Punktes s von den Punkten der Curve C' bedeutet. (§ 3. Nr. 3.) Es ist also

$$\lim u_2' = U_2' = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma'$$

für die Punkte des Randes C.

4. Wenn die Parallelcurve C' immer näher an den Rand C construirt wird, so ändern sich die Werthe der harmonischen Function u_2', sowie ihre Randwerthe U_2'. Es soll der Grenzwerth bestimmt werden, den U_2' bei diesem Processe erhält.

Zu dem Zwecke fixire man auf der Randcurve C einen beliebig kleinen Bogen σ_1, in dessen Innern der Randpunkt s liegt. Auf diesem Bogen σ_1 sollen die Werthe der stetigen Function U um weniger als eine beliebig kleine Grösse δ von einander differiren. Errichtet man in den Endpunkten dieses Bogens die Normalen, so schneiden diese auf der Parallelcurve C' einen Bogen σ_1' aus, dessen Punkte den Punkten von σ_1 entsprechen. Die übrigen Theile von C und C' seien mit σ_2 und σ_2' bezeichnet.

Das Integral U_2' zerlegt sich in zwei Theile, von denen sich der eine auf σ_1', der andere auf σ_2' bezieht; es ist

$$U_2' = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma_1' + \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma_2'.$$

Wenn nun die Curve C' immer mehr an die Curve C heranrückt, so gehen im zweiten Integral die Werthe von ϱ gleichmässig stetig in die Werthe über, welche die Entfernungen des Punktes s von den Punkten des Bogens σ_2 ausdrücken; also ist

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma_2' = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma_2,$$

oder mit Benutzung der oben definirten Bezeichnung

$$= \frac{1}{2\pi}\int U (d\sigma_2)_s.$$

Dieser Uebergang ist auch ein gleichmässiger in Bezug auf alle Randpunkte s.

Das andere Integral hat den Werth

$$\frac{1}{2\pi}\int U (d\sigma_1')_s.$$

Bezeichnet man mit U_s den Werth von U im Punkte s, und beachtet, dass die Werthe von U längs des Bogens σ_1, also auch σ_1', um weniger als δ von einander differiren, so ist dieses Integral gleich

$$\frac{1}{2\pi} U_s \int (d\sigma_1')_s \pm \left(< \delta \frac{1}{2\pi} \int \text{abs}\,(d\sigma_1')_s\right).$$

Es ist aber $\int (d\sigma_1')_s$ gleich dem negativen Winkel, unter welchem das Bogenelement σ_1' vom Punkte s aus erscheint. Dieser Winkel werde mit α' bezeichnet; also ist der vorstehende Werth gleich

$$-\frac{\alpha'}{2\pi} U_s \pm \left(< \delta \frac{1}{2\pi} \int \text{abs}\,(d\sigma_1')_s\right).$$

Lässt man die Curve C' an die Curve C beliebig heranrücken, so geht α' in den Winkel über, welchen die vom Punkte s an die Endpunkte des Bogens σ_1 gezogenen Linien mit einander bilden, und zwar in denjenigen Scheitelwinkel, der dem Innern der Fläche F zugekehrt ist. Bezeichnet man diesen Winkel mit α, so ist

$$\lim U_2' = -\frac{\alpha}{2\pi} U_s \pm \left(< \delta \frac{1}{2\pi} \int \text{abs}\,(d\sigma_1')_s\right) + \frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma_2)_s.$$

Indem man nun den Bogen σ_1 beliebig klein werden lässt, geht α in den Werth π über; ferner convergirt δ nach Null, während $\int \text{abs}\,(d\sigma_1)_s$ ebenfalls Null wird, weil unendlich viele Wendungen auf jedem Bogenstück ausgeschlossen waren; endlich wird

$$\frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma_2)_s = \frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma)_s.$$

Sonach erkennt man, dass

$$U_2 = \lim U_2' = -\tfrac{1}{2} U_s + \frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma)_s = -\tfrac{1}{2} U_s + \tfrac{1}{2} P_s$$

ist. Der Uebergang von U_2' in diesen Grenzwerth U_2 ist für alle Randpunkte s ein gleichmässig stetiger; d. h. zu jeder vorgeschriebenen beliebig kleinen Zahl ε lässt sich eine Lage der Curve C' angeben, sodass die Werthe der Function U_2', welche von dieser Curve geliefert werden, sich allenthalben auf C um weniger als ε von U_2 unterscheiden. Man erkennt dieses, indem man den gleichmässig stetigen Uebergang der Winkel α' in α, und der Secantenwinkel α in den Tangentenwinkel π beachtet.

Hieraus folgt, dass die Function

$$u_2 = \lim_{\sigma' = \sigma} \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial g}{\partial n'}\, d\sigma'$$

eine harmonische Function ist, die gleichmässig stetig in die Randwerthe U_2 übergeht. Denn dass u_2 eine harmonische Function ist, folgt aus dem ersten Satz im § 1, Nr. 1; und dass der Uebergang von u_2 in seine Randwerthe ein gleichmässiger ist, erkennt man folgendermassen. Man construire eine Parallelcurve $C^{(n)}$, wobei n bereits so fixirt ist, dass die Randwerthe $U_2^{(n)}$ auf C, welche von dieser Curve geliefert werden, von jeder der folgenden Functionen $U_2^{(n+m)}$ und also auch von den Werthen U_2 weniger differiren, als die Grösse $\frac{\delta}{3}$ beträgt. Bestimmt man alsdann zu allen Randpunkten s die Bereiche, innerhalb deren die Werthe von $u_2^{(n)}$ um weniger differiren, als die Grösse $\frac{\delta}{3}$ beträgt, so differiren in diesen Bereichen auch die Werthe einer jeden Function $u_2^{(n+m)}$, also auch die Werthe von u_2, um weniger als δ.

Für die Fläche F ist also erstlich eine harmonische Function u_1 construirt worden, mit den Randwerthen $\frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2} P_s$, sodann eine harmonische Function u_2 mit den Randwerthen $-\frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2} P_s$; also ist

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{2\pi}\int U (d\sigma)_x - \lim_{\sigma' = \sigma} \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial g}{\partial n'}\, d\sigma'$$

eine harmonische Function für das ganze Innere von F, welche gleichmässig stetig in die vorgeschriebenen Randwerthe U übergeht.

5. Besteht die Begrenzung aus einer analytischen Curve, so lässt sich die Green'sche Function in der Umgebung jedes regulären Randpunktes über den Rand hinaus fortsetzen. Dann ist auch das zweite Integral unmittelbar auf der Randcurve definirbar. Auch für einen aus Stücken analytischer Curven zusammengesetzten Rand ist dieses noch leicht nachweisbar.

Man kann nun auch ohne Schwierigkeit erkennen, dass durch das Auftreten von Ecken oder Spitzen in beliebiger endlicher Anzahl die Betrachtungen nur wenig modificirt werden, sodass das Resultat bestehen bleibt. Auch lässt sich die Unter-

suchung für den Fall ausdehnen, dass in der Randfunction einzelne Sprünge vorkommen, oder dass dieselbe überhaupt nur eine endliche integrirbare Function ist.

Im Vorstehenden ist, wie ich glaube, zum erstenmal ein vollständiger Beweis für beliebig berandete, einfach zusammenhängende Flächen gegeben; die Beschaffenheit der Randcurve ist nur insofern eingeschränkt, als nicht unendlich viele Wendungen oder Spitzen zugelassen worden sind.

Durch die bisherigen Beweise wurden ausser den überall convexen Flächen, und den durch Combinirungen aus denselben entstandenen, nur diejenigen erledigt, welche von analytischen Curvenstücken begrenzt sind, und zwar mit Hülfe der Combinationsmethoden. Dieselben erfordern aber eine Zerstückelung der Fläche und die conforme Abbildung eines jeden Stückes auf Kreissegmente.

Diese Combinationsmethoden bleiben noch nothwendig, wenn man den Beweis für mehrfach zusammenhängende Flächen oder bei vorgeschriebenen Unstetigkeitsbedingungen führen will. Man erhält dann einen Existenzbeweis für diese Flächen, wobei nun ebenfalls die Randcurven nicht mehr analytisch zu sein brauchen und aus den obigen Entwickelungen folgt, dass die modificirte Green'sche Formel, welche die Function vermittelst ihrer Randwerthe darstellt, auch hier noch gilt.

II.

Die Probleme im Raume.

Die für die Ebene angewandten Methoden und Lehrsätze sind absichsichtlich so formulirt worden, dass sie sich insgesammt — selbstverständlich mit Ausnahme der auf die conforme Abbildung bezüglichen Bemerkungen — auf die analogen Probleme des Newton'schen Potentiales im Raume ausdehnen lassen. Ich darf daher eine explicite Ausführung, die nur einzelne Erläuterungen erfordern, im Uebrigen aber keinerlei Schwierigkeiten mehr bieten würde, hier unterlassen, und mich auf folgende Bemerkungen beschränken.

1. Für jedes von Ebenen begrenzte Polyeder kann man die Existenz einer harmonischen Function, welche also im Innern

des Polyeders nebst ihren Ableitungen eindeutig und stetig ist, daselbst der Bedingung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

genügt, und an der Begrenzung vorgeschriebene Werthe U besitzt, als bewiesen voraussetzen. Die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels liefert einen Beweis für Polyeder, die überall längs ihren Kanten convex nach aussen sind, und durch die Combinationsmethoden lässt sich alsdann auch der Nachweis für Polyeder mit einspringenden Flächenwinkeln erbringen.

Demnach wird auch die Existenz der zu einem beliebigen Punkt O im Innern des Polyeders gehörigen Green'schen Function vorausgesetzt, d. h. derjenigen harmonischen Function, welche an der Begrenzungsfläche den Werth $\frac{1}{\varrho}$ hat, wobei ϱ die Entfernung der Begrenzungspunkte vom Punkte O bedeutet.

2. Eine im Innern des Raumes T harmonische Function kann nach Reihen entwickelt werden, deren Coëfficienten Kugelfunctionen sind. Beschreibt man um irgend einen Punkt im Innern von T als Mittelpunkt ein System von concentrischen Kugeln mit dem Radius ϱ, wobei ϱ alle Werthe von Null bis zu dem Werthe R annehmen kann, den die kleinste Entfernung des gewählten Mittelpunktes von den Punkten der begrenzenden Fläche liefert, so gilt für jeden Punkt auf diesen Kugelflächen eine Gleichung von der Form:

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n \varrho^n, \qquad C_n = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{1}{R^{n+2}} \int U P^{(n)} (\cos \gamma)\, d\sigma .$$

U bedeutet die Werthe der Function u auf der Kugel mit dem Radius R, $d\sigma$ das Flächenelement dieser Kugel, $P^{(n)}(\cos \gamma)$ in üblicher Bezeichung die Kugelfunction n^{ter} Ordnung.

Desgleichen gilt auch eine Integraldarstellung der Function u für jeden Punkt im Innern der Kugel R; es ist

$$u = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int \frac{U d\sigma}{(R^2 - 2R\varrho \cos \gamma + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder in analoger Bezeichnung wie früher, so dass $(d\sigma)_x$ den Raumwinkel angiebt, unter welchem das Flächenelement $d\sigma$ von Punkt x, y, z aus erscheint:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U (d\sigma)_x - \frac{1}{4\pi}\int U \frac{d\sigma}{Rl}.$$

l ist die Entfernung des betrachteten inneren Punktes von dem Element $d\sigma$. Da der Werth der Function u im Mittelpunkte der Kugel

$$u_0 = \frac{1}{4\pi}\int U \frac{\partial\sigma}{R^2}$$

wird, so gelangt man auch hier zu Sätzen, die mit den früheren (§ 1, Nr. 3 und 4) wörtlich übereinstimmen.

3. Auch gelten unverändert die für die Green'sche Function und ihre Ableitungen im § 3 angegebenen Eigenschaften. Der Beweis der ersteren erfordert, wenn man ihn in der Weise formuliren will, wie es dort (§ 3, Nr. 1) geschehen ist, den Nachweis, dass man über jede Niveaufläche ein Flächenintegral erstrecken kann. Da die Niveaufläche im Innern des Gebietes eine analytische Fläche ist, d. h. in der Umgebung jedes ihrer Punkte durch eine nach Potenzen der drei Variabelen geordnete Reihe definirbar ist, so lässt sich dieser Nachweis in der That führen. Man kann indessen den Beweis auch ganz unabhängig davon machen, wenn man auf die Entstehung der betreffenden Green-schen Integralformel zurückgeht; denn diese basirt auf der Integration über ein räumliches Gebiet, und es lässt sich ohne Benutzung eines über eine Fläche ausgedehnten Integrales die Gleichung beweisen:

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u'}{\partial z}\right) dT = -4\pi\left(g_o(o') - \frac{1}{oo'}\right)$$
$$= -4\pi\left(g_{o'}(o) - \frac{1}{oo'}\right).$$

Das auf der linken Seite stehende dreifache Integral ist dabei als der Grenzwerth eines dreifachen Integrales zu definiren, das zunächst über einen innerhalb T gelegenen Raum erstreckt ist, und dessen Integrationsgebiet sodann in den ganzen Raum T übergeht.

4. Sonach sind, wie früher, die Beweise für die folgenden Theoreme zu führen.

Erstens: Ist ein einfach zusammenhängender, von einer beliebigen Fläche F umschlossener, endlicher Raum T gegeben, und construirt man im Innern dieses Raumes eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von Polyedern, von denen jedes ausserhalb

des vorhergehenden sich befindet, und die sich der Fläche F beliebig nähern, so convergirt die Reihe der auf diese Polyeder bezüglichen Green'schen Functionen:

$$g_1, g_2, g_3, \dots g_n, \dots,$$

welche zu einem Punkte O im Innern des Raumes T gehören, nach einer bestimmten harmonischen Function g. Diese Function ist die zum Punkte O gehörige Green'sche Function in Bezug auf den von der Fläche F eingeschlossenen Raum T.

Zweitens: Das Integral

$$u_1 = \frac{1}{4\pi}\int U(d\sigma)_x,$$

gebildet über alle Elemente der Fläche F, die nun als Fläche mit integrirbaren Elementen ohne Kanten und Ecken angenommen wird (oder mit einzelnen Kanten und Ecken), stellt eine im Innern von T harmonische Function dar, die an der Begrenzungsfläche gleichmässig (bis auf die Kanten- und Eckpunkte) in den Werth

$$\tfrac{1}{2}U + \frac{1}{4\pi}\int U(d\sigma)_s$$

übergeht. Construirt man im Innern von T eine Parallelfläche F' zu F, deren Elemente mit $d\sigma'$ bezeichnet sind, und wird die zu jedem innern Punkt gehörige Green'sche Function g des Raumes T in den Punkten dieser Parallelfläche nach der inneren Normalen n' differentiirt, so stellt das Integral

$$u_2' = \frac{1}{4\pi}\int U\frac{\partial g}{\partial n'}\,d\sigma'$$

eine harmonische Function dar. Dieselbe convergirt, wenn F' mit F zusammenrückt, nach einer harmonischen Function u_2, deren Werthe bei Annäherung an die Fläche F gleichmässig in den Werth

$$-\tfrac{1}{2}U + \frac{1}{4\pi}\int U(d\sigma)_s$$

übergehen. Sonach ist

$$\frac{1}{4\pi}\int U(d\sigma)_x - \lim_{\sigma'=\sigma}\frac{1}{4\pi}\int U\frac{\partial g}{\partial n'}\,d\sigma'$$

die harmonische Function für den Raum T, welche an der Begrenzung F die vorgeschriebenen Werthe U besitzt.

5. Wenn es beim ersten Anblick unbefriedigend erscheint, dass die Potentialfunction nicht direct durch ein bestimmtes Integral, sondern als Grenzwerth eines solchen definirt ist, und erst bei weiteren Bedingungen, aus denen die Stetigkeit der Ableitung von g auch beim Uebergang in die Begrenzung hervorgeht, durch ein bestimmtes, auf die Grenzfläche bezügliches Integral darstellbar wird, so ist daran zu erinnern, dass die Fundamentalsätze der Potentialtheorie fast insgesammt einen ähnlichen Charakter tragen.

So ist z. B. der Satz, dass die Dichtigkeit $\varkappa$ der Flächenbelegung in jedem Punkt der Fläche durch Differentiation der Potentialfunction nach der inneren und der äusseren Normalen n_1 und n_2 erhalten wird, und der Gleichung

$$-4\pi\varkappa = \frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{\partial U}{\partial n_2}$$

genügt, unter der Annahme, dass $\varkappa$ bloss eine integrirbare Function ist, selbst wenn sie stetig ist, nicht erwiesen, sondern durch die Integralgleichung zu ersetzen:

$$\lim_{\sigma_1 = \sigma}\int d\sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \lim_{\sigma_2 = \sigma}\int d\sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_2} = -4\pi M,$$

wobei σ_1 und σ_2 zwei Flächenstücke bezeichnen, die zusammen einen beliebigen Theil σ der belegten Fläche umschliessen. M bedeutet alsdann die zu diesem Theil gehörige Masse der Belegung, und die einschliessenden Flächen können der eingeschlossenen beliebig nahe gebracht werden.

Ebenso ist für eine Massenvertheilung in einem Raume die Gleichung

$$\Delta^2 u = -4\pi\varkappa$$

nicht bewiesen, wenn über $\varkappa$ nicht besondere Annahmen, sei es über die Differentiirbarkeit oder, wie Herr Hölder neuerdings bewiesen, allgemeiner über die Art der Stetigkeitsconvergenz gemacht werden. Auch hier tritt mit ganz allgemeiner Geltung die Integralgleichung ein, die den mittleren Werth der Dichtigkeit innerhalb jedes beliebig kleinen, aber endlichen Raumelementes zu bestimmen gestattet, und die man als eine Grenzrelation für zweite Differenzenquotienten aussprechen kann: nämlich die Gauss'sche Gleichung:

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = M.$$

Letzteres hat schon Herr Kronecker in seiner Abhandlung: »Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabelen« (Monatsberichte der Berl. Akad. März 1869) hervorgehoben.

Im Anschluss an diese Abhandlung bemerke ich noch, dass man die vorstehenden Untersuchungen auf beliebig viele Variabele ausdehnen könnte.

E. Drechsel, *Ueber die Elektrolyse der normalen Capronsäure mit Wechselströmen.*

Vor etwa zwei Jahren theilte ich in einer Abhandlung über Elektrolysen und Elektrosynthesen[1]) mit, dass bei der Elektrolyse einer wässrigen Lösung von Phenol, schwefelsaurer und doppeltkohlensaurer Magnesia mit Wechselströmen und Platinelektroden neben der erwarteten Phenolätherschwefelsäure auch noch eine Anzahl anderer Substanzen entsteht, nämlich Hydrochinon, Brenzcatechin, γ-Diphenol und eine Reihe ein- und zweibasischer Säuren mit abnehmendem Kohlenstoffgehalte. Ich sprach dabei die Vermuthung aus, dass alle diese Säuren aus einer einzigen, aus dem Phenol unmittelbar entstandenen, ein- oder zweibasischen Säure mit 6 Atomen Kohlenstoff im Molekül ($C_6H_{12}O_2$ oder $C_6H_{10}O_4$) durch stufenweise Verbrennung hervorgehen könnten. War diese Annahme richtig, so stand zu erwarten, dass durch Elektrolyse mit Wechselströmen aus Normalcapronsäure $C_6H_{12}O_2$ oder Adipinsäure $C_6H_{10}O_4$ dieselben Säuren hervorgehen würden, welche ich auch aus dem Phenol erhalten hatte, nämlich Valeriansäure, Buttersäure, Bernsteinsäure, Malonsäure, Oxalsäure; ich habe deshalb diesen Versuch angestellt und bin dabei von der (normalen) Gährungscapronsäure ausgegangen, einerseits weil diese leichter in grösserer Menge zu beschaffen war als Adipinsäure, und andererseits, weil man voraussetzen konnte, dass sich aus derselben auch Adipinsäure bei dem Versuche bilden werde.

Die zu den unten beschriebenen Versuchen benutzte Säure wurde aus käuflicher Gährungscapronsäure nach dem Verfahren von Lieben abgeschieden, indem die rohe Säure zunächst fractionirt, und der über 170° übergehende Antheil durch oftmals wiederholtes Ausschütteln mit Wasser von Buttersäure befreit

---

1) Journ. f. prakt. Ch. (2) 29, S. 229.

wurde. Die gewaschene Säure wurde sodann wiederholt fractionirt und die zwischen 202° und 203° siedende Portion gesondert aufgefangen. Zur Prüfung auf ihre Reinheit wurde ein Theil der Säure in das Kalisalz verwandelt, und dessen Lösung in vier Fractionen mit Silberlösung gefällt, wobei in der Mutterlauge nur eine Spur organischer Säure zurückblieb; die vier Silbersalze zeigten ganz gleiche Beschaffenheit und wurden von Herrn Dr. F. Hundeshagen auf ihren Silbergehalt untersucht:

I.	1.8642 g	Substanz gaben	0.8978 g *Ag* (kleiner Verlust)		= 48.16 % *Ag*
II.	1.7447 g	» »	1.1225 g *AgCl*	= 0.844808 g *Ag*	= 48.42 % *Ag*
III.	1.8594 g	» »	1.1974 g *AgCl*	= 0.90118 g *Ag*	= 48.47 % *Ag*
IV.	1.1964 g	» »	0.7738 g *AgCl*	= 0.582372 g *Ag*	= 48.68 % *Ag*.

Der Silbergehalt aller vier Fractionen ist demnach gleich und stimmt mit demjenigen des capronsauren Silbers (48.43 %) genügend überein, um die Abwesenheit niederer Fettsäuren zu beweisen. Will man indessen das geringe Plus bei Fraction IV als ausserhalb der Fehlergrenzen liegend betrachten, so würde man allerdings daraus auf die Anwesenheit einer geringen Menge niederer Fettsäuren (z. B. ca. 1 % Valeriansäure im Ganzen) schliessen müssen; allein da, wie weiter unten noch gezeigt werden wird, aus der benutzten Capronsäure nach dem Versuche nicht immer niedere Fettsäuren abgeschieden werden konnten, während dies im Hauptversuche leicht gelang, so halte ich die Annahme, dass die zu meinen Versuchen benutzte Capronsäure frei von niederen Homologen war, für völlig gerechtfertigt, und dies um so mehr, als zu dem zweiten Versuche, welcher am weitesten durchgeführt wurde, die vom ersten Versuche wiedergewonnene und von den entstandenen Producten möglichst befreite Säure benutzt wurde. Ueberdies wird man sehen, dass die etwaige Gegenwart von Spuren niederer Fettsäuren ganz ohne Bedeutung für das Hauptresultat meiner Versuche ist.

Der Hauptversuch, der allein ausführlich beschrieben werden soll, wurde folgendermassen ausgeführt. Als Stromquelle diente dieselbe Wechselstrommaschine von Siemens & Halske, welche auch bei den früheren Untersuchungen benutzt worden war; als Elektroden wurden aber nicht, wie früher, 6 zu je dreien gekuppelte grosse Platinbleche angewandt, sondern nur 2, weil sich herausgestellt hatte, dass unter diesen Umständen

gerade eine schwache Gasentwicklung durch die Ströme hervorgebracht wurde. Die elektrolysirte Lösung enthielt in 3 l 200 g Capronsäure als Magnesiasalz und war ausserdem mit doppeltkohlensaurer Magnesia so ziemlich gesättigt; sie wurde in vier Portionen getheilt, deren jede ca. 80 Stunden lang elektrolysirt wurde. Anfangs entstand eine ziemlich lebhafte Gasentwicklung, die aber allmählich schwächer wurde und später nur dann noch bemerklich war, wenn die Flüssigkeit sich in Folge mangelhafter Kühlung stark erwärmte. Das Gas enthielt nur Kohlensäure und Wasserstoff, aber weder Sauerstoff noch Kohlenwasserstoffe, auch konnte während der ganzen Dauer der Elektrolyse weder die Entstehung öliger, noch riechender Substanzen beobachtet werden; diese Thatsache ist um so bemerkenswerther, als bei der gewöhnlichen Elektrolyse einer Lösung von capronsaurer und doppeltkohlensaurer Magnesia sofort ein stark riechendes Oel in beträchtlicher Menge sich ausscheidet. Die Temperatur der Lösung betrug etwa 30—40°, und stieg nur selten bis auf etwa 50—60° an. Nach Beendigung der Elektrolyse wurde die erhaltene Lösung von einer sehr geringen Menge Platinmohr abfiltrirt, und im Scheidetrichter vorsichtig mit verdünnter Schwefelsäure versetzt, bis keine Trübung mehr entstand; die abgeschiedene Capronsäure wurde zweimal mit Wasser tüchtig durchgeschüttelt, und sodann die Waschwässer mit der Mutterlauge vereinigt. In dieser Flüssigkeit mussten alle durch die Elektrolyse gebildeten flüchtigen und nicht flüchtigen Säuren nebst Capronsäure (welche in Wasser durchaus nicht ganz unlöslich ist) enthalten sein; um die ersteren abzutrennen, wurde zunächst das Ganze im Wasserdampfstrome destillirt, bis das Destillat nicht mehr sauer reagirte.

A) *Untersuchung des Destillates auf flüchtige Säuren.* Dasselbe wurde zunächst mit Soda alkalisch gemacht und eingedampft; der Rückstand wurde sodann in wenig Wasser gelöst, mit verdünnter Schwefelsäure zersetzt, die abgeschiedene Capronsäure einmal tüchtig mit Wasser ausgeschüttelt, das Waschwasser mit der Mutterlauge vereinigt und auf $\frac{1}{4}$ abdestillirt. Das Destillat wurde hierauf mit Barytwasser neutralisirt, mit Kohlensäure behandelt, gekocht, filtrirt und fractionirt mit Silberlösung gefällt. Die I. Fraction wurde sehr geringfügig gemacht, da sich dieselbe in der Hitze schnell schwärzte (Ameisensäure?); die folgenden Niederschläge zeigten dieses Verhalten

nicht. Dieselben waren krystallinisch, wurden sorgfältig ausgewaschen und nach dem Trocknen auf ihren Silbergehalt untersucht.

Fraction II. 0.2252 g wurden nach dem Erhitzen auf 110—115° (wobei oberflächliche Bräunung eintrat) mit etwas Alkohol und Wasser befeuchtet, dann durch verdünnte Salzsäure zersetzt, auf dem Wasserbade zur Trockne gebracht, Rückstand nochmals mit etwas Königswasser erhitzt, getrocknet und geschmolzen; erhalten wurden: 0.1453 g $AgCl$ = 0.1094309 Ag = 48.59%.

Fraction III. 0.3396 g hinterliessen bei vorsichtigem Glühen 0.1715 g Ag = 50.50%.

Fraction IV. 0.3350 g hinterliessen 0.1755 g Ag = 52.39%.

Fraction V. 0.2610 g hinterliessen 0.1405 g Ag = 53.83%.

Fraction VI. 0.2015 g hinterliessen 0.1105 g Ag = 54.84%.

Aus der Mutterlauge konnte keine zur Analyse ausreichende Menge Silbersalz mehr erhalten werden; die in Freiheit gesetzte Säure roch nach Buttersäure, war in Wasser löslich und konnte aus dieser Lösung durch $CaCl_2$ nicht abgeschieden werden. Aus den oben mitgetheilten Silberbestimmungen ergiebt sich, dass ausser Capronsäure noch *Valeriansäure* und *Buttersäure* vorhanden waren, deren Silbersalze 51.67%, bez. 55.38% Ag enthalten.

B) *Untersuchung des Rückstandes auf mit Wasserdämpfen nicht flüchtige Säuren.* Die von den Fettsäuren befreite Lösung wurde zunächst auf etwa das halbe Volum abdestillirt, der Rückstand nach dem Erkalten 8 Mal mit Aether ausgeschüttelt, die ätherischen Auszüge vereinigt und der Aether abdestillirt. Der wässrige Rückstand wurde weiter auf dem Wasserbade eingedampft, wobei schliesslich ein Syrup zurückblieb, welcher nur theilweise nach und nach krystallisirte und sich in Wasser mit Hinterlassung eines Oeles löste. Dieses Verhalten deutete darauf hin, dass in der Flüssigkeit ursprünglich eine Oxysäure vorhanden war, welche sich beim Erhitzen auf dem Wasserbade in ihr Lacton verwandelte. Für diese Auffassung sprach auch noch der Umstand, dass das erwähnte Oel sich beim Kochen mit viel Wasser am Rückflusskühler fast völlig löste und bei nachfolgender Destillation unter Zusatz eines Stückchens Marmor mit den Wasserdämpfen in geringer Menge flüchtig war; die kochende Lösung wurde von etwas Harz abfiltrirt, kochend mit

Barytwasser schwach alkalisch gemacht, mit Kohlensäure neutralisirt, wieder gekocht und von dem Niederschlage abfiltrirt.

a) Der *Niederschlag* wurde ausgewaschen, längere Zeit mit einer Lösung von Kupferchlorid gekocht (um Kalk- und Barytoxalat zu zersetzen), sodann wieder ausgewaschen, in verdünnter Salzsäure gelöst, die Lösung mit Schwefelwasserstoff entkupfert, filtrirt, eingedampft; auf Zusatz von essigsaurem Ammon und $CaCl_2$ zu der kochenden Lösung entstand ein krystallinischer, in Essigsäure unlöslicher Niederschlag, der sich leicht in warmer verdünnter Salzsäure löste, mithin aus *oxalsaurem Kalk* bestand.

b) Die *Lösung* wurde auf dem Wasserbade eingedampft; dabei schied sich ein krystallinisches Salz unlöslich aus, während ein amorphes Salz in der syrupdicken Mutterlauge gelöst blieb. Das Gemenge wurde zunächst mit kaltem Wasser behandelt, wobei sich das amorphe und auch ein Theil des krystallinischen Salzes leicht löste.

1) Der *unlösliche Theil* wurde mit kaltem und heissem Wasser ausgewaschen, dann in verdünnter Salzsäure gelöst, mit verdünnter Schwefelsäure genau ausgefällt und das Filtrat auf dem Wasserbade zur Trockne verdampft. Die rückständige gelbliche Krystallmasse wurde in Wasser gelöst, heiss durch einen Tropfen Chlorbaryum von einer Spur Schwefelsäure befreit, filtrirt, mit Ammoniak neutralisirt und dann mit Chlorbaryumlösung auf dem Wasserbade eingedampft. Dabei schied sich ein sehr schwer lösliches Barytsalz krystallinisch ab, welches mit kaltem Wasser so lange gewaschen wurde, bis die ablaufende Flüssigkeit mit Silberlösung nur noch einen geringen, in Salpetersäure völlig löslichen Niederschlag gab, dessen Menge beim weiteren Auswaschen sich nicht mehr verringerte. Da der bernsteinsaure Baryt in Wasser nicht völlig unlöslich ist und die Menge des Salzes nur noch sehr gering war, wurde das Auswaschen unterbrochen und das Salz auf seinen Barytgehalt untersucht. 0.3353 g bei 110—115° getrocknet hinterliessen beim vorsichtigen Glühen 0.2563 g $BaCO_3$ = 0.178239 g Ba = 53.16 %.

Bernsteinsaurer Baryt enthält 54.15 % *Ba*, das untersuchte Salz war demnach noch nicht völlig rein gewesen, hatte vielmehr noch etwas adipinsaures Salz (s. u.) enthalten.

2) Die von b 1) abfiltrirten *Lösungen* wurden eingedampft, wobei sich nach einiger Zeit wieder ein *krystallinisches* Salz (*α*)

in beträchtlicher Menge abschied, welches nach dem Erkalten abgesaugt, mit wenig kaltem Wasser gewaschen, abgepresst und an der Luft getrocknet wurde. Die Gesammtmenge desselben betrug 1.5350 g, und verlor bei 120° 0.0985 g an Gewicht (= 6.42%); der Rückstand wurde in Wasser gelöst, mit etwas Salzsäure angesäuert und mit Schwefelsäure gefällt, wobei 1.1596 g $BaSO_4$ = 0.681825 g Ba = 47.46% Ba (für trocknes Salz) erhalten wurden. Das Filtrat vom $BaSO_4$ wurde zur Krystallisation verdampft, die Krystalle in kaltem Aether gelöst, die ätherische Lösung verdunstet, der Rückstand in Wasser gelöst, mit Barytwasser neutralisirt und die Lösung auf dem Wasserbade eingedampft. Dabei schied sich das Barytsalz wiederum krystallinisch aus; es wurde dann durch Zusatz von kaltem Wasser gelöst, filtrirt und mit absolutem Alkohol gefällt; der anfangs amorphe Niederschlag wurde bald krystallinisch, wurde dann abfiltrirt, mit Alkohol gewaschen und an der Luft getrocknet. Er wog 1.0030 g, verlor aber beim Erhitzen auf 120° nur 0.0130 g = 1,29% an Gewicht; der Rückstand in kaltem Wasser gelöst und heiss wie oben mit Schwefelsäure gefällt, lieferte 0.8053 g $BaSO_4$ = 0.4735 g Ba = 47.83% Ba (für trockne Substanz). Da auch dieses Salz offenbar noch nicht rein gewesen war, so wurde die vom $BaSO_4$ abfiltrirte Lösung durch Erwärmen mit etwas überschüssiger Silberlösung vom Chlor befreit, und das Filtrat mit Ammoniak fast ganz neutralisirt; dabei entstand ein krystallinischer Niederschlag (1), aus dessen Mutterlauge durch Zusatz von mehr Silberlösung ein ganz ähnlicher Niederschlag (2) gefällt wurde; aus dem Filtrat wurde noch eine geringe Menge eines ebensolchen Niederschlags erhalten. Die Silberbestimmungen führten zu folgenden Resultaten:

(1) 0.4956 g verloren bei 110—120° unter schwacher Gelbfärbung nur 0.0029 g (0.58%) an Gewicht; der Rückstand mit verdünnter Salzsäure zersetzt lieferte 0.3830 g $AgCl$ und 0.0019 g Ag, in Summa also 0.290352 g Ag = 58.93% (für Trockensubstanz).

(2) 0.4710 g verloren bei 110—120° nur 0.0005 g an Gewicht, und lieferten, wie (1) behandelt, 0.3655 g $AgCl$ und 0.0024 g Ag, in Summa also 0.27767 g Ag = 59.02% (für Trockensubstanz).

Beide Salze sind demnach als identisch zu betrachten. Die Filtrate von den Chlorsilberniederschlägen wurden nun auf

dem Wasserbade völlig von Salzsäure befreit, der krystallinische Rückstand vorsichtig in einem Probirröhrchen geschmolzen und nach dem Erkalten mit kaltem Aether extrahirt, wobei eine Spur einer braunen Schmiere ungelöst blieb. Die Aetherlösung hinterliess beim Verdunsten eine schön in Blättern krystallisirende Säure, welche mit etwas Aether gewaschen und dann bei 120° getrocknet wurde; dieselbe war fast ganz rein weiss. Sie schmolz bei 148—149° und erstarrte wieder bei ca. 145°; die Analyse ergab folgende Werthe:

0.1005 g im Schiffchen verbrannt lieferten: 0.0623 g H_2O = 0.006922 .. H = 6.89 %, und 0.1866 g CO_2 = 0.05089091 C = 50.64 %.

Die Eigenschaften der freien Säure und ihres Barytsalzes stimmen mit denjenigen der *Adipinsäure* überein, welche bei 148—149° schmilzt und deren Barytsalz nach Dieterle und Hell[1]) in heissem Wasser schwerer löslich ist, als in kaltem; dagegen weichen die von mir erhaltenen analytischen Daten von den für Adipinsäure und deren Salze berechneten etwas ab. Diese Säure enthält 49.31 % C und 6.85 % H; das Barytsalz enthält 48.75 % Ba, und das Silbersalz 60.00 % Ag. Da meine Analysen zu wenig Ba und Ag, aber zuviel C ergeben haben, so scheint es, als ob meiner Säure eine kleine Menge einer kohlenstoffreicheren Säure beigemengt gewesen sei, welche durch die Reinigungsversuche nicht abgeschieden werden konnte. Trotzdem kann es wohl keinem Zweifel unterliegen, dass die von mir erhaltene Säure wirklich Adipinsäure war.

β) Die von α) abfiltrirte Lösung wurde mit den Waschflüssigkeiten zusammen abgedampft, wobei sich noch etwas adipinsaurer Baryt ausschied, von diesem abfiltrirt und zur Trockne gebracht. Dieser Rückstand wurde fein zerrieben und zweimal mit absolutem Alkohol ausgekocht; da dieser aber nur sehr wenig aufnahm, so wurde das Salz in 10 ccm Wasser gelöst, mit 90 ccm absolutem Alkohol versetzt, gekocht, filtrirt und diese Procedur wiederholt, bis der Alkohol fast nichts mehr aufnahm.

Die alkoholischen Lösungen hinterliessen beim Eindampfen auf dem Wasserbade einen amorphen, glasigen Rückstand, welcher sich leicht in absolutem Alkohol löste und aus dieser Lösung durch Aether harzartig gefällt wurde. Da ein Vor-

---

1) Ber. d. d. chem. Ges. 17, S. 2222.

(Vgl. auch Klein: Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie. Math. Annalen Bd. 21, S. 155 ff.)

Wird im Innern des Polygones ein Punkt O angenommen, und werden die Entfernungen der Randpunkte vom Punkte O mit ϱ bezeichnet, so ist also auch die harmonische Function construirbar, welche am Rande die Werthe $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ besitzt. Diese Function soll die zum Punkte O gehörige Green'sche Function heissen. Ist m der kleinste Werth unter den positiven Grössen ϱ, und M der grösste, so sind $l\left(\frac{1}{M}\right)$ und $l\left(\frac{1}{m}\right)$ bezüglich die algebraisch kleinsten und grössten Werthe, welche die Green-sche Function des Punktes O überhaupt im Innern und am Rande des Polygones annimmt. Umgiebt man den Punkt O mit einem beliebig kleinen Kreise, so ist die Differenz zwischen der Green'schen Function g und der Function $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ ausserhalb des Kreises und im Innern des Polygones überall harmonisch. Da diese Differenz auf dem Rande des Polygones gleich Null, und auf der Peripherie des beliebig kleinen Kreises negativ beliebig gross wird, so ist $g - l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ im Innern des Polygones überall negativ, also $g < l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$.

2. Jede im Innern einer Fläche F harmonische Function u lässt sich in eine Fourier'sche Reihe entwickeln. (Math. Annal. Bd. 21, S. 305.) Wählt man den Punkt O zum Mittelpunkt von Kreisen, so gilt auf jedem Kreis um O, dessen Radius kleiner ist als m, der also im Innern der Fläche F liegt, solch eine Entwickelung, und es wird, wenn ϱ den Radius, ϑ den Centriwinkel bedeutet:

$$u(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U d\vartheta + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\varrho}{m}\right)^k\left[\sin k\vartheta\int_{-\pi}^{+\pi} U \sin k\vartheta\, d\vartheta + \cos k\vartheta\int_{-\pi}^{+\pi} U \cos k\vartheta\, d\vartheta\right].$$

U bedeutet die Werthe, welche die Function u auf dem Kreise mit dem Radius m besitzt. Ueber diesen Kreis hinaus lässt sich die Function u und zwar für das ganze Innere der Fläche F durch analoge Reihenentwickelungen fortsetzen.

Desgleichen besteht für jede harmonische Function eine Integraldarstellung von folgender Art. Sind die Werthe der Function u auf der Peripherie eines im Innern der Fläche gelegenen Kreises mit U bezeichnet, so ist

$$u = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\cos\varepsilon}{l}\,\varrho\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int U d\vartheta .$$

Hier bedeutet $d\sigma = \varrho\, d\vartheta$ das Bogenelement des Kreises, l die positiv genommene Entfernung des Elementes $d\sigma$ von dem betrachteten, im Innern des Kreises gelegenen Punkt (x, y), für welchen der Werth u ermittelt werden soll, und ε den Winkel, welchen der nach innen gerichtete Radius des Elementes $d\sigma$ mit der Geraden l bildet (diese genommen in der Richtung von $d\sigma$ nach dem Punkt (x, y)). Für den Mittelpunkt des Kreises ist

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int U d\vartheta .$$

3. Besitzt eine harmonische Function am Rande einer beliebigen Fläche F nur positive (oder nur negative) Werthe U, und ist der Werth der Function u in irgend einem innern Punkt gleich dem Product einer bestimmten endlichen Grösse δ mit einer endlichen Grösse E, so ist auch für jeden anderen Punkt im Innern der Fläche der Werth der Function u darstellbar durch das Product von δ mit einer endlichen Grösse E'. Diese Grösse E' hängt ausser von E im Wesentlichen (d. h. hinsichtlich der Grenzen, welche man ein für allemal für ihren Betrag angeben kann), nur von der Lage des betreffenden Punktes ab.

Macht man nämlich den Punkt, in welchem die Function den Werth $E\delta$ hat, zum Mittelpunkt eines Kreises, so ist für den Mittelpunkt desselben:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int U d\vartheta = E\delta,$$

und für jeden anderen Punkt im Innern des Kreises:

$$u = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\cos\varepsilon}{l}\,\varrho\, d\vartheta - E\delta .$$

Da die Grösse U ihr Zeichen nicht wechseln soll, so wird nach dem ersten Mittelwerthsatz der Integralrechnung

$$u = \frac{1}{\pi}\left[\varrho\frac{\cos\varepsilon}{l}\right]\int U d\vartheta - E\delta = E\left\{2\varrho\left[\frac{\cos\varepsilon}{l}\right] - 1\right\}\delta,$$

wenn man mit $\left[\frac{\cos\varepsilon}{l}\right]$ einen mittleren Werth von $\frac{\cos\varepsilon}{l}$ bei allen

möglichen Werthen von ϑ bezeichnet. Dieser Werth ist immer positiv und endlich, so lange der Punkt im Innern des Kreises liegt. Also ist

$$u = E'\delta, \quad \text{wobei} \quad E' = E\left\{2\varrho\left[\frac{\cos\varepsilon}{l}\right] - 1\right\}.$$

Da nun auf Grund dieser Gleichung jeder Punkt im Innern des Kreises zum Mittelpunkt einer neuen Integraldarstellung gemacht werden kann, so gilt der Satz für alle Punkte im Innern der Fläche F.

Dieser einfache Satz ist für das Folgende deshalb von Bedeutung, weil er lehrt, dass die Function u, falls sie überall dasselbe Zeichen hat, gleichmässig für alle Punkte im Innern der Fläche nach Null convergirt, sobald sie in einem einzigen Punkte mit δ beliebig klein wird. Denn die Grenzen, innerhalb welcher E variiren kann, bleiben, unabhängig von δ, stets nur endlich.

Dasselbe gilt auch für alle Ableitungen der Function u. Denn im Innern des Kreises mit dem Radius r bestehen für jeden Punkt mit den Coordinaten ϱ, ϑ die Gleichungen:

$$\frac{\partial u(\varrho,\vartheta)}{\partial\varrho} = \frac{1}{\pi r}\sum_{k=1}^{k=\infty} k\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-1}\left[\sin k\vartheta\int_{-\pi}^{+\pi} U\sin k\vartheta\, d\vartheta + \cos k\vartheta\int_{-\pi}^{+\pi} U\cos k\vartheta\, d\vartheta\right].$$

$$\frac{\partial u(\varrho,\vartheta)}{\partial\vartheta} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty} k\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k}\left[\cos k\vartheta\int_{-\pi}^{+\pi} U\sin k\vartheta\, d\vartheta - \sin k\vartheta\int_{-\pi}^{+\pi} U\cos k\vartheta\, d\vartheta\right].$$

Da nun die Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U\sin k\vartheta\, d\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U\cos k\vartheta\, d\vartheta$$

ihrem Betrage nach nicht grösser sind als der Betrag von

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U d\vartheta = 2E\delta,$$

weil U überall nur positiv oder nur negativ sein sollte, so sind auch die Beträge von $\frac{\partial u}{\partial\varrho}$ und $\frac{\partial u}{\partial\vartheta}$ an jeder Stelle im Kreise gleich dem Producte von δ mit endlichen Grössen. Sie convergiren

folglich überall im Innern von F gleichmässig nach Null, wenn δ beliebig klein wird. Ebenso verhalten sich alle höheren Ableitungen.

4. Ist für eine beliebige, endliche Fläche F eine unbegrenzte Reihe von harmonischen Functionen

$$u_1, u_2, \dots . u_n, \dots .$$

gegeben, deren Randwerthe mit

$$U_1, U_2, \dots . U_n, \dots .$$

bezeichnet werden sollen, und convergirt die Summe der Randwerthe $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ gleichmässig nach einer bestimmten Function U, so stellt die unendliche Reihe

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

eine Function dar, welche im Innern der Fläche F harmonisch ist.

Denn die Function u ist erstlich in der Fläche stetig, weil die unendliche Reihe gleichmässig convergirt. Da nämlich die Summe

$$R_{n,m} = U_n + U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+m}$$

zufolge der Voraussetzung für alle Randpunkte zugleich, lediglich durch Wahl von n und unabhängig von m, ihrem Betrage nach kleiner als eine beliebige Grösse δ gemacht werden kann, so wird auch die Summe

$$r_{n,m} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}$$

dem Betrage nach für alle Punkte im Innern von F kleiner als δ. Setzt man ferner

$$u = s_n + r_n, \quad s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1},$$

so ist für jeden Punkt im Innern eines innerhalb F gelegenen Kreises mit dem Radius r:

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int S_n \frac{\cos \varepsilon}{l} r d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int S_n d\vartheta,$$

wenn man mit S_n den Werth der Summe s_n in den Punkten der Peripherie des Kreises bezeichnet. Nennt man ferner U und R_n die Werthe von u und r_n auf der Peripherie des Kreises, so kann man diese Gleichung auch in der Form schreiben:

$$u - r_n = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\cos\varepsilon}{l}\, r d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int U d\vartheta$$
$$- \left[\frac{1}{\pi}\int R_n \frac{\cos\varepsilon}{l}\, r d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int R_n d\vartheta\right].$$

Da nun r_n und R_n durch Wahl von n gleichmässig beliebig klein werden, so ist

$$u = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\cos\varepsilon}{l}\, r d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int U d\vartheta,$$

d. h. u ist eine harmonische Function für das ganze Innere von F. Aus diesem und dem früheren Satz (Nr. 3) folgt:

Ist für eine beliebige endliche Fläche F eine unbegrenzte Reihe von harmonischen Functionen $u_1, u_2, \dots u_n, \dots$ gegeben, die alle innerhalb F einerlei Zeichen haben, und convergirt die Summe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

an irgend einer Stelle im Innern der Fläche, so convergirt sie auch für alle inneren Punkte der Fläche, und ist in derselben eine harmonische Function.[1])

Denn wenn die Reihe an einer Stelle convergirt, so lässt sich für diese Stelle ein Werth n angeben, sodass

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+m}$$

bei jedem Werth von m kleiner bleibt als eine vorgeschriebene beliebig kleine Grösse δ. Dann aber ist diese Summe im Innern von F allenthalben gleich dem Product von δ mit einer endlich bleibenden Grösse.

§ 2.

Die Construction der Green'schen Function.

1. In der xy-Ebene sei eine einfach zusammenhängende, ganz im Endlichen liegende Fläche F ohne Windungspunkte gegeben. Ueber den Rand C derselben machen wir keine andere Voraussetzung, als dass er aus einer stetigen, sich selbst nicht durchschneidenden Curve bestehen soll. (Die Curve kann unendlich viele Ecken besitzen, ja überhaupt keine bestimmten Tangenten oder Bogenelemente haben.) Im Innern der Fläche

---

1) Auch bei der Methode des arithmetischen Mittels, sowie bei den eingangs erwähnten Combinationsmethoden ist dieser Satz dienlich.

werde ein Punkt O beliebig angenommen. Es soll die Existenz der Green'schen Function bewiesen werden, welche zum Punkt O gehört.

Man construire innerhalb der Curve C eine unendliche Reihe von Polygonen: $P_1, P_2, P_3, \dots P_n \dots$ mit folgenden Eigenschaften. *Erstens:* Jedes Polygon liegt ganz innerhalb der Curve C, das heisst sein Umfang hat keinen Punkt mit derselben gemein. *Zweitens:* Jedes Polygon liegt ganz ausserhalb des vorhergehenden. *Drittens:* Das Polygon P_n soll sich bei wachsenden Werthen von n der Curve C beliebig nähern. Dies wird der Fall sein, wenn jeder Punkt auf dem Polygon P_n so liegt, dass die untere Grenze seiner Entfernungen von den Punkten der Curve C unterhalb einer Grösse δ sich befindet, die mit wachsenden Werthen von n nach Null convergirt.

Zu jedem Polygon lässt sich die Green'sche Function, welche zum Punkt O gehört, construiren. Bezeichnet man die für P_n geltende Function mit g_n, so erhält man eine unendliche Folge von Functionen:

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \dots\ g_n,\ \dots$$

Von diesen Functionen soll bewiesen werden, dass sie nach einer ganz bestimmten harmonischen Function g convergiren, und dass diese Function g, welche durch die unendliche Summe

$$g = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + (g_n - g_{n-1}) + \cdots$$

darstellbar ist, für die von der Curve C umschlossene Fläche F diejenige Green'sche Function ist, welche zum Punkt O gehört. [1])

2. Man vergleiche zunächst zwei aufeinander folgende Functionen, z. B. g_1 und g_2, deren Randwerthe mit $l\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)$ und $l\left(\frac{1}{\varrho_2}\right)$ bezeichnet seien. Weil die Green'sche Function im Innern eines

---

1) Mittels des Verfahrens der Einschliessung einer Fläche durch Polygone hat Herr Schwarz die Möglichkeit der conformen Abbildung einer ebenen Fläche, deren Begrenzung überall convex nach Aussen ist, auf einen Kreis bewiesen (Prgr. der eidgen. polytechn. Schule 1869/70) und dem Studium dieser Abhandlung verdanke ich die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung. Im Uebrigen unterscheiden sich die Formulirungen, welche Herr Schwarz angiebt, von den hier angewandten. Jene lassen sich nicht auf eine beliebig berandete ebene Figur und nicht für die Lösung des analogen Problemes im Raume übertragen.

Polygones allenthalben kleiner ist als $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$, und weil das Polygon P_1 ganz im Innern des Polygones P_2 liegt, so sind die Werthe, welche g_2 auf dem Polygon P_1 besitzt, kleiner als $l\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)$, also kleiner als g_1. Mithin ist überall im Innern von P_1

$$g_2 < g_1,$$

d. h. die Reihe der Functionen $g_1, g_2, g_3, \ldots.$ bildet eine Reihe von abnehmenden Grössen; es ist

$$g_1 > g_2 > g_3 > \cdots > g_n > g_{n+1} > \cdots\cdot$$

Diese Ungleichungen gelten für jeden Punkt im Innern der Fläche F von einer bestimmten Stelle ab, weil jeder innere Punkt schliesslich innerhalb eines Polygones und aller darauf folgenden zu liegen kommt.

Da nun jede der Functionen g_n in jedem Punkt innerhalb F grösser bleibt als der Werth $l\left(\frac{1}{M}\right)$, wenn M das Maximum der Entfernung der Punkte des Randes C vom Punkte O bedeutet, so folgt, dass die Functionen g_n in jedem Punkt innerhalb F nach einer bestimmten Grenze convergiren.

Beachtet man nun weiter, dass die Differenzen

$$(g_2 - g_1), (g_3 - g_2), \ldots. (g_n - g_{n-1}), \ldots\cdot$$

alle einerlei Zeichen haben, nämlich negativ sind, so folgt nach dem am Schluss des § 1 erhaltenen Satz, dass die Function:

$$g = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots\cdot + (g_n - g_{n-1}) + \cdots$$

eine im Innern von F harmonische Function ist.

3. Es muss nun gezeigt werden, dass diese Function g bei Annäherung an den Rand gleichmässig stetig in die Werthe $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ übergeht.

Zur Vereinfachung der Discussion führe ich an Stelle der Functionen g_n und g die Functionen s_n und s sein, welche durch die Gleichungen

$$s_1 = \varrho e^{g_1},\; s_2 = \varrho e^{g_2}, \ldots. s_n = \varrho e^{g_n}, \ldots. \text{ und } s = \varrho e^{g}$$

definirt sind. Jede der Functionen s_n besitzt am Rande des zugehörigen Polygones P_n den constanten Werth 1, und im Punkt O den Werth Null. Ferner sind die Functionen $l(s_n)$ harmonische Functionen nach Ausschluss des Punktes O, in welchem sie ne-

gativ unendlich werden. Da die Reihe der Functionen g_n eine abnehmende ist, so ist auch die Reihe der Functionen s_n eine abnehmende, d. h. es ist für jeden Punkt innerhalb der Fläche

$$s_1 > s_2 > s_3 \cdots > s_n > \cdots > s.$$

Bezeichnet α einen bestimmten positiven Werth kleiner als 1, so bilden die Punkte, in denen s_n den constanten Werth α hat, eine einfach geschlossene Curve, welche den Punkt O umgiebt. Sucht man also die Curven auf, für welche

$$s_1 = \alpha,\ s_2 = \alpha, \ldots .\ s_n = \alpha, \ldots .$$

ist, so folgt aus den obigen Ungleichungen, dass jede dieser Curven ausserhalb der vorhergehenden liegt. Es wird also auch der Ort aller der Punkte, in denen $s = \alpha$ ist, ausserhalb aller vorhergehenden Curven sich befinden.

Man muss daher zuvörderst nachweisen, dass solche Punkte überhaupt im Innern von F vorhanden sind. Zu dem Zwecke denke man sich ein Polygon Q construirt, dessen Fläche die Fläche F ganz einschliesst, dessen Umfang aber *einen* oder mehrere Punkte mit der Curve C gemein hat. Construirt man für dieses Polygon Q die zum Punkte O gehörige Green'sche Function γ, so ist der Werth von γ im Innern der Fläche F kleiner als jede der Functionen g_n, also auch nicht grösser als die Function g. Bezeichnet man mit σ den Werth $\sigma = \varrho e^{\gamma}$, so ist in den Punkten der Fläche F

$$s \geqq \sigma.$$

Da nun die Curve $\sigma = \alpha$ jedenfalls in das Innere der Fläche F eintreten muss, weil sie die Punkte ausschliesst, welche das Polygon Q mit dem Rande C gemein hat, und in denen $\sigma = 1$ ist, so sind auch im Innern von F Punkte vorhanden, in denen s gleich oder grösser als α ist.

Der Ort aller der Punkte, in denen $s = \alpha$ ist, kann nicht eine geschlossene Curve sein, falls sie nicht den Punkt O einschliesst; denn sonst wäre s allenthalben in F constant, was zufolge der Gleichung $l(s) = g + l(\varrho)$ unmöglich ist.

Ebensowenig können die Punkte, in denen $s = \alpha$ ist, im Innern von F gelegene, nicht geschlossene Curven bilden; denn bei einer harmonischen Function ist dieses überhaupt unmöglich.

Sonach ist nur zu zeigen, dass der Ort der Punkte $s = \alpha$ beliebig nahe an den Rand C heranrückt, wenn α beliebig nahe

an den Werth 1 rückt, dass aber die Punkte $s = \alpha$ den Rand C niemals erreichen, so lange α kleiner als 1 ist.

Construirt man das Polygon P_n im Innern der Curve C, welches derselben beliebig nahe gebracht wird dadurch, dass man n beliebig gross annimmt, so hat auf demselben die Function s_n den Werth 1, und jede der folgenden Functionen einen Werth, der kleiner ist als 1. Bestimmt man den grössten Werth, welchen die Function s auf diesem Polygon annimmt, und nennt man denselben α, so ist für alle Werthe im Innern dieses Polygones der Werth von s kleiner als α; alle Punkte, in denen $s > \alpha$ ist, liegen also zwischen dem Polygon P_n und der Curve C, d. h. sie kommen der letzteren beliebig nahe.

Die Curve $s = \alpha$ kann dabei den Rand niemals erreichen. Denn wird wie vorhin das Polygon Q construirt, welches mindestens einen Punkt mit der Curve C gemein hat, im Uebrigen aber ganz ausserhalb derselben liegt, so ist s jedenfalls nicht kleiner als σ. Demnach liegt die Curve $s = \alpha$ nicht ausserhalb der Curve $\sigma = \alpha$. Die Curve $\sigma = \alpha$ kann nun zwar den Rand C an mehreren Stellen durchschneiden, sie muss aber alle die Punkte des Randes, welche zugleich auf dem Polygon Q liegen, in bestimmter endlicher Entfernung ausschliessen; denn in diesen Punkten ist $\sigma = 1$. Mithin muss auch die Curve $\sigma = \alpha$ von diesen Randpunkten eine endliche Entfernung haben. Da nun jeder Punkt des Randes willkürlich zu einen Eckpunkt von Q gemacht werden kann, so hat die Curve $s = \alpha$ von allen Randpunkten eine endliche Entfernung, solange $\alpha < 1$ ist.

4. Mit der Existenz der zum Punkt O gehörigen Green'schen Function ist bekanntlich nun auch der folgende Satz bewiesen:

Jede endliche, einfach zusammenhängende, von einer beliebigen stetigen Randcurve begrenzte, ebene Fläche F kann derart conform auf das Innere eines Kreises abgebildet werden, dass einem beliebig zu wählenden Punkte O der Mittelpunkt des Kreises, und jedem anderen Punkt im Innern von F umkehrbar eindeutig ein Punkt im Innern des Kreises entspricht. Den Punkten, welche in beliebiger Nähe des Randes liegen, entsprechen Punkte, die an die Kreisperipherie rücken. Diese Abbildung ist bis auf eine Drehung des Kreises um seinen Mittelpunkt fixirt.

Ob nun auch den Punkten des Randes eindeutig bestimmte Punkte der Kreisperipherie entsprechen, hängt von den Werthen ab, welche die Ableitung der Green'schen Function, gebildet nach

den inneren Normalen, in den Punkten des Randes besitzt. Diese Frage wird bei einer beliebigen Randcurve, die keine Tangenten und keine Normalen zu besitzen braucht, wohl kaum zu entscheiden sein. Nur bei einem Rand, der aus einer analytischen Curve, oder aus Stücken solcher Curven besteht, ist sie bisher und zwar in bejahendem Sinne beantwortet worden.

§ 3.

Die Haupteigenschaften der Green'schen Function.

Die Function g besitzt zwei wesentliche Eigenschaften, deren Beweis ich hier anführen möchte, um keinerlei Zweifel über die Allgemeingültigkeit derselben bestehen zu lassen; denn dieselben werden im folgenden § benutzt.

1. Ist g_0 in Bezug auf eine beliebige ebene Fläche die zu einem Punkt o gehörige Green'sche Function, und ist $g_{o'}$ die zu einem andern Punkt o' gehörige Green'sche Function, so ist der Werth, welchen die erste Function im Punkte o' besitzt, gleich dem Werth, welchen die zweite Function im Punkt o hat; also in Formeln

$$g_o(o') = g_{o'}(o).$$

Der Beweis ist am einfachsten nach dem Verfahren, welches in den Vorlesungen von Riemann (Schwere, Electricität und Magnetismus, bearbeitet von Hattendorff) für dasselbe Problem im Raum mitgetheilt ist. Nur eine kleine Modification scheint mir dabei nothwendig zu sein.

Man umschliesse die innerhalb F gelegenen Punkte o und o' mit beliebig kleinen Kreisen, deren Mittelpunkte o und o' sind, und deren Radien ϱ und ϱ' heissen mögen. Nach Ausschluss dieser Kreise soll die Fläche F mit F' bezeichnet werden. Führt man die Functionen

$$u = g_o - l\left(\frac{1}{r}\right), \quad u' = g_{o'} - l\left(\frac{1}{r'}\right)$$

ein, wobei r und r' die Entfernungen der Punkte von F' bezüglich von o und o' angeben, so sind u und u' im Innern von F' harmonische Functionen. Nach bekannten Sätzen bestehen die Gleichungen:

$$\int\left(u'\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial u'}{\partial n}\right)d\sigma = 0, \int\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = 0, \int\frac{\partial u'}{\partial n}\,d\sigma = 0,$$

wenn diese Integrale über sämmtliche Randcurven von F' er-

streckt werden. Dabei sind die Ableitungen nach den inneren Normalen zu bilden. Um aber keine Voraussetzungen einzuführen über die Existenz und Integrirbarkeit der Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial n}$ und $\frac{\partial u'}{\partial n}$ am *Rande* von *F*, dessen Bogenelemente überdies nicht integrirbar zu sein brauchen, ersetze ich die Randcurve von *F* durch eine andere innere Curve mit integrirbarem Bogenelement, welche in beliebiger Nähe der eigentlichen Randcurve verläuft, und welche ebenfalls die um o und o' construirten Kreise einschliesst. Als solch eine Curve wähle ich diejenige, auf welcher u den constanten Werth α hat. Es ist dies eine analytische Curve, so dass eine Integration längs dieser Curve immer ausgeführt werden kann.[1] Wird das Bogenelement derselben mit $d\sigma'$ bezeichnet, so zerlegt sich das obige erste Integral in Integrale mit dem Element $d\sigma'$, und in zwei Integrale, welche sich auf die Kreise um o und o' beziehen. Es wird also

$$\int u' \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma' - \int u \frac{\partial u'}{\partial n} d\sigma'$$
$$+ \int\left(u' \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u'}{\partial n}\right) \varrho\, d\vartheta + \int\left(u' \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u'}{\partial n}\right) \varrho' \quad \vartheta = 0.$$

Das erste Integral ist, weil $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf der neuen Randcurve überall negativ ist (höchstens gleich Null wird), nach dem ersten Mittelwerthsatz gleich

$$\left[u'\right] \int \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma'$$

wenn u' einen mittleren Werth von u' bezeichnet; und zufolge der Gleichung

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

welche sich auf sämmtliche Randcurven bezieht, wird das vorhergehende Integral gleich

---

1) Auf den Niveaulinien im Innern einer auch mehrfach zusammenhängenden Fläche können niemals Spitzen vorkommen, sondern nur vielfache Punkte (Gleichgewichtspunkte), in denen sich n Zweige unter Winkeln von der Grösse $\frac{\pi}{n}$ schneiden. Für eine einfach zusammenhängende Fläche besitzen die Curven $g - l\left(\frac{1}{r}\right) = \alpha$ auch keine vielfachen Punkte.

$$- [u'] \int \frac{\partial u}{\partial n} \varrho d\vartheta.$$

Ebenso ist

$$- \alpha \int \frac{\partial u'}{\partial n} d\sigma' = + \alpha \int \frac{\partial u'}{\partial n} \varrho' d\vartheta.$$

Da nun auf der Peripherie der Kreise ϱ und ϱ' die Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial g_0}{\partial n} + \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{\partial u'}{\partial n} = \frac{\partial g_0'}{\partial n} + \frac{1}{\varrho'},$$

so sind diese beiden Integrale bezüglich gleich — $2\pi\,[u']$ und $2\pi\alpha$, sie convergiren also nach Null, wenn α und folglich auch der Mittelwerth von u' beliebig klein gemacht werden, dadurch dass man die Curve σ' in beliebiger Nähe der Randcurve σ annimmt. Dass in der That bei diesem Processe auch der Mittelwerth von u' beliebig klein wird, folgt daraus, dass die Green'sche Function gleichmässig in ihre Randwerthe übergeht, wie im vorigen Paragraphen, wenigstens für einfach zusammenhängende Flächen, auf die es im Folgenden allein ankommt, bewiesen wurde. Ferner wird

$$\lim_{\varrho = 0} \int \left(u' \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u'}{\partial n}\right) \varrho d\vartheta = \lim \int u' \left(\frac{\partial g_0}{\partial n} + \frac{1}{\varrho}\right) \varrho d\vartheta$$

$$- \lim \int \frac{\partial u'}{\partial n} \left(g_0 - l\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \varrho d\vartheta = (g_{0'}(o) + l(oo'))\, 2\pi$$

$$\lim_{\varrho' = 0} \int \left(u' \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u'}{\partial n}\right) \varrho' d\vartheta = \lim \int \frac{\partial u}{\partial n} \left(g_{0'} - l\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\right) \varrho' d\vartheta$$

$$- \lim \int u \left(\frac{\partial g_0'}{\partial n} + \frac{1}{\varrho'}\right) \varrho' d\vartheta = -\left(g_0\,(o') + l(oo')\right) 2\pi.$$

Demnach ist, da die Summe dieser Integrale beliebig klein wird,

$$g_{0'}(o) = g_0(o').$$

2. Für das Problem in der Ebene kann man den Beweis auch mittels der conformen Abbildung durch den sehr einfachen Nachweis des Satzes erledigen: Wird ein Kreis conform auf sich selbst abgebildet, so dass irgend ein Punkt desselben, der den Abstand d vom Mittelpunkt hat, nunmehr Mittelpunkt wird, so entspricht bei dieser Abbildung dem Mittelpunkt ein Punkt, der wiederum im Abstande d von der Mitte sich befindet.

3. Auf Grund der angewandten einfachen Principien und des vorigen Satzes erhält man auch den Beweis für die zweite Eigenschaft der Green'schen Function: Rückt der Punkt o' auf

den Rand der Fläche F in einen Punkt p, so geht die zum Punkte o' gehörige Green'sche Function in die Function $l\left(\frac{1}{r'}\right)$ über, wobei r' die Entfernungen der Punkte in der Fläche F vom Punkte p bedeutet. Dieser Uebergang erfolgt, nach Ausschluss des Punktes p durch ein beliebig kleines Gebiet, gleichmässig stetig.

Man betrachte gleichzeitig einen festen Punkt o und den variabeln Punkt o'. Um den Punkt o construire man die Curven, auf welchen die Green'sche Function g_o gleich $l\left(\frac{1}{r}\right) + \alpha$ oder $g_o - l\left(\frac{1}{r}\right)$ constant gleich α ist, wobei α einen negativen Werth mit beliebig kleinem Betrag bedeutet. Rückt der Punkt o' auf diese Curve, so hat die zu o' gehörige Green'sche Function $g_o{}'$ im Punkte o den Werth $l\left(\frac{1}{oo'}\right) + \alpha$. Umgiebt man den Randpunkt p, in welchen o' hineinrücken soll, mit einem beliebig kleinen ins Innere von F eindringenden Gebiet, welches den Punkt o' einschliesst, und nennt man F nach Ausschluss dieses Gebiets F', so ist $g_{o'} - l\left(\frac{1}{r'}\right)$ eine in F' überall harmonische Function; r' bezeichnet die variable Entfernung jedes Punktes im Innern oder am Rande der Fläche F' vom Punkte o'. Diese harmonische Function ist im Punkte o gleich α, am Rande von F' überall negativ oder Null, und folglich ist $g_{o'} - l\left(\frac{1}{r'}\right)$ überall im Innern von F' gleich dem Product von α mit endlichen Grössen. (§ 1. Nr. 3.) Convergirt α nach Null, so geht $g_o{}'$ innerhalb F' gleichmässig in den Werth $l\left(\frac{1}{r'}\right)$ über.

Man kann diesen Satz auch folgendermassen aussprechen: Wird irgend eine Curve betrachtet, die ganz im Innern der Fläche F liegt, so convergiren die Werthe, welche die Function $g_{o'}$ auf der Peripherie und im Innern dieser Curve besitzt, gleichmässig nach den Werthen $l\left(\frac{1}{r'}\right)$, wenn o' auf den Rand der Fläche F rückt. Ebenso convergiren auch die Ableitungen der Function g gleichmässig nach den Werthen der entsprechenden Ableitungen von $l\left(\frac{1}{r'}\right)$. (§. 1. Nr. 3.)

§ 4.

Nachweis der Existenz einer harmonischen Function mit beliebigen stetigen Randwerthen.

1. Von der Randcurve C, welche eine *einfach zusammenhängende* Fläche F begrenzt, wird im Folgenden vorausgesetzt, dass ihr Bogenelement $d\sigma$ integrirbar ist, und dass sie nicht unendlich viele Wendungen besitzt. Ueberdies werde der Einfachheit wegen angenommen, dass keine Eckpunkte oder Spitzen auf dem Rande vorhanden sind, sodass es also in jedem Randpunkte eine bestimmte, sich stetig ändernde Tangente giebt. Sind alsdann längs des Randes die Werthe einer eindeutigen und stetigen Function U gegeben, so soll für das Innere der Fläche F die harmonische Function u bestimmt werden, welche gleichmässig stetig in die Randwerthe U übergeht. Unter dem gleichmässig stetigen Uebergang in die Randwerthe verstehe ich folgende Eigenschaft: Bei jeder vorgeschriebenen, beliebig kleinen Grösse δ muss sich zu jedem Randpunkt s ein Gebiet von endlicher Ausdehnung angeben lassen, welches in das Innere von F eintritt, und zum Theil von einem Bogenstück der Randcurve, in welchem s liegt, begrenzt ist, sodass die Werthe der Function u, welche zu den Punkten dieses Gebietes und seiner Grenzlinien gehören, unter einander um weniger als δ differiren.

Es ist bekannt, dass diese Function u, wenn überhaupt, so jedenfalls eindeutig bestimmt ist.

Die von Green (Journ. f. Math. Bd. 44) angegebene Formel lautet:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial \log\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial g}{\partial n} d\sigma .$$

Dabei bedeutet ϱ die Entfernung des Punktes x, y von den Punkten des Randes, g die zum Punkt x, y gehörige Green'sche Function, und $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung der betreffenden Function, gebildet in den Punkten des Randes nach der inneren Normalen.

Die Grösse $\frac{\partial \log\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial n}$ ist gleich $\frac{\cos \varepsilon}{\varrho}$, wobei ε den Winkel bezeichnet, den die nach innen gerichtete Normale mit der Rich-

tung ϱ (von $d\sigma$ nach dem Punkte x, y) einschliesst. Die Grösse $\frac{\cos\varepsilon}{\varrho}\,d\sigma$ giebt den Winkel an, unter welchem das Bogenelement $d\sigma$ vom Punkte x, y aus gesehen wird, wobei jedoch dieser Winkel positiv oder negativ ist, je nach dem Vorzeichen von $\cos\varepsilon$. Derselbe wird von Herrn C. Neumann mit $(d\sigma)_x$ bezeichnet, sodass die vorstehende Integralformel geschrieben werden kann:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial g}{\partial n}\,d\sigma\,.$$

Heine nennt in seiner Theorie der Kugelfunctionen (2. Aufl. Bd. 2, S. 93) diese Formel mit Recht nur eine heuristische: »indem manche Punkte in der Ableitung einen genauen Beweis vermissen lassen. Es ist z. B. noch nicht bewiesen, dass g sich continuirlich ändert, wenn der Pol bis in die Begrenzung fortrückt.«

Der Beweis dieser letzteren Eigenschaft ist in dem vorigen §. in voller Strenge erbracht, dagegen ist über die Ableitung der Function g nach der inneren Normalen nichts bekannt, also weder über ihre Stetigkeit bei Annäherung der Function (nicht ihres Poles) an den Rand, noch über ihre Integrirbarkeit längs des Randes. Ohne auf diese letzteren Fragen näher einzugehen, kann man indessen die Gültigkeit der obigen Formel, sobald man den eigentlichen Inhalt derselben genauer präcisirt, vollkommen beweisen.

2. Behandelt man die beiden Integrale gesondert, so ergeben sich zunächst für das erste die folgenden Eigenschaften, für deren Beweis ich mich auf frühere Arbeiten berufen kann[1]). Das Integral

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x$$

stellt eine im Innern von F harmonische Function dar, welche bei Annäherung an den Rand, d. h. wenn der Punkt x, y in einen Randpunkt s rückt, gleichmässig nach dem Werth

$$U_1 = \tfrac{1}{2}U_s + \tfrac{1}{2}P_s$$

convergirt, wobei U_s den Werth der Function U im Punkte s

---

1) Neumann, Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential (Leipzig 1877), sowie meine Mittheilung: »Zur Theorie des Cauchy'schen Integrales« in diesen Berichten, Jahrgang 1885.

bedeutet, und die »zugeordnete« Function P_s in jedem Punkte s des Randes durch das Integral

$$P_s = \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_s$$

definirt ist.

3. Das zweite Integral bedarf einer neuen Definition. An Stelle der Randcurve C betrachte man eine andere innere Curve C', die in beliebiger Nähe des Randes verläuft. Auf dieser neuen Curve C' vertheile man in bestimmter Weise die Werthe der stetigen Function U.

Um eine bequeme Vorstellung und eine einfache analytische Formulirung vor Augen zu haben, nehme man C' als Parallelcurve zu C an. Die Parallelcurve C' besitzt, wenn sie in beliebiger Nähe von C verläuft, keine Doppelpunkte, Ecken oder Spitzen, wenn C keine derartigen singulären Punkte hat. Die Punkte von C' sind den Punkten von C eindeutig zugeordnet. Rückt die Parallelcurve durch Verkleinerung ihres Abstandes beliebig nahe an die Curve C, so rücken auch die zugeordneten Punkte einander beliebig nahe. Auf der Curve C' vertheile man die Function U derart, dass in den zugeordneten Punkten von C und C' die Werthe von U übereinstimmen. Das Bogenelement der Curve C' heisse $d\sigma'$.

Man bilde die harmonische Function u_2', welche in jedem Punkte O der Fläche durch das Integral

$$u_2' = \frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial g}{\partial n'}\,d\sigma'$$

definirt ist. Dabei soll g die zum Punkte O gehörige Green'sche Function für die von der Curve C umschlossene Fläche F sein; $\frac{\partial g}{\partial n'}$ aber die Ableitung dieser Function, *gebildet längs der Curve* C' nach der inneren Normalen. Ebenso erstreckt sich die Integration nicht über die Randcurve C, sondern über die Curve C'. Es ist $\frac{\partial g}{\partial n'}$ längs dieser inneren Curve eine durchaus reguläre Function.

Nun ist zu untersuchen, welche Grenzwerthe U_2' diese Function in den Punkten des Randes C besitzt. Lässt man den Punkt O in einen Randpunkt — er heisse s — rücken, so geht die Green'sche Function, sowie ihre Ableitung in den Punkten der inneren Curve C' gleichmässig stetig in den Werth $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$

versuch gezeigt hatte, dass das entsprechende Silbersalz in heissem Wasser leicht löslich war, so wurde die Gesammtmenge des Barytsalzes in heissem Wasser gelöst und mit Silbernitratlösung versetzt; leider färbte sich der Niederschlag alsbald braun und löste sich nicht mehr völlig in verdünnter Salpetersäure auf. Das Filtrat wurde mit Ammoniak fast ganz neutralisirt und setzte beim Erkalten ein schmutzigweisses krystallinisches Salz ab, welches abfiltrirt und dann aus wenig kochendem Wasser umkrystallisirt wurde. So gereinigt war dieses Silbersalz weiss, krystallinisch, und nach dem Trocknen im Exsiccator durch Wasser nur sehr schwer benetzbar. Eine Silberbestimmung ergab:

0.1588 g im Exsiccator bis zu constantem Gewicht getrocknetes Salz wurden auf dem Wasserbade mit verdünnter Salzsäure zersetzt und lieferten: 0.0909 g *AgCl* und 0.00354 g *Ag* = 0.07197 g *Ag* = 45.32%.

Für oxycapronsaures Silber berechnet sich der Silbergehalt zu 45.19%; da der gefundene Silbergehalt mit diesem sehr gut übereinstimmt, so ist die Annahme, dass die Säure des analysirten Silbersalzes eine *Oxycapronsäure* (und zwar vermuthlich ε-Oxycapronsäure) gewesen, wohl völlig gerechtfertigt. Die Mutterlauge des soeben beschriebenen Silbersalzes enthielt noch organische Säuren, doch konnten dieselben, ihrer geringen Menge wegen, nicht mehr isolirt werden. Aus den letzten alkoholischen Auszügen des Gemenges der Barytsalze wurde eine kleine Menge (0.0540 g) eines Silbersalzes erhalten, dessen Säure krystallisirte und welches 0.0345 g *AgCl* = 0.025965 g *Ag* = 48.08% lieferte; dieser Silbergehalt stimmt genau mit dem für oxyvaleriansaures Silber berechneten (48.00% *Ag*) überein, doch darf man diesem Befunde wegen der so geringen Menge der analysirten Substanz keine allzugrosse Bedeutung beimessen.

γ) Der nach der Behandlung mit Alkohol verbliebene *Rückstand* löste sich sehr leicht in Wasser; die Lösung schied beim Erhitzen noch ziemliche Mengen von α ab, behufs deren Entfernung dieselbe zunächst mit Wasser verdünnt und dann so lange mit kleinen Mengen absoluten Alkohols versetzt wurde, als der an der Oberfläche entstehende dicke klebrige Niederschlag sich beim Umschütteln noch löste und bis die geschüttelte Flüssigkeit plötzlich fast klar erschien; hierzu war ca. $\frac{1}{2}$ Vol.

Alkohol erforderlich gewesen. Die klare Lösung hinterliess beim Eindampfen einen theils krystallinischen, theils amorphen, gummiartigen Rückstand; derselbe wurde in Wasser gelöst, die Lösung kochend mit einem möglichst geringen Ueberschusse von schwefelsaurem Zinkoxyd gefällt, filtrirt und eingedampft. Dabei schied sich eine ziemliche Menge eines krystallinischen, schwer löslichen Zinksalzes aus; dasselbe war wasserfrei und gab bei der Verbrennung folgende Resultate:

0.1345 g wurden im offenen Rohre im Schiffchen sehr langsam verkohlt, dann im Sauerstoffstrom verbrannt, und lieferten: 0.0448 g H_2O = 0.0049778 g H = 3.70 %; 0.1545 g CO_2 = 0.0421364 g C = 31.33 %, und 0.0530 g ZnO = 0.042531 g Zn = 31.62 %.

Aus diesen Zahlen lässt sich keine einfache Formel berechnen, sie deuten aber (unter der Voraussetzung, dass etwas Zink verloren gegangen) auf ein Gemenge von adipinsaurem (1 Th.) und glutarsaurem (5.57 Th.) Zinkoxyd hin, welches 31.36 % C, 3.20 % H und 32.97 % Zn enthalten würde. Das noch vorhandene Zinksalz wurde daher wieder ins Barytsalz verwandelt, die mit Salzsäure angesäuerte Lösung desselben im Schwarze'schen Apparate mit Aether extrahirt und die Aetherlösung verdunstet. Die rückständige Säure krystallisirte, aber das aus derselben dargestellte Barytsalz trocknete wieder nur zum Gummi ein, in welchem sich erst nach längerem Stehen einige Krystallwärzchen zeigten. Dasselbe wurde wieder in Wasser gelöst und in zwei Fractionen mit Silberlösung gefällt; der I. Niederschlag liess unter dem Mikroskope Wärzchen, grössere Nadeln und runde Täfelchen erkennen und wurde nicht weiter untersucht, der zweite Niederschlag bildete ebenfalls Nadeln und hatte ein homogenes Aussehen. Die Analyse des im Exsiccator getrockneten Salzes ergab folgende Zahlen:

0.1389 g Salz im Schiffchen verbrannt gaben: 0.0953 g CO_2 = 0.025991 g C = 18.71 %; 0.0245 g H_2O = 0.002722 g H = 1.96 %, und 0.0838 g Ag = 60.33 %.

Diese Zahlen stimmen fast ganz genau auf ein Gemenge gleicher Moleküle adipinsauren und glutarsauren Silbers, für welches sich berechnet: 18.69 % C, 1.98 % H und 61.19 % Ag. Diese Uebereinstimmung ist jedenfalls genügend gross, um die Anwesenheit der *Glutarsäure* in dem analysirten Salze als nachgewiesen betrachten zu können.

Die Mutterlauge des beschriebenen Zinksalzes schied beim weiteren Eindampfen noch eine kleine Menge desselben ab; das Filtrat von demselben wurde mit Alkohol versetzt, wodurch ein Niederschlag entstand. Dieser löste sich nicht mehr völlig in Wasser; die filtrirte Lösung hinterliess beim Eindampfen einen leichtlöslichen Syrup und ein in Wasser sehr schwer lösliches, in sechsseitigen Täfelchen krystallisirendes Salz (glutarsaures Zink?), daneben auch noch Nädelchen. Die alkoholische Lösung dagegen hinterliess einen kleinen, krystallinischen Rückstand, in welchem sich unter dem Mikroskope Körner und rhombische Blätter erkennen liessen. Die Menge aller dieser Rückstände war für eine weitere Untersuchung viel zu gering, wie denn überhaupt die Gesammtmenge aller bei dem Versuche gewonnenen Säuren nur ein paar Gramm betragen hatte. Dieser Umstand im Vereine mit dem anderen, dass scharfe Trennungsmethoden für die gefundenen Säuren überhaupt noch nicht bekannt sind, erklärt auch, warum bei den angestellten Analysen keine besser stimmenden Resultate erhalten werden konnten.

Wendet man zur Elektrolyse nicht eine Lösung des Magnesiasalzes, sondern eine solche des Kalisalzes an, so scheinen die beschriebenen Säuren in noch viel geringerer Menge zu entstehen; Herr Dr. F. Hundeshagen konnte wenigstens in einem derartigen Versuche (50 g Capronsäure als Kalisalz in ca. 700 ccm Wasser gelöst und 60^h lang zwischen 6 Platinplatten elektrolysirt) gar keine niederen Fettsäuren[1]) und nur Spuren nicht flüchtiger Säuren nachweisen.

Aus den im Vorstehenden mitgetheilten Thatsachen ergiebt sich also, dass, ebenso wie in meinen früheren Versuchen, auch bei der Elektrolyse der capronsauren Magnesia mit Wechselströmen nicht dieselben Producte entstehen, wie bei der Elektrolyse mit gleichgerichteten Strömen; an deren Stelle treten vielmehr 1) niedere Fettsäuren (Valeriansäure, Buttersäure), 2) Oxyfettsäuren (Oxycapronsäure), und 3) zweibasische Säuren (Adipinsäure, Glutarsäure, Bernsteinsäure, Oxalsäure) auf. Ausser den genannten sind sicher auch noch andere Säuren vorhanden, welche aber wegen ihrer geringen Menge und des Mangels

1) Die letzten Silberfractionen, welche die niedere Fettsäuren hätten enthalten müssen, zeigten einen Silbergehalt von 48.49 % und 48.81 %; capronsaures Silber enthält 48.48 % *Ag*.

an guten Trennungsmethoden nicht mit Sicherheit erkannt werden konnten; immerhin dürfte die Annahme nicht zu gewagt sein, dass dieselben den nämlichen Reihen angehören, und zwar deren kohlenstoffärmste Glieder sind.

Die Frage, wie diese Säuren aus der Capronsäure[1]) entstehen, ist leicht zu beantworten; schwieriger die andere, warum die Elektrolyse mit Wechselströmen so ganz anders wirkt, als die gewöhnliche Elektrolyse. Die Bildung der oben genannten Säuren aus Capronsäure erfolgt einfach auf dem Wege der fortschreitenden Oxydation, ein Vorgang, der sich durch folgende Gleichungen veranschaulichen lässt:

1) $CH_3.(CH_2)_4.CO.OH + O = CH_2(OH).(CH_2)_4.CO.OH$

2) $CH_2(OH).(CH_2)_4.CO.OH + 2O = CO.OH.(CH_2)_4.CO.OH + H_2O.$

Aus der einbasischen Fettsäure entsteht zunächst die entsprechende Oxysäure, und aus dieser die zweibasische Säure mit derselben Anzahl von Kohlenstoffatomen. Wird diese weiter oxydirt, so zerfällt sie in Kohlensäure und eine Oxysäure, welche ein Atom Kohlenstoff weniger enthält:

3) $CO.OH.(CH_2)_4.CO.OH + O = CO_2 + CH_2(OH).(CH_2)_3.CO.OH.$

Durch mehrmalige Wiederholung desselben Vorgangs entstehen kohlenstoffärmere Säuren:

4) $CH_2(OH).(CH_2)_3.CO.OH + O_2 = CO.OH.(CH_2)_3.CO.OH + H_2O$

5) $CO.OH.(CH_2)_3.CO.OH + O = CO_2 + CH_2(OH).(CH_2)_2.CO.OH$

6) $CH_2.(OH).(CH_2)_2.CO.OH + O_2 = CO.OH.(CH_2)_2.CO.OH + H_2O$

7) $CO.OH.(CH_2)_2.CO.OH + O = CO_2 + CH_2(OH).CH_2.CO.OH$

8) $CH_2(OH).CH_2.CO.OH + O_2 = CO.OH.CH_2.CO.OH + H_2O$

9) $CO.OH.CH_2.CO.OH + O = CO_2 + CH_2(OH).CO.OH$

10) $CH_2(OH).CO.OH + O_2 = CO.OH.CO.OH + H_2O$

11) $CO.OH.CO.OH + O = 2\ CO_2 + H_2O.$

Nur die Bildung der niederen Fettsäuren wird als eine Reduction der Oxysäuren aufzufassen sein:

12) $CH_2(OH).(CH_2)_3.CO.OH + H_2 = CH_3.(CH_2)_3.CO.OH + H_2O$ u.s.w.,

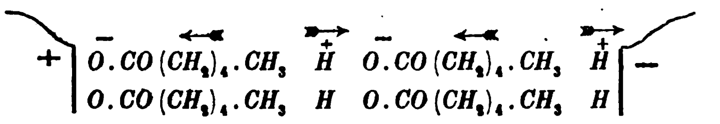
und die so entstandenen Säuren werden dann jedenfalls auch wieder nach Analogie der Capronsäure zersetzt. Im Grossen und

---

1) Die Bildungs- und Zersetzungsgleichungen sind im Folgenden der grösseren Einfachheit und Uebersichtlichkeit halber für Capronsäurehydrat statt für capronsaure Magnesia gegeben.

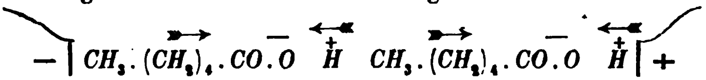
Ganzen handelt es sich also hier um eine fortschreitende Oxydation, und diese ist deshalb von besonderem Interesse, als sie ganz allmählich und stufenweise erfolgt — ein Kohlenstoffatom nach dem anderen wird aus der ursprünglichen Substanz herausgenommen und zu Kohlensäure verbrannt, und ebenso der Wasserstoff zu Wasser.

Bei Beantwortung der zweiten Frage: warum nämlich die Elektrolyse der Capronsäure mit Wechselströmen ganz andere Producte liefert als die gewöhnliche Elektrolyse, zeigen sich einige Schwierigkeiten. Einerseits muss man jedenfalls annehmen, dass der galvanische Strom auf den Elektrolyten stets in derselben Art und Weise einwirkt, gleichgültig in welcher Richtung er diesen durchfliesst; aber anderseits stehen die durch Wechselströme erzeugten Producte in keiner Beziehung zu den Producten der gewöhnlichen Elektrolyse, sie lassen sich aus letzteren nicht unmittelbar ableiten, und müssen besonderen Vorgängen entspringen. Um zu einer annehmbaren Vorstellung über die Natur dieser Vorgänge zu gelangen genügt es, gewisse Voraussetzungen zu machen, welche auch schon früher gemacht worden sind, nämlich der, dass die durch den Strom erzeugten Jonen nicht sofort weiter zerfallen, sondern erst nach Ablauf einer gewissen Zeit, ferner dass die Jonen Polarität besitzen und infolge dessen durch den Strom gerichtet werden, ähnlich wie ein Magnet, und endlich, dass diese Richtung durch den Strom nicht momentan erfolgt, sondern eine gewisse, wenn auch kleine Zeit beansprucht. Unter diesen Voraussetzungen kommt man zu folgenden Vorstellungen: Zunächst erfolgt die Zersetzung der Capronsäure (bez. ihres Magnesiasalzes) ganz wie gewöhnlich in die Jonen H (bez. Mg) und $O.CO.(CH_2)_4.CH_3$; letzteres ist negativ polar, und zwar ist die Atomgruppe $O.CO$ der Sitz des Poles. Lässt man nun die allgemein übliche Annahme, dass die einzelnen Atome im Molekül der normalen Fettsäuren eine kettenförmige Anordnung, die Moleküle selbst also eine längliche Gestalt besitzen, gelten, so werden sich unter dem Einflusse des Stromes alle diese Jonen mit dem $O.CO$-Ende senkrecht auf die Fläche der Anode stellen:

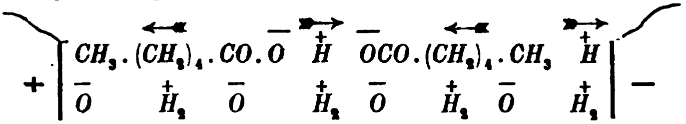


Behält der Strom seine Richtung bei, so kommen alle Jonen

in dieser Stellung an, und nach Ablauf einer gewissen Zeit zersetzen sich je zwei nach der Gleichung: $2\,O.CO.(CH_2)_4.CH_3 = 2\,CO_2 + C_{10}H_{22}$, man erhält also die Producte der gewöhnlichen Elektrolyse. Kehrt aber der Strom, bevor diese Zersetzung eintritt, seine Richtung um (und ich will hier darauf hinweisen, dass in meinem Versuche der Polwechsel ca. 70 Mal in einer Secunde erfolgte), so erfahren die Jonen eine Drehung um 180°, und die Wirkung des ersten Stromes wird aufgehoben:



Hiernach wäre also das Resultat der Einwirkung eines Wechselstrompaares = 0, und damit stimmt die Beobachtung überein, dass der allergrösste Theil der Capronsäure nach Beendigung des Versuchs unverändert vorgefunden wurde. Man sieht leicht ein, dass an diesem Ergebnisse auch nichts geändert werden kann, wenn gleichzeitig Wasser durch den Strom zersetzt wird. Die Sachlage ändert sich jedoch ganz wesentlich, wenn einmal ein Jon $CH_3.(CH_2)_4.CO.O$ infolge irgendwelcher Behinderung die Drehung um 180° nicht schnell genug ausführen könnte, während gleichzeitig Wasser zersetzt wird; dann würde sich nämlich im unmittelbaren Anschlusse an das letzte Schema das folgende ergeben:



d. h. ein Atom O würde sich in unmittelbarer Nähe des *Methyls* im Jon $CH_3.(CH_2)_4.CO.O$ befinden, und mit demselben sich zu Methoxyl $CH_2(OH)$ vereinigen, wodurch die Umwandlung der Capronsäure in ε-Oxycapronsäure bewirkt wäre; selbstverständlich müsste dabei an der Kathode eine dem verbrauchten Sauerstoff äquivalente Menge Wasserstoff frei werden. Auf ganz ähnliche Art und Weise würde dann die Oxydation der Oxycapronsäure zu Adipinsäure etc. nach den oben angeführten Gleichungen weiterschreiten. Dass man als oxydirendes Agens anstatt O auch OH oder ein Jon $O.CO.R'$ annehmen kann, bedarf keiner besonderen Erläuterung.

Man könnte gegen die soeben entwickelte Hypothese vielleicht einwenden, dass dieselbe zu complicirt sei, allein ohne

dieselbe ist vorläufig nicht einzusehen, warum die beobachteten Oxydationen nur unter dem Einflusse von Wechselströmen erfolgen. Herr Dr. F. Hundeshagen hat auf meine Veranlassung 25 *g* Capronsäure als Magnesiasalz in einer Lösung von doppeltkohlensaurer Magnesia gelöst der gewöhnlichen Elektrolyse unterworfen; dabei schied sich sofort eine obige durchdringend riechende Flüssigkeit (Diamyl?) und (besonders auf den Elektroden) kohlensaure Magnesia ab, aber in der Flüssigkeit konnten weder niedere Fettsäuren noch zweibasische Säuren aufgefunden werden, eine Oxydation der Capronsäure zu Adipinsäure etc. hatte demnach nicht stattgefunden. Diese Beobachtung beweist zugleich, dass die häufig gemachte Annahme, die bei der gewöhnlichen Elektrolyse auftretenden Jonen $O.CO.R'$ zersetzten sich zunächst mit Wasser in Säurehydrat und Sauerstoff, welch' letzterer dann die Säure wieder zu Kohlensäure, Wasser und Kohlenwasserstoff oxydire:

$$2\,O.CO.R' + H_2O = 2\,HO.CO.R' + O = H_2O + 2\,CO_2 + R'_2,$$

nicht richtig sein kann; denn wäre dem so, so müsste man erwarten, dass diese Art der Zersetzung und Oxydation auch bei der Elektrolyse mit Wechselströmen auftrete, was eben nicht der Fall ist. Daher bleibt nur die andere Annahme bestehen, nach welcher die fraglichen Jonen sich unmittelbar, ohne Dazwischenkunft des Wassers, nach einiger Zeit in folgender Weise zersetzen:

$$\left.\begin{matrix} O.CO.R' \\ O.CO.R' \end{matrix}\right\} = 2\,CO_2 + \left.\begin{matrix} R' \\ R' \end{matrix}\right\}.$$

Dass bei dieser Art der Zersetzung keine Gelegenheit zur Entstehung von Oxysäuren und zweibasischen Säuren gegeben ist, leuchtet unmittelbar ein.

Die oben beschriebenen Versuche zeigen ebenso, wie meine früheren, dass bei der Elektrolyse mit Wechselströmen ganz andere Producte erhalten werden, als mit gleichgerichteten Strömen. Hat diese Thatsache schon an und für sich Interesse, so gewinnt sie doch noch viel mehr, wenn wir dieselbe mit gewissen physiologischen Thatsachen zusammen halten. Ohne schon jetzt näher auf diesen Punkt einzugehen, will ich nur darauf hinweisen, dass geradeso wie im vorliegendem Falle auch im Thierkörper die physiologische Verbrennung ganz allmählich und stufenweise erfolgt; angesichts solcher Thatsachen, wie z. B.

des Vorkommens von Glykuronsäure im Harn, sind wir zu dieser Annahme berechtigt, trotzdem, dass wir noch nicht im Stande sind, alle möglichen Zwischenproducte der fortschreitenden Verbrennung im Organismus und seinen Secreten nachzuweisen. Mit der Zeit wird dies indessen gelingen, ebenso wie es hinsichtlich der Glykuronsäure schon gelungen ist, und die Annahme erscheint daher nicht zu kühn, dass *im Thierkörper die Verbrennung der Nahrungs- und Gewebsbestandtheile in derselben Art und Weise, nach denselben Gesetzen erfolgt wie in dem vorliegenden Versuche.* Ob dabei im Organismus auch Wechselströme wirksam sind, lässt sich vorderhand nicht entscheiden, aber gerade in Bezug hierauf hat die Frage ein besonderes Interesse, ob nicht unter gewissen Bedingungen gleichgerichtete Ströme dieselben Zersetzungen hervorrufen könnten, wie Wechselströme. Und dies scheint in der That nicht ausserhalb des Bereiches der Möglichkeit zu liegen. Denkt man sich nämlich die beiden Pole in möglichst geringem Abstand von einander, so gewinnt es den Anschein, als ob die Bedingungen dann auch bei gleichgerichteten Strömen denen bei Wechselströmen ähnlich sein müssten, und noch mehr, wenn eine sehr grosse Anzahl Pole auf einen möglichst kleinen Raum zusammengedrängt wären. Die technischen Schwierigkeiten, welche sich der Ausführung eines derartigen Versuches entgegenstellen, sind ohne Zweifel nicht unbedeutend; dass sie aber nicht unüberwindlich sind, dürfte aus folgendem Versuche hervorgehen. Elektrolysirt man nämlich genügend verdünnte Schwefelsäure mit gleichgerichteten Strömen und bringt zwischen die Platinelektroden, aber isolirt, ein Stück Messingdrahtnetz, so wird dieses schnell roth, indem das Zink daraus aufgelöst wird. Das Drahtnetz nimmt also an der Elektrolyse Theil, trotzdem, dass es mit den Polen nicht direct verbunden ist, und muss daher selbst beide Pole besitzen; ich gedenke diese Versuche demnächst weiter fortzusetzen, namentlich unter Anwendung von Metallpulver. Hier würden dann die Pole in grösster Anzahl und Nähe gegeben sein — aber auch der Organismus verfügt über Apparate, deren Theile in unmessbar kleinen Abständen von einander gelagert sind und ebenso über galvanische Ströme, sodass hier alle Bedingungen erfüllt zu sein scheinen, welche soeben für das Gelingen des Versuches als nothwendig erachtet wurden.

Schliesslich möchte ich auf noch einen Punkt hinweisen,

dessen nähere Untersuchung interessante Resultate verspricht. Ist nämlich die Voraussetzung, dass bei constanter wie bei alternirender Stromrichtung die primäre Zersetzung gleich ist, wie nicht zu bezweifeln, richtig, so müssen bei einer bestimmten Geschwindigkeit des Stromwechsels (und zwar einer geringeren als in meinen Versuchen) dieselben Producte, also Kohlensäure und Kohlenwasserstoff, aus den Fettsäuren erhalten werden, wie bei Anwendung gleichgerichteter Ströme. Ist diese Geschwindigkeit aber bekannt, so ergiebt sich unmittelbar daraus die Zeit, welche bis zur freiwilligen Zersetzung der Jonen verfliesst, oder, mit anderen Worten, die Zeit, während welcher die Jonen unzersetzt bestehen können.

Herrn Dr. F. Hundeshagen sage ich für die werthvolle Hülfe, die er mir bei Anstellung der mitgetheilten Versuche vielfach geleistet hat, meinen besten Dank.

J. Thomae, *Weitere Untersuchungen über den elastischen Kreiscylinder.*

In einer Mittheilung, welche ich am 21. November 1885 der Königl. Gesellschaft gemacht habe, die in den Berichten des vergangenen Jahres abgedruckt ist, beschäftige ich mich mit einem schweren elastischen homogenen Kreiscylinder, dessen Endflächen gezwungen sind, eben zu bleiben. Durch meine Bemühungen, die obere Endfläche von der Bedingung der Ebenheit zu befreien, gelangte ich zu einer neuen Schaar von Integralen der partiellen Differentialgleichung, von welcher das Problem abhängt, und es sind diese Integrale mit den früher gefundenen allgemein genug, jene Befreiung im Princip als möglich erscheinen zu lassen. Für die Bestimmung der Constanten, welche zur völligen Lösung nöthig sind, fehlt mir jedoch noch eine expedite Methode. Es mag aber bemerkt werden, dass für den Fall, in welchem die Höhe des Cylinders seinen Durchmesser erheblich übertrifft, für den Fall, dass jener Grad von Genauigkeit genügt, welcher beim Venant-schen Problem üblich ist, die Lösung unserer Aufgabe schon in jener Mittheilung gegeben ist. Im Venant'schen Problem werden gewisse Zustände im Innern einer elastischen Säule angenommen und es wird gefragt, welche Kräfte an den Enden derselben angebracht werden müssen, damit jene Zustände eintreten. Alsdann glaubt man eine hinreichende Annäherung an wirkliche Zustände gefunden zu haben, wenn man an den Endflächen statt der Kräfte, wie sie in bestimmter Vertheilung das Venant'sche Problem fordert, andere anbringt, welche jene am *starren* Körper ersetzen könnten. Nun wurde aber der Gesammtdruck auf die obere Endfläche eines nur der Schwere als wirkender Kraft ausgesetzten, auf fester Grundlage ruhenden Cylinders gleich Null gefunden. Ist demnach die Höhe des Cylinders eine solche, dass die Voraussetzungen des Venant-

schen Problemes als zulässig erscheinen, so ist die Annahme, dass die Endflächen eben bleiben, annähernd von selbst erfüllt, und es ist die äussere Gestaltsveränderung, sowie der Zustand im Innern des Körpers in meiner früheren Mittheilung in dem eben besprochenen Grade der Annäherung bereits gefunden.

Zu jener Mittheilung will ich nun hier fortsetzend Einiges hinzufügen, deshalb die dort gebrauchte Bezeichnung im Allgemeinen beibehalten und in der Numerirung der Artikel (nicht aber der Formeln) die jetzigen Bemerkungen den früheren unmittelbar anschliessen.

Wie schon oben bemerkt wurde, giebt es ausser den früher gefundenen Lösungen der Gleichgewichts-Differentialgleichungen eines elastischen Cylinders, in welchem alle Verschiebungen vom Azimuth unabhängig sind, noch eine zweite Klasse von Integralen. Ein Individuum dieser Klasse enthält nur ganze rationale Functionen der unabhängigen Variabeln, und wird im Art. V. gefunden und discutirt. Es entspricht dieser Lösung ein ziemlich einfacher Zustand des schweren elastischen Cylinders, nämlich der Zustand, in welchem der Cylinder sich befindet, wenn er in ein gewisses, nur von den Elasticitätscoëfficienten und der Dichte abhängendes Rotationsparaboloid gestellt wird, und wenn sonst ausser der Schwere keine Kräfte auf ihn wirken. Alle ursprünglich horizontalen Ebenen gehen in ähnliche Paraboloide über, und der Mantel des Cylinders verwandelt sich in den Mantel eines abgestumpften geraden Kegels. Da das in Rede stehende Paraboloid sehr flach ist, so unterscheidet sich, namentlich wenn der Radius des Cylinders nicht beträchtlich ist, der Zustand eines auf fester Grundebene stehenden nur wenig von dem besprochenen, sodass dieser näherungsweise den Zustand jenes angiebt.

Im Art. VI wird sodann eine neue Schaar ganzer transcendenter Lösungen der elastischen Differentialgleichungen den früher gefundenen hinzugefügt. Dieselbe enthält ihren Parameter in transcendenter Form; da sich aber für ein und denselben Werth des Parameters vier verschiedene Lösungen vorfinden, so können wir als eine particuläre Lösung eine solche ansehen, welche einem bestimmten Werthe des transcendent vorkommenden Parameters entspricht, aber ausserdem vier willkürliche Constanten linear enthält. Sodann wird untersucht, welche Oberflächenbedingungen sich durch passende Wahl der

Verhältnisse dieser Constanten erfüllen lassen, sodass immer noch ein willkürlicher Factor bleibt.

Die Bedingung, dass auf die Mantelfläche nur normale Kräfte wirken sollen, lässt sich durch passende Wahl des transcendenten Parameters auf unendlich viele verschiedene Weisen erfüllen, derselbe muss hierzu die Wurzel einer transcendenten Gleichung sein, von der es bekannt ist, dass sie unendlich viele Lösungen zulässt.

Es liegt nun nahe, durch Zusammenfügung dieser particulären Lösungen zu einer allgemeineren zu gelangen, und diese noch mit den im Art. IV gefundenen zu verbinden. Dies habe ich auch wirklich gethan, ich unterdrücke aber zur Zeit diese Untersuchungen, weil die erhaltenen Formeln wenig durchsichtig sind.

Beachten wir, dass den particulären Integralen auch dann reelle Werthe zukommen, wenn man dem Parameter einen rein imaginären Werth zuertheilt, so wird dadurch die Menge der Lösungen so vermehrt, dass dieselben wohl als die allgemeinsten angesehen werden dürften, es wird deshalb am Schlusse eine Zusammenstellung aller erlangten Lösungen ohne Rücksicht auf Nebenbedingungen gegeben [1]).

---

1) Einige Druck- oder Schreibfehler, welche ich in meiner Mittheilung in den Berichten von 1885 bemerkt habe, mögen hier corrigirt werden. Auf Seite 408, Zeile 2 von unten lies $f_0 \frac{\partial f_1}{\partial \lg r}$ statt $f_1 \frac{\partial f_0}{\partial \lg r}$. Seite 405, Gleichung (7) lies $\int\limits_0^r$ statt $\int\limits_0^1$. Seite 406, Zeile 9 von oben lies $z^2 - z\,l$ statt $z^2 - 2\,l$. In Gleichung (40a.) lies $\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial z^2}$ statt $\bar{s}$. Auf Seite 415 ist in (28.) vor dem Zeichen Σ der Factor g anzubringen. In (28a.) lies zweimal n statt u im Index. Seite 416, Zeile 5 von unten ist der Divisor l vor dem Zeichen Σ anzubringen. Seite 418, Zeile 1 lies $C'z$ statt Cz'. Die Gleichung für s ebendort ist

$$s = \lambda C' + \frac{\lambda \varrho g}{2\nu(\lambda + \nu)} \, \frac{\lambda - 2z}{8} = \frac{\lambda \varrho g (l - z)}{8\nu(\lambda + \nu)},$$

und sie bedeutet, dass wenn $k^2 : l^2$ vernachlässigt werden darf, der Cylinder in einen geraden abgestumpften Kegel übergeht, dessen obere Endfläche ihre Grösse nicht geändert hat, während der Radius k der unteren Endfläche um $k\lambda\varrho g l : 8\nu(\lambda + \nu)$ gewachsen ist. — In der Gleichung für w ebendort lies $\lambda + 2\nu$ statt $\lambda + \nu$, und vor dem Zeichen Σ im Zähler lies λ^2 statt λ. Auf Seite 410 ist in der Gleichung für τ_n vor t_n der Factor r^2 zu streichen.

Art. V. Ganze rationale Lösungen der Differentialgleichungen der Elasticität.

Die Achse des Cylinders falle wie früher mit der z-Achse zusammen, für seine untere Endfläche sei $z=0$, für seine obere $z=l$. Die Entfernung von der Achse sei r und für den Mantel sei $r=k$, w sei die verticale und rs die radiale Verschiebung, ϱ die Dichte und zur Abkürzung

$$\bar{w}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \lg r\,\partial z}\,,\qquad \bar{s}=\frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial s}{\partial \lg r}+\frac{\partial^2 s}{\partial \lg r^2}\right),$$

so sind die elastischen Differentialgleichungen fürs Gleichgewicht (vergl. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elasticität Seite 337. Gl. (2))

$$(1)\quad (\lambda+2\nu)\bar{s}+\nu\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}+(\lambda+\nu)\bar{w}=0\,,$$

$$(2)\quad \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \lg r^2}+(\lambda+2\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(\lambda+\nu)\left\{2\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial^2 s}{\partial z\,\partial \lg r}\right\}=\varrho g\,,$$

oder, wenn die Schwere ausser Spiel bleibt:

$$(2^a)\quad \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \lg r^2}+(\lambda+2\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(\lambda+\nu)\left\{2\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial^2 s}{\partial z\,\partial \lg r}\right\}=0\,.$$

Durch Elimination folgt aus (1) und (2) oder auch aus (1) und (2^a):

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial \lg r^2}+2\frac{\partial \bar{s}}{\partial \lg r}+2r^2\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial z^2}+r^2\frac{\partial^4 s}{\partial z^4}=0\,.$$

Die Bedingungen an den Endflächen, wenn dort nur normale Kräfte wirken sollen, sind

$$(4)\qquad \frac{\partial s}{\partial z}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \lg r}=0\,,$$

$$(4^a)\qquad \lambda\left(2s+\frac{\partial s}{\partial \lg r}\right)+(\lambda+2\nu)\frac{\partial w}{\partial z}=\mp Z\,,$$

worin das negative Zeichen für $z=0$, das positive für $z=l$ statt hat, und Z eine Function von r allein sein muss, wenn die Unterdrückung des Azimuths gerechtfertigt sein soll. Für die Mantelfläche $r=k$ aber, wenn dort ebenfalls nur normale und nur von z abhängende Kräfte wirken sollen, gelten die Bedingungen:

$$(5)\qquad (\lambda+2\nu)\left(2s+\frac{\partial s}{\partial \lg r}\right)+\lambda\frac{\partial w}{\partial z}=\Pi(z)\,,$$

$$(5^a)\qquad \frac{\partial s}{\partial z}+\frac{1}{k^2}\frac{\partial w}{\partial \lg r}=0\,.$$

Die Differentialgleichung (3) kann nach der Fourier'schen Methode integrirt werden, und es wurden auf diesem Wege bereits die Integrale $t \cos \varepsilon r$, $t \sin \varepsilon r$ gefunden, worin

$$t = A f_0(\varepsilon r) + B f_1(\varepsilon r)\,,$$

$$f_\delta(r) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{r^{2m}}{2^{2m}\, fac\, m\; fac\, m+\delta}$$

zu setzen ist. Auch der Fall $\varepsilon = 0$ wurde untersucht. Ich habe jedoch weiter gefunden, dass man (3) auch durch die Annahme $s = z t e^{\varepsilon z}$ befriedigen kann, wenn t nur von r abhängt, woraus sich, da ε willkürlich ist, eine neue Schaar von Integralen ergiebt. In diesem Art. will ich jedoch zunächst den Fall $\varepsilon = 0$ untersuchen, oder ich will, etwas allgemeiner, $s = t(a + bz)$ voraussetzen. Die Differentialgleichung (3) liefert dann für t die Bedingung

$$\frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \lg r^2} + 2\frac{\partial \bar{t}}{\partial \lg r} = 0\,, \quad \bar{t} = \frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial t}{\partial \lg r} + \frac{\partial^2 t}{\partial \lg r^2}\right),$$

woraus folgt, wenn man nur die für $r = 0$ *nicht singuläre* Lösung der Differentialgleichung in Betracht zieht, $t = a' + b' r^2$, sodass nun s die Gestalt erhält:

$$s = \alpha + \beta z + \gamma r^2 + \delta r^2 z\,,$$

worin übrigens die Constanten alle vier willkürlich sind. Zur Bestimmung von w erhält man aus (1):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial \lg r} = -\frac{\lambda + 2\nu}{\lambda + \nu} r^2 \bar{s} = -\frac{8(\lambda + 2\nu)}{\lambda + \nu} r^2 (\gamma + \delta z)\,,$$

$$w = -\frac{2(\lambda + 2\nu) r^2}{\lambda + \nu}(2\gamma z + \delta z^2) + \Phi(r) + \Psi(z)\,,$$

und es sind Φ und Ψ insoweit willkürliche Functionen, als sie nicht durch die Gleichungen (2) beschränkt werden. Setzen wir die gefundenen Ausdrücke in (2) ein, so erhalten wir:

$$-\frac{4\nu(\lambda + 2\nu)}{\lambda + \nu}(2\gamma z + \delta z^2) + \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lg r^2} - \frac{4(\lambda + 2\nu)^2}{\lambda + \nu}\delta r^2$$
$$+ (\lambda + 2\nu)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2(\lambda + \nu)(\beta + 2\delta r^2) = \varrho g\,.$$

Mithin kann Φ, wenn diese Function im Punkte Null nicht singulär sein soll, nur vom vierten Grade sein und nur gerade Potenzen von r enthalten, und Ψ kann ebenfalls nur vom vierten Grade sein, sodass wir setzen können:

$$\Phi = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}' r^2 + \mathfrak{c}' r^4, \quad \Psi = \mathfrak{b} z + \mathfrak{c} z^2 + \mathfrak{d} z^3 + \mathfrak{e} z^4 .$$

Dies in (2) eingesetzt, liefert die Beziehungen:

$$\mathfrak{e} = \frac{2\nu\delta}{3(\lambda+\nu)}, \quad \mathfrak{d} = \frac{8\nu\gamma}{3(\lambda+\nu)}, \quad \mathfrak{c}' = \frac{2\lambda+3\nu}{4(\lambda+\nu)}\delta,$$

$$\mathfrak{b}' = \frac{\varrho g - 2(\lambda+\nu)\beta - 2(\lambda+2\nu)\mathfrak{c}}{4\nu},$$

und es ergiebt sich für (1) und (2) die Lösung

(6) $$s = \alpha + \beta z + \gamma r^2 + \delta z r^2,$$

(7) $$w = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} z + \mathfrak{c} z^2 + \frac{\varrho g - 2(\lambda+\nu)\beta - 2(\lambda+2\nu)\mathfrak{c}}{4\nu} r^2 + \frac{8\nu\gamma z^3}{3(\lambda+\nu)}$$
$$- \frac{4(\lambda+2\nu)}{\lambda+\nu}\gamma z r^2 + \frac{2\nu\delta z^4}{3(\lambda+\nu)} - \frac{2(\lambda+2\nu)\delta z^2 r^2}{\lambda+\nu} + \frac{(2\lambda+3\nu)\delta r^4}{4(\lambda+\nu)},$$

Sollen auf die Endflächen nur normale Kräfte wirken, so werden die Constanten durch die Bedingungen (4) beschränkt, und es muss für $z = 0$ und $z = l$

$$\beta + \delta r^2 + \frac{\varrho g - 2(\lambda+\nu)\beta - 2(\lambda+2\nu)\mathfrak{c}}{2\nu} - \frac{8\gamma(\lambda+2\nu)z}{\lambda+\nu}$$
$$- \frac{4(\lambda+2\nu)}{\lambda+\nu}\delta z^2 + \frac{2\lambda+3\nu}{\lambda+\nu}\delta r^2 = 0$$

sein. Setzt man den Factor von r^2 gleich Null, so folgt $\delta = 0$, und $z = 0$ giebt $\varrho g = 2\lambda\beta + 2(\lambda+2\nu)\,\mathfrak{c}$, und $z = l$ giebt $\gamma = 0$, und (6) und (7) reduciren sich auf

(6ª) $s = \alpha + \beta z$, (7ª) $w = \mathfrak{b} z + \dfrac{\varrho g - 2\lambda\beta}{2(\lambda+2\nu)} z^2 - \tfrac{1}{2}\beta r^2$,

worin $\mathfrak{a}$ fortgelassen ist, damit der Coordinatenanfang keine Verschiebung erleide. Der Bedingung (5ª) genügt dieser Ausdruck von selbst. Die normalen Kräfte, welche an der unteren Endfläche anzubringen wären, damit Gleichgewicht hergestellt werde, sind:

$$-2\lambda\alpha - (\lambda+2\nu)\mathfrak{b},$$

und an der oberen:

$$2\lambda\alpha + (\lambda+2\nu)\mathfrak{b} + \varrho g l .$$

An der Mantelfläche aber müssten die Kräfte angebracht werden:

$$\Pi = 2(\lambda+2\nu)(\alpha+\beta z) + \lambda\left(\mathfrak{b} + \frac{\varrho g - 2\lambda\beta}{\lambda+2\nu} z\right).$$

Die letzteren können zum Verschwinden gebracht werden, wenn

$$\mathfrak{b} = -\frac{2(\lambda + 2\nu)\alpha}{\lambda}, \quad \beta = \frac{-\varrho g l}{8\nu(\lambda + \nu)}$$

gemacht wird. Es ist alsdann

$$s = \alpha - \frac{\varrho g \lambda z}{8\nu(\lambda + \nu)},$$

$$w = -\frac{2\alpha(\lambda + 2\nu)z}{\lambda} + \frac{\varrho g(\lambda + 2\nu)z^2}{8\nu(\lambda + \nu)} + \frac{\lambda \varrho g r^2}{16\nu(\lambda + \nu)},$$

worin nur noch α willkürlich ist. Sollen auf die obere Endfläche keine Kräfte wirken, so muss noch

$$\alpha = \lambda \varrho g l : 8\nu(\lambda + \nu)$$

sein, und es wirkt unter dieser Voraussetzung auf die untere Endfläche die Kraft

$$\frac{8\nu(\lambda + \nu)\alpha}{\lambda} = \varrho g l,$$

d. h. nur die Schwere der über einem Element stehenden Faser des Cylinders. — Soll also der Mantel des Cylinders blos durch die Schwere desselben in einen Kegelmantel übergeführt werden, so muss derselbe in ein Rotationsparaboloid, dessen Gleichung

$$z = \varrho g \lambda r^2 : 16\nu(\lambda + \nu)$$

ist, und welches daher nur schwach gekrümmt ist, gestellt werden, sodass die Mitte der Cylindergrundfläche in den Scheitel des Paraboloids fällt. Alle Ebenen des Cylinders, welche ursprünglich horizontal waren, werden in Paraboloide verwandelt, welche den obigen parallel sind. Für s und w ergiebt sich

$$s = \frac{\lambda g \varrho(l - z)}{8\nu(\lambda + \nu)}, \quad w = \frac{\varrho g(\lambda + 2\nu)z(z - 2l)}{8\nu(\lambda + \nu)} + \frac{\varrho g \lambda r^2}{16\nu(\lambda + \nu)}.$$

In der oberen Endfläche ist demnach die radiale Ausdehnung Null, der Radius der unteren Endfläche ist

$$k + sk = k + \frac{k\varrho g l}{8\nu(\lambda + \nu)}.$$

Ist der Radius des Cylinders klein, so kann das Paraboloid in dem kleinen in Betracht kommenden Theile als eben angesehen werden, und die obigen Formeln stellen den Zustand annähernd auch dann dar, wenn der Cylinder auf eine feste Ebene gestellt wird.

Art. VI. **Eine neue Schaar transcendenter particulärer Integrale.**

Zu neuen particulären Integralen der Differentialgleichung (3.) gelangen wir, wenn wir, $s = z\bar{t}e^{\pm\varepsilon z}$ setzen, wodurch jene Gleichung nach Unterdrückung des Faktors $e^{\pm\varepsilon z}$ die Form gewinnt:

$$z\left(\frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial \lg r^2} + 2\frac{\partial \bar{t}}{\partial \lg r}\right) + 2r^2\bar{t}(\varepsilon^2 z \pm 2\varepsilon) + r^2 t(\varepsilon^4 z \pm 4\varepsilon^3) =$$

$$z\left(\frac{\partial^2(\bar{t}+\varepsilon^2 t)}{\partial \lg r^2} + 2\frac{\partial(\bar{t}+\varepsilon^2 t)}{\partial \lg r}\right) + \varepsilon^2 r^2(\bar{t}+\varepsilon^2 t) \pm 4\varepsilon r^2(\bar{t}+\varepsilon^2 t) = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn $\bar{t} + \varepsilon^2 t = 0$ wird, oder wenn

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \lg r^2} + 2\frac{\partial t}{\partial \lg r} + \varepsilon^2 r^2 t = 0$$

wird, welche Differentialgleichung das im Punkte Null nicht singuläre Integral besitzt

$$h_1(\varepsilon r) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \varepsilon^{2m} r^{2m}}{2^{2m}\, fac\, m\, fac\, m+1}.$$

Die Bezeichnung $h_\delta(x)$ für $f_\delta(ix)$, welche Function im Art. I definirt ist, soll hier in Anwendung gebracht werden, damit nicht anscheinend imaginäre Formen auftreten, wo Alles reell ist. Mit den Bessel'schen Functionen, wie dieselben meist bezeichnet werden, hängt h durch die Gleichung zusammen

$$2^\delta J_\delta(x) = x^\delta h_\delta(x).$$

Beachten wir, dass nach den Untersuchungen der früheren Artikel auch die Annahme $s = te^{\pm\varepsilon z}$ die Gleichung (3.) befriedigt, wenn $t = h_1(\varepsilon r)$ ist, so erhalten wir ein particuläres Integral, welches neben dem Parameter ε noch vier willkürliche Constanten enthält, nämlich

$$s = h_1(\varepsilon r)\, S(\varepsilon k, z),$$

$$S(\varepsilon k, z) = Aze^{\varepsilon z} + Bze^{-\varepsilon z} + A'e^{\varepsilon z} + B'e^{-\varepsilon z}.$$

Hieraus folgt

$$\bar{s} = -\varepsilon^2 h_1(\varepsilon z)\, S(\varepsilon k, z),$$

$$\overline{w} = -\frac{\lambda+2\nu}{\lambda+\nu}\bar{s} - \frac{\nu}{\lambda+\nu}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = h_1(\varepsilon r)\left[\varepsilon^2 S(\varepsilon k, z) - \frac{2\nu\varepsilon}{\lambda+\nu}(Ae^{\varepsilon z} - Be^{-\varepsilon z})\right],$$

und durch Integration

$$w = -2h_0(\varepsilon r)\,W(\varepsilon k, z) + \Phi(r) + \Psi(z),$$

$$W(\varepsilon k, z) = \frac{z(Ae^{\varepsilon z} - Be^{-\varepsilon z}) + A'e^{\varepsilon z} - B'e^{-\varepsilon z}}{\varepsilon} - \frac{\lambda + 3\nu}{\lambda + \nu}\,\frac{Ae^{\varepsilon z} + Be^{-\varepsilon z}}{\varepsilon^2}.$$

Die Functionen Φ und Ψ sind noch durch die Gleichung (2) oder (2ᵃ) zu beschränken. Sollen die Gleichungen (1) und (2) durch eine Summe von particulären Integralen befriedigt werden, so müssen, wenn ein Glied der Summe (1) und (2) befriedigt, die übrigen (1) und (2ᵃ) befriedigen, wir wollen deshalb die Functionen Φ und Ψ durch (2ᵃ) näher bestimmen. Setzen wir die für s und w gefundenen Ausdrücke in (2ᵃ) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lg r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0,$$

welche von ε unabhängig ist. Wir brauchen daher, ohne dass wir der Allgemeinheit Eintrag thun, den Functionen Φ und Ψ nur für ein specielles ε, etwa für $\varepsilon = 0$, welcher Fall im vorigen Artikel behandelt wurde, von Null verschiedene Werthe zu geben, im Allgemeinen aber (für andere Werthe von ε) dürfen wir $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ annehmen, so dass wir die neue Lösung von (1) und (2ᵃ) schreiben können

$$s = h_1(\varepsilon r)\,S(\varepsilon k, z), \quad w = -2h_0(\varepsilon r)\,W(\varepsilon k, z).$$

Wir fragen nun, welche Oberflächenbedingungen wir mit einem solchen particulären Integrale erfüllen können. Setzen wir $B = -A$ und $B' = A'$, so ist $w = 0$ und $\frac{\partial s}{\partial z} = 0$ für $z = 0$, die untere Endfläche bleibt eben, und die Spannungen sind normal. Führen wir die auch sonst üblichen Abkürzungen ein

$$2\,\mathfrak{Cos}\,x = e^x + e^{-x}, \quad 2\,\mathfrak{Sin}\,x = e^x - e^{-x},$$

und setzen $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}A'$ für A, A', so gewinnt unsere Lösung die Form

$$(8) \quad s = h_1(\varepsilon r)\,S(\varepsilon k, z), \quad w = -2h_0(\varepsilon r)\,W(\varepsilon k, z),$$

$$S(\varepsilon k, z) = zA\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon z + A'\,\mathfrak{Cos}\,\varepsilon z,$$

$$W(\varepsilon k, z) = \frac{zA\,\mathfrak{Cos}\,\varepsilon z + A'\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon z}{\varepsilon} - \frac{\lambda + 3\nu}{\lambda + \nu}\,\frac{A\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon z}{\varepsilon^2}.$$

Die Derivirten von S und W nach z und Combinationen derselben, welche mehrfach vorkommen, haben folgende Werthe

$$(9) \quad S'(\varepsilon k, z) = A \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon z + \varepsilon z A' \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon z + A'\varepsilon \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon z,$$

$$W'(\varepsilon k, z) = z A \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon z + A' \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon z - \frac{2\nu}{\lambda+\nu} \frac{A \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon z}{\varepsilon},$$

$$\lambda S(\varepsilon k; z) - (\lambda + 2\nu) W'(\varepsilon k, z) =$$
$$-2\nu \left(A z \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon z + A' \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon z - \frac{\lambda+2\nu}{\lambda+\nu} \frac{A \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon z}{\varepsilon}\right),$$

$$(\lambda + 2\nu) S(\varepsilon k, z) - \lambda W'(\varepsilon k, z) =$$
$$2\nu \left(A z \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon z + A' \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon z + \frac{\lambda}{\lambda+\nu} \frac{A \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon z}{\varepsilon}\right).$$

Die Constanten A und A' des particulären Integrales lassen sich weiter so einrichten, dass auch am oberen Ende des Cylinders nur normale Kräfte wirken, dass also dort für jedes r

$$\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \lg r} = 0$$

ist. Hierzu muss

$$S'(\varepsilon k, l) + \varepsilon^2 W(\varepsilon k, l) =$$
$$\varepsilon l A \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon l + \varepsilon A' \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon l - \frac{\nu A}{\lambda + \nu} \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon l = 0$$

sein. Die normalen Kräfte aber, welche zur Herstellung des Gleichgewichts an der obern Endfläche angebracht werden müssen, sind in der Form enthalten

$$\lambda\left(2s + \frac{\partial s}{\partial \lg r}\right) + (\lambda+2\nu)\frac{\partial w}{\partial z} = 2h_0(\varepsilon r)\lambda S(\varepsilon k, l) - (\lambda+2\nu) W'(\varepsilon k, l)$$
$$= -4\nu h_0(\varepsilon r)\left(A l \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon l + A' \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon l - \frac{\lambda+2\nu}{\lambda+\nu} \frac{A \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon l}{\varepsilon}\right),$$

und wenn wir dies gleich $-4\nu J h_0(\varepsilon r)$ setzen, so erhalten wir für A und A' die Werthe

$$(10) \quad A = -\frac{\varepsilon J \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon l}{\varepsilon l + \frac{1}{2}\,\mathfrak{Sin}\, 2\varepsilon l}, \quad A' = J \frac{\varepsilon l \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon l - \frac{\nu}{\lambda+\nu} \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon l}{\varepsilon l + \frac{1}{2}\,\mathfrak{Sin}\, 2\varepsilon l}.$$

Ist also J eine gegebene Grösse, so sind A und A' durch sie bestimmt. Der Druck auf die Unterlage ist

$$(11) \quad -4\nu h_0(\varepsilon r)(A' - \tfrac{1}{2}A) = -4\nu J h_0(\varepsilon r) \frac{\varepsilon l \,\mathfrak{Cos}\, \varepsilon l + \frac{\lambda}{\nu+\lambda} \,\mathfrak{Sin}\, \varepsilon l}{\varepsilon l + \frac{1}{2}\,\mathfrak{Sin}\, 2\varepsilon l}.$$

Dieser Druck ist sehr klein, wenn ε sehr gross und J von mässiger Grösse ist, und er wechselt um so öfter ein Zeichen, je grösser ε ist. Es würde für diesen Fall nicht ausreichen, den Cylinder auf eine feste Unterlage zu stellen, sondern es müssten am un-

teren Ende des Cylinders theils Zug-, theils Druckkräfte zur Erlangung des Gleichgewichts angebracht werden. Um den Gesammtdruck zu erhalten, multipliciren wir (11) mit $r^2 d\lg r d\vartheta$, integriren über die Kreisfläche und erhalten

$$(12) \qquad -4\nu k^2 \pi h_1(\varepsilon k) \frac{\varepsilon l \cos \varepsilon l + \frac{\lambda}{\lambda+\nu} \sin \varepsilon l}{\varepsilon l + \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon l} J.$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn $h_1(\varepsilon k)$ Null wird. Dies findet dann statt, wenn auch an der Mantelfläche nur normale Kräfte wirken sollen. Es muss dann dort

$$\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial w}{\partial \lg r} = 0,$$

und mithin für jedes z

$$h_1(\varepsilon k) \left(S'(\varepsilon k, z) + \varepsilon^2 W(\varepsilon k, z)\right) = 0,$$

und somit endlich

$$h_1(\varepsilon k) = 0$$

sein. Die Gleichung $h(e) = 0$ hat unendlich viele reelle Wurzeln, von denen nur die positiven $e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_n \ldots$ in Betracht kommen. Ist e eine unter ihnen, so sind jetzt unsere particulären Integrale

$$s = h_1\left(\frac{er}{k}\right) S(e, z), \quad w = -2h_0\left(\frac{er}{k}\right) W(e, z),$$

d. h. es ist in den Formeln (8), (9) und (10) $e:k$ für ε zu schreiben. Die Kräfte, die an der Mantelfläche anzubringen sind, damit Gleichgewicht bestehe, sind

$$(13)\, \Pi = (\lambda+2\nu)\left(2s + \frac{\partial s}{\partial z}\right) + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} = 2h_0(e)\left((\lambda+2\nu) S(e,z) - \lambda W'(e,z)\right)$$

$$= 4\nu h_0(e)\left(A z \cos\left(\frac{ez}{k}\right) + A' \sin\left(\frac{ez}{k}\right) + \frac{\lambda k}{e(\lambda+\nu)} \sin\left(\frac{ez}{k}\right)\right).$$

Die Grösse $h_0(e_n)$ ist für ungerade n negativ, für gerade n positiv, und es kann für $h_0(e)$ auch $-\frac{1}{4}e^2 h_2(e)$ geschrieben werden wegen der Relation $h_0(r) - h_1(r) = -\frac{1}{4} r^2 h_2(r)$. Für $z = 0$ ist $\Pi = 0$, für $z = l$ ist

$$\Pi = \frac{4\nu k h_0(e)}{e} A \sin \frac{el}{k}.$$

Der Cylindermantel ändert seine Gestalt nicht, d. h. der Radius bleibt überall ungeändert, weil $s(k) = 0$ ist.

Durch Addition der hier gefundenen Lösungen für alle möglichen Werthe von ε ist man im Stande, den Gleichgewichtszustand zu bestimmen, wenn die normalen Kräfte an der oberen Endfläche eine beliebig gegebene Function von r sind, und für den Fall eines sehr niedrigen Cylinders (einer Scheibe), bei welchem von der Schwere abzusehen sein würde, und der Druck auf die Mantelfläche als constant angesehen werden dürfte, lässt sich durch die in den Artikeln V und VI gefundenen Lösungen der Zustand vollständig darstellen, wenn auf die beiden Endflächen gleiche und entgegengesetzte Kräfte wirken, die nur Functionen von r sind. Ich unterdrücke aber für jetzt meine Resultate, weil es mir nicht gelungen ist, die complicirten Formeln physikalisch einfach zu interpretiren. Hingegen scheint es nicht unwichtig, alle reellen Integrale der Differentialgleichungen, welche wir gefunden haben, zusammenzustellen, ohne Rücksicht auf Nebenbedingungen, weil dieselben principiell allgemein genug zu sein scheinen, alle auf den Vollcylinder bezüglichen Aufgaben zu lösen, in denen die Verschiebungen vom Azimuth unabhängig sind. Für den Hohlcylinder müssten auch noch die im Punkte $r = 0$ singulären Lösungen (die Bessel'schen Functionen zweiter Art) herangezogen werden.

Die Differentialgleichungen (1) und (2) des Art. V werden durch folgenden Ausdruck für s befriedigt:

$$\begin{aligned} s = \alpha + \beta z + \gamma r^2 + \delta z r^2 &+ \Sigma A \cos \varepsilon z\, f_0(\varepsilon r) + \Sigma \mathfrak{A} \operatorname{\mathfrak{cos}} \varepsilon z\, h_0(\varepsilon r) \\ &+ \Sigma B \sin \varepsilon z\, f_0(\varepsilon r) + \Sigma \mathfrak{B} \operatorname{\mathfrak{sin}} \varepsilon z\, h_0(\varepsilon r) \\ &+ \Sigma C \cos \varepsilon z\, f_1(\varepsilon r) + \Sigma \mathfrak{C} \operatorname{\mathfrak{cos}} \varepsilon z\, h_1(\varepsilon r) \\ &+ \Sigma D z \cos \varepsilon z\, f_1(\varepsilon r) + \Sigma \mathfrak{D} z \operatorname{\mathfrak{cos}} \varepsilon z\, h_1(\varepsilon r) \\ &+ \Sigma E \sin \varepsilon z\, f_1(\varepsilon r) + \Sigma \mathfrak{E} \operatorname{\mathfrak{sin}} \varepsilon z\, f_1(\varepsilon r) \\ &+ \Sigma G z \sin \varepsilon z\, f_1(\varepsilon r) + \Sigma \mathfrak{G} z \operatorname{\mathfrak{sin}} \varepsilon z\, h_1(\varepsilon r)\,, \end{aligned}$$

aus welchem w sich durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial \lg r} = -(\lambda + 2\nu) r^2 s - \nu r^2 \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

ergiebt, wenn noch die willkürlichen additiven Functionen $\Phi(r)$ und $\Psi(z)$, welche die Integration mit sich bringt, durch die Gleichung (2) des Art. V beschränkt werden. Die Zeichen Σ bedeuten, dass dem Parameter ε beliebige Werthe gegeben, die Constanten A, $\mathfrak{A}$, ... G, $\mathfrak{G}$ für jeden Parameter beliebig gewählt,

und aus diesen Grössen (unabhängig von einander) Summen gebildet werden sollen. Nimmt man die Anzahl der Glieder dieser Summen unendlich gross, sodass entweder unendliche Reihen oder Integrale entstehen, so müssen natürlich die Constanten A, ... 𝔖 so bestimmt werden, dass die Reihen bez. Integrale einen Sinn haben.

SITZUNG AM 28. MAI 1886.

Staude, *Ueber Verallgemeinerungen des Graves'schen Theorems in der analytischen Mechanik.* Vorgelegt von *Neumann.*[1]

§ 1.

Allgemeine Gesichtspunkte zur Weiterführung des Graves'schen Theorems.

Die vorliegende Mittheilung knüpft an die Sätze über die Fadenconstruction der Ellipse aus einer confocalen Ellipse[2] und des Ellipsoides aus zwei confocalen Flächen 2ten Grades[3] an und will darauf hinweisen, dass jene Sätze nur die einfachsten Repräsentanten einer Gruppe von Sätzen sind, die ihrem analytischen Ausdrucke und ihrer geometrisch-mechanischen Deutung nach eng zusammengehören. Die Gesichtspunkte zur Weiterführung der Sätze über die Fadenconstruction lassen sich in wenig Worten bezeichnen.

Dem Theorem von Graves liegt die Vorstellung der Gleichgewichtsfigur eines biegsamen und unausdehnbaren geschlossenen Fadens von überall gleichem Querschnitt und gleicher Dichtigkeit zu Grunde, welcher in der Ebene um eine Ellipse E_0 geschlungen (vgl. Fig. 1) und durch einen Punkt P gespannt, übrigens aber von keinerlei Kräften beeinflusst wird. Auch bei der beabsichtigten Verallgemeinerung des genannten Theorems handelt es sich um

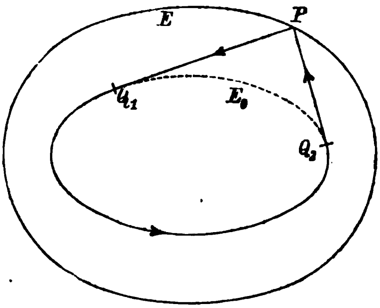


Fig. 1.

---

1) Zum Druck übergeben in der Sitzung vom 28. Mai 1886.

2) Theorem von Graves, vgl. Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Kegelschnitte, 4. Aufl., Art. 266; Hesse, Anal. Geom. des Raumes, Vorl. 21.

3) Vgl. diese Berichte, Jahrg. 1882, S. 5.

die Gleichgewichtsfigur eines geschlossenen Fadens, der um die Ellipse E_0 geschlungen und von einem Punkte P gespannt wird, der aber in näher zu bestimmender Weise der Einwirkung von Kräften ausgesetzt und von ungleichförmiger Dichtigkeit genommen werden soll. Wie nun in dem einfachen Falle des Graves-schen Theorems die Länge der geschlossenen Gleichgewichtsfigur des Fadens erhalten bleibt, wenn man den spannenden Punkt P an verschiedene Stellen einer und derselben zu der Ellipse E_0 confocalen Ellipse E (vgl. Fig. 1) verlegt, so bleiben auch in den allgemeineren Fällen bei derselben Verlegung des Punktes P gewisse metrische Elemente der Fadencurve erhalten.

Um hierauf näher einzugehen, ist es vortheilhaft, die von Möbius[1]) ausgeführten Analogien zwischen der Gleichgewichtsfigur eines Fadens und der Bahn eines bewegten Punktes zu benutzen und die in Rede stehenden Theoreme zunächst auf die Bewegung eines materiellen Punktes zu beziehen.

§ 2.

Deutung des Graves'schen Theorems an der Bewegung eines materiellen Punktes.

So ist schon die in Fig. 1 dargestellte Gleichgewichtsfigur eines geschlossenen Fadens die Bahn der Trägheitsbewegung eines materiellen Punktes, der, zuerst in der Ebene frei beweglich, die Richtung von P gegen Q_1 hin verfolgt, der dann von Q_1 bis Q_2 gezwungen wird, auf der Ellipse E_0 zu bleiben, im Punkte Q_2 aber wieder von diesem Zwange befreit wird und nach seinem Ausgangspunkte P zurückkehrt. Da der Punkt bei der Trägheitsbewegung seine Geschwindigkeit in unveränderter Grösse beibehält, so lässt sich der obige Satz über die Bogenlänge der Curve PQ_1Q_2P auch mit Bezug auf die vorliegende Verbindung der freien und gezwungenen Trägheitsbewegung in folgender Weise aussprechen:

I. *Man nehme zwei confocale Ellipsen E_0 und E und lasse von einer Stelle P der äusseren Ellipse E einen materiellen Punkt*

---

1) Möbius, Lehrbuch der Statik, §§ 300—301, Ges. Werke, Bd. III (Leipzig 1886), S. 435—437.

m in der Richtung einer der beiden geradlinigen Tangenten, die von der Stelle P an die Ellipse E_0 gezogen werden können, mit bestimmter Geschwindigkeit c ausgehen. Sobald der Punkt m, der sich ohne Einwirkung von Kräften bewegen soll, die Ellipse E_0 erreicht, zwinge man ihn in seiner weiteren Bewegung auf dieser Curve zu verbleiben, so lange, bis seine Bewegungsrichtung in die zweite der obigen geradlinigen Tangenten eintritt und er, von dem Zwange befreit, nach seinem Ausgangspunkte zurückkehrt: Die Zeitdauer der geschlossenen Bewegung des Punktes m ist immer die nämliche, wie auch die Ausgangsstelle auf der Ellipse E gewählt wird.

Dieser Satz behält nun mit entsprechenden Modificationen seine Gültigkeit, wenn der materielle Punkt m sowohl während seiner freien Bewegung in der Ebene als auch während seiner gebundenen Bewegung auf der Ellipse E_0 der Wirkung gewisser Kräfte ausgesetzt wird, sodass seine freie Bewegung aufhört, geradlinig zu sein, und die Geschwindigkeit seiner freien und gebundenen Bewegung veränderlich wird. Als einfachstes Beispiel hierfür sei im Folgenden der Fall besprochen, wo die den Punkt m beschleunigende Kraft eine vom Mittelpunkte O der Ellipse E_0 ausgehende Anziehungskraft ist. Sie soll in die Richtung des radius vector des Punktes m fallen und ihrer Stärke nach der Entfernung r des Punktes m von O proportional sein ($= g^2 r$, unter g eine Constante verstanden).

§ 3.

Das Graves'sche Theorem für die Centralbewegung $(g^2 r)$.

Unter Einwirkung der Kraft $(g^2 r)$ beschreibt ein in der Ebene frei beweglicher Punkt m bekanntlich eine Ellipse mit dem Mittelpunkte O, deren Lage und Gestalt durch die Ausgangsstelle, die Anfangsrichtung und Anfangsgeschwindigkeit des Punktes m bestimmt ist. Aber auch mit Bezug auf das System confocaler Kegelschnitte, welchen die Ellipsen E_0 und E der Fig. 1 angehören, lässt sich die Lage und Gestalt jener elliptischen Bahn einfach bezeichnen. Dieselbe berührt nämlich zwei Kegelschnitte des confocalen Systems je in zwei diametral gelegenen Punkten, und zwar entweder zwei Ellipsen des Systems, wenn sie die Brennpunkte desselben einschliesst, oder

eine Ellipse und eine Hyperbel, wenn sie die Brennpunkte ausschliesst. Man beschränke sich der Einfachheit wegen auf die Betrachtung des ersteren Falles und gehe von zwei beliebigen Ellipsen des confocalen Systems, einer inneren E_0 und einer äusseren E_1 aus. Durch jeden Punkt P des ringförmigen Gebietes zwischen den Ellipsen E_0 und E_1 lassen sich dann zwei mit ihnen concentrische Ellipsen legen, welche die Ellipsen E_0 und E_1 je doppelt berühren (vgl. Fig. 2). Bei einer bestimmten, dem Punkte P mit Bezug auf die beiden Ellipsen E_0 und E_1 eigenthümliche Anfangsrichtung und Anfangsgeschwindigkeit wird nun ein von P ausgehender frei beweglicher Punkt m unter Einfluss der Centralkraft $(g^2 r)$ die eine oder andere der beiden Ellipsen beschreiben, die durch P gehen und die Ellipsen E_0 und E_1 berühren. Die beiden berührenden Ellipsen mögen kurz die *elliptischen Tangenten* der Ellipsen E_0 und E_1 durch den Punkt P heissen, und zwar mag durch die Voraus-stellung der Ellipse E_0 angedeutet sein, dass sie von P aus zunächst gegen ihren Berührungspunkt mit E_0 hin verfolgt werden sollen.

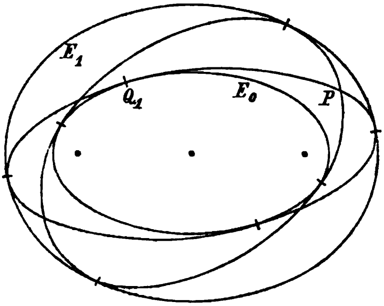


Fig. 2.

Die freie Bewegung des Punktes m unter Einfluss der Centralkraft $(g^2 r)$ verbinde man nun mit der auf die Ellipse E_0 gezwungenen Bewegung unter Einfluss derselben Kraft. Beide *Bewegungen* werden sich an einer Stelle Q_1 (vgl. Fig. 2) »*berühren*«, wenn bei der Berührung ihrer Bahncurven auch ihre Geschwindigkeiten in gleicher Grösse zusammentreffen. Bei einer solchen Berührung ist ein continuirlicher Uebergang der einen Bewegung in die andere denkbar. Mit Bezug auf diese Vorstellung kann nun unmittelbar der folgende Satz mitgetheilt werden, der sich neben den Satz § 2, I. stellt:

II. *Man nehme drei confocale Ellipsen E_0, E, E_1 und lasse von einer Stelle P der mittleren Ellipse E einen materiellen Punkt m in der Richtung einer der beiden elliptischen Tangenten, die von der Stelle P an die Ellipsen E_0 und E_1 gezogen werden können, mit*

der der Stelle P in Bezug auf die letzteren entsprechenden Geschwindigkeit ausgehen. Sobald der Punkt m, der sich fortwährend unter Einwirkung der Centralkraft $(g^2 r)$ *bewegen soll, die Ellipse* E_0 *erreicht, zwinge man ihn in seiner weiteren Bewegung, auf dieser Curve zu verbleiben, so lange, bis seine Bewegungsrichtung in die zweite der obigen elliptischen Tangenten eintritt und er, von dem Zwange befreit, nach seinem Ausgangspunkte zurückkehrt: Die Zeitdauer der geschlossenen Bewegung des Punktes m ist immer die nämliche, wie auch die Ausgangsstelle auf der Ellipse E gewählt wird.*

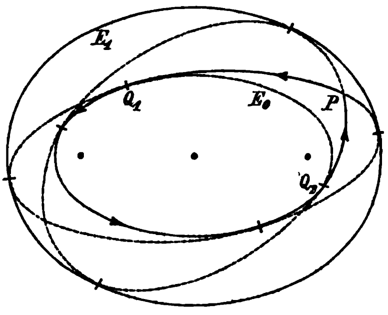


Fig. 3.

In Fig. 3 ist die geschlossene Bahn des Punktes m und die Ellipse E_1 ausgezogen, während die drei Ellipsen, denen die Bahnstücke des Punktes angehören, in ihren unbenutzten Theilen punktirt, die Ellipse E aber nicht besonders bezeichnet ist.

Die Ellipse E kann man im Besonderen mit der Ellipse E_1 zusammenfallen lassen, wodurch die Ecke, welche die geschlossene Bahncurve im Allgemeinen an der Stelle P aufweist, in Wegfall kommt.

Nimmt die Centralkraft $(g^2 r)$ mit der Constanten g^2 unbegrenzt ab, so dehnt die Ellipse E_1 des confocalen Systems sich unbegrenzt aus und gehen die elliptischen Bahncurven der Centralbewegung in Paare von Paralleltangenten der Ellipse E_0 über; der vorstehende Satz II kommt dann auf den Satz § 2, 1 zurück.

§ 4.

Die entsprechende Gleichgewichtsfigur eines geschlossenen Fadens.

Im Allgemeinen ist nach dem Satze § 3, II die Zeitdauer der Bewegung längs der geschlossenen Curve PQ_1Q_2P dasjenige metrische Element, welches von der Lage des Punktes P auf der Ellipse E unabhängig ist. Wegen der constanten Geschwindigkeit

der Trägheitsbewegung kann dafür in dem speciellen Satze § 3, I die Bogenlänge der Curve eintreten. Dem entsprechend kommt bei der Deutung der geschlossenen Bahncurve des Satzes § 3, II als Gleichgewichtsfigur eines geschlossenen Fadens nicht die Länge des Fadens, sondern die Gesammtmasse desselben als das von der Verlegung des Punktes P auf der Ellipse E unabhängige Element in Betracht. Der betreffende Satz sei hier nur kurz angegeben:

III. *Die geschlossene Bahncurve des Punktes m in Satz II ist die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen und unausdehnbaren Fadens, der um die Ellipse E_0 geschlungen und vom Punkte P gespannt wird und dessen einzelne Massentheile der beschleunigenden Centralkraft* $(-g^2 r)$ [1] *ausgesetzt sind, vorausgesetzt dass man bei constantem Querschnitt des Fadens die Dichtigkeit desselben an jeder Stelle der Fadencurve gleich dem reciproken Werthe der Geschwindigkeit des Punktes m an derselben Stelle der Bahncurve und die Spannung im Punkte P gleich der Anfangs- (und der damit gleichen End-) Geschwindigkeit des Punktes m nimmt (es ist dann die Spannung an jeder Stelle gleich der Geschwindigkeit des Punktes m an derselben Stelle): Bei dieser Anordnung sind die Gesammtmassen der geschlossenen Fäden, die verschiedenen Lagen des Punktes P auf der Ellipse E entsprechen, untereinander gleich.*

Beim Uebergang von diesem Satze zum Graves'schen Theorem kann wegen der constanten Dichtigkeit des Fadens statt der Gesammtmasse wieder die Länge des Fadens als bleibendes Element bei der Verlegung des Punktes P auf der Ellipse E betrachtet werden.

§ 5.

Analoger Satz für den Raum.

Neben die Fadenconstruction der Ellipse aus einer confocalen Ellipse (vgl. § 1) stellt sich die Fadenconstruction des Ellipsoides aus zwei confocalen Flächen 2. Grades. Wie dort die Fadenfigur sich aus geradlinigen und elliptischen Stücken zusammensetzt (vgl. Fig. 1), besteht hier die entsprechende Fadenfigur aus drei Arten von Linien, geraden Linien im Raume, geodätischen Linien und Krümmungscurven auf dem Ellipsoid.

---

1) Unter r ist, wie früher, der Abstand des Massentheils von dem Mittelpunkte O der Ellipse E_0 verstanden.

Betrachtet man nun dieselbe Centralbewegung $(g^2 r)$ eines materiellen Punktes m, wie sie im § 3 für die Ebene vorliegt, im Raume mit Bezug auf ein System confocaler Flächen 2. Grades, so erhält man einen dem Satze § 3, II analogen Satz. Derselbe bezieht sich, wie jener, auf den Isochronismus gewisser geschlossener Bahncurven, die sich ihrer geometrischen Natur nach, wie dort aus *zwei*, hier aus *drei* Arten von Curven zusammensetzen. Die Curven der 1. Art entsprechen der freien Centralbewegung $(g^2 r)$ im Raume; es sind mit den Flächen des confocalen Systems concentrische Ellipsen, welche je drei Flächen des confocalen Systems, etwa zwei Ellipsoide E_0, E_1 und ein einschaliges Hyperboloid H_0, je doppelt berühren. Die Curven der 2. Art entsprechen der auf das Ellipsoid E_0 gezwungenen Centralbewegung; es sind transcendente von jenen Ellipsen umhüllte Curven auf dem Ellipsoid, welche ganz analog den geodätischen Linien durch *hyperelliptische Functionen* 1. *Ordnung* dargestellt werden können. Die Curven der 3. Art entsprechen der auf die Durchdringungscurve des Ellipsoides E_0 und einschaligen Hyperboloides H_0 beschränkten Centralbewegung $(g^2 r)$; sie sind mit dieser Durchdringungscurve identisch und werden von den vorher erwähnten transcendenten Curven umhüllt.

Der hiermit angedeutete Satz kann wieder ähnlich wie § 4, III an der Gleichgewichtsfigur eines geschlossenen Fadens gedeutet werden.

§ 6.

Weitere Verallgemeinerung der vorstehenden Sätze.

Der Beweis der vorstehenden Sätze gründet sich auf die Form[1]) der 2. Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung, welche sich nach Jacobi aus der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung in elliptischen Coordinaten herleiten lassen, wenn der analytische Ausdruck der beschleunigenden Kräfte einen bestimmten Typus aufweist[2]). Man erhält

1) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, hrsg. von Clebsch, SS. 214, 233, 234.

2) Ebend. S. 219. Vgl. auch C. Neumann, De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticarum classem revocatur, Regiomonti, 1856. D'Arcais, Del moto sopra un ellissoide di un punto sollecitato da forze che hanno una certa funzione potenziale, Ann. della Scuola norm. di Pisa, 1869.

damit gleichzeitig einen Ueberblick über die Gruppe analoger Sätze, bei denen die oben benutzte Centralkraft ($g^2 r$) durch andere Kräfte von weniger einfachem Charakter ersetzt ist.

Unter den bezüglichen Sätzen darf besonders eine Gruppe deshalb einiges Interesse beanspruchen, weil die dabei auftretenden freien Bewegungen des materiellen Punktes m auf den vollständigen (Jacobi-Rosenhain'schen) Ansatz der Umkehrprobleme für die 1., 2. und 3. Gattung der elliptischen Integrale und der hyperelliptischen Integrale 1. und 2. Ordnung führen, wenn es sich darum handelt, die Coordinaten des Punktes als Functionen der Zeit zu bestimmen. Die ausführlichere Darstellung dieser Resultate spare ich einer anderen Gelegenheit auf.

ker
ch

pe
n-
l-
r-
le
n.
ls
g

INHALT.

	Seite
C. Neumann, Ausdehnung der Keppler'schen Gesetze auf den Fall, dass die Bewegung auf einer Kugelfläche stattfindet	1
E. Study, Ueber die Raumcurven vierter Ordnung, zweiter Art. Vorgelegt von F. Klein	3
A. Hurwitz, Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip. Vorgelegt von F. Klein	10
Martin Krause, Zur Transformation der elliptischen Functionen. Vorgelegt von F. Klein	39
E. Drechsel, Ueber einen neuen, schwefel- und phosphorhaltigen Bestandtheil der Leber	44
Walther Dyck, Beiträge zur Analysis situs. II. Mittheilung. Vorgelegt von F. Klein	53
C. Neumann, Ueber eine einfache Methode zur Begründung des Princips der virtuellen Verrückungen	70
C. Neumann, Ueber gewisse particulare Integrale der Differentialgleichung $\Delta F = F$, insbesondere über die Entwickelung dieser particularen Integrale nach Kugelfunctionen	75
Friedrich Engel, Zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen. Vorgelegt von A. Mayer	83
W. von Tchisch (St. Petersburg), Untersuchungen zur Anatomie der Grosshirnganglien des Menschen. Mitgetheilt von Paul Flechsig	95
Ludwig Scheeffer, Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln. Aus seinen hinterlassenen Papieren mitgetheilt von A. Mayer. (Mit 2 Holzschn.)	102
Axel Harnack, Existenzbeweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume	144
E. Drechsel, Ueber die Elektrolyse der normalen Capronsäure mit Wechselströmen	170
J. Thomae, Weitere Untersuchungen über den elastischen Kreiscylinder	186
Staude, Ueber Verallgemeinerungen des Graves'schen Theorems in der analytischen Mechanik. Vorgelegt von C. Neumann. (Mit 3 Holzschnitten.)	199

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

HARVARD COLLEGE
NOV 18 1886
LIBRARY.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1886.

III. IV.

MIT 9 TAFELN UND 2 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1886.

SITZUNG AM 5. JULI 1886.

Dr. Erwin Voit, *Die Schlagzahl des Herzens in ihrer Abhängigkeit von der Reizung des Nervus accelerans.* (Aus dem physiologischen Institut zu Leipzig.) Mit 7 Tafeln.

Einleitung.

Wir kennen eine Menge von Thatsachen über den Zusammenhang zwischen der Reizung und der entsprechenden Wirkung. Diese Vorgänge sind aber zumeist nur in qualitativer und höchst selten auch in quantitativer Beziehung näher untersucht worden, obgleich nur dann das Gesetz, nach welchem ein Vorgang verläuft, aufgestellt werden kann, wenn die Abhängigkeit zwischen Reiz und Wirkung in quantitativer Beziehung bekannt ist.

Dass sich bis jetzt so Wenige mit dieser Frage über den quantitativen Zusammenhang zwischen dem Reiz und dessen Wirkung beschäftigt haben, liegt wohl an dem Mangel von geeigneten Apparaten in dieser Richtung.

Die Wirkung einer Reizung hängt, ausser von der Natur des nervösen Apparates selbst, ab:

1) von der Stärke des Reizes,

2) von der Anzahl der Reize,

3) von dem Reizintervalle, d. h. der Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Reizen verstreicht.

Um die Stärke des Reizes in willkürlicher Weise zu variiren, giebt es verschiedene Vorrichtungen. Dagegen waren wir bis vor Kurzem ausser Stande, die Zahl der Reize und das Reizintervall nach Belieben wechseln zu können. Erst in neuerer Zeit hat Professor Ludwig einen geeigneten Apparat dafür angegeben.

Während meines Aufenthaltes am Leipziger physiologischen Institute in den Wintersemestern 1879 und 1880/81 hat mich Professor Ludwig veranlasst, vermittelst dieses Apparates speciell am Nervus accelerans cordis die Abhängigkeit der Wir-

kung von der Reizung zu ermitteln. Ich hoffe mit Hilfe der gewonnenen Resultate über die Beziehung zwischen Reiz und Wirkung überhaupt Einiges mittheilen zu können. Es sei mir gestattet, Herrn Professor Ludwig für die liebenswürdige Unterstützung bei der Ausführung meiner Arbeit sowie für das Entgegenkommen während meines Aufenthalts im Leipziger Institut meinen wärmsten Dank zu sagen.

Wenn ich erst jetzt dazu komme, meine Resultate zu veröffentlichen, so liegt dieses theilweise in der Arbeit selbst, theils auch an der ganz heterogenen Natur meiner späteren Untersuchungen, die mich von der Ausarbeitung meines Themas immer wieder abhielten.

Ehe ich jedoch auf meine Versuche speciell eingehe, möchte ich noch im Allgemeinen den Zusammenhang zwischen Reiz und Wirkung besprechen, wie er sich auf Grund von Summationsvorgängen am leichtesten erklären lässt.

I. Ueber Summationsvorgänge im Allgemeinen.

Jeder Reiz, welcher einen nervösen Apparat trifft, muss in diesem eine chemische Veränderung hervorrufen. Da aber dieselbe nicht momentan entstehen und plötzlich wieder verschwinden kann, sondern eine bestimmte Zeit zu ihrer vollständigen Ausbildung und zu ihrem Zurückgehen bedarf, so können wir diese Zustandsänderung uns in Form einer Curve dargestellt denken, deren Abscisse die Zeit, deren Ordinate den Grad der Veränderung bezeichnet. Hand in Hand mit dem Verlauf dieser chemischen Aenderung der Substanz muss der sichtbare Erfolg der Reizung gehen. Und können wir letzteren wahrheitsgetreu aufschreiben lassen, so werden wir dadurch ebenfalls eine Curve bekommen, die wenigstens in den meisten Fällen eine der chemischen Aenderung analoge Gestalt haben wird.

Eine solche Curve, welche den Erfolg eines Reizes darstellt, werde ich in Folge als Curve des Einzelreizes oder kurzweg als Einzelcurve bezeichnen.

Selbstverständlich wird die Einzelcurve abhängen von der Natur des nervösen Apparates, dem Zustande, in dem sich derselbe gerade befindet, und der Stärke des Reizes. Wenn nun mehrere Reize nach einander den nervösen Apparat treffen, so

wird sehr wahrscheinlich wegen des veränderten Zustandes in Folge des vorhergehenden Reizes der zweite Reiz eine andere Einzelcurve bedingen. Dieselbe wird aber, da ja keine Zustandsänderung momentan, sondern nur allmälig in gesetzmässiger Weise vor sich geht, eine der ersteren ähnliche Form besitzen.

Ich nehme daher zuerst den einfachsten Fall an, dass bei ein und demselben nervösen Apparate durch auf einander folgende Reize von gleich bleibender Stärke die gleichen Einzelcurven hervorgerufen werden.

Es seien $r_1\ r_2 \ldots\ldots r_n \ldots r_x$ die Reize, welche in gleichem Intervalle i einander folgen, und:

$a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n$ die Ordinaten der Einzelcurve in Intervallen von i errichtet, d. h. für die Abscissen $i_1\ i_2 \ldots\ldots i_n$.

Wenn also in i_1 ein Reiz den nervösen Apparat trifft, erhalten wir die Einzelcurve:

$$a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_n\,.$$

Kommt in i_2 ein zweiter Reiz hinzu, welcher den gleichen Erfolg, d. h. die gleiche Einzelcurve hervorruft, so entsteht folgende Summationscurve:

$$\begin{array}{l} a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots\ldots a_n \\ \quad\ a_1\ a_2 \ldots\ldots\ldots a_{n-1}\ a_n\,. \end{array}$$

Und lassen wir auf den nervösen Apparat n Reize in gleichen Zwischenräumen $= i$ einwirken, wovon jedem die nämliche Einzelcurve zukommt, so ist die Summationscurve, ausgedrückt durch ihre Ordinaten:

$$\begin{array}{llllllll}
a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots\ldots & a_n & & & & & & \\
\quad a_1\ a_2 \ldots\ldots\ldots & a_{n-1} & a_n & & & & & \\
\quad\quad a_1 \ldots\ldots\ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & & & & \\
\vdots\quad\vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 & a_3 & a_4 & a_5 \ldots\ldots & a_n & & & \\
 & a_2 & a_3 & a_4 \ldots\ldots & a_{n-1} & a_n & & \\
 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n\,. &
\end{array}$$

Die senkrechten Reihen bezeichnen die Ordinaten der Summationscurve für die Abscissen $i_1\ i_2\ i_3 \ldots\ldots i_n$, und sind zusammengesetzt aus den entsprechenden Ordinaten der Einzelcurven.

Ich habe mit Absicht die Summationscurve in dieser Weise

dargestellt, um zu gleicher Zeit ein Bild über das Zustandekommen der Summation selbst zu geben.

Besteht die Reizung aus $n + x$ Reizen wieder im nämlichen Intervalle i, und bei den gleichen Voraussetzungen wie oben, dann ergiebt sich als Summationscurve:

$i_1 \qquad i_n \qquad\qquad\qquad i_x$

$a_1\ a_2\ a_3 \dots a_n$

$a_1\ a_2 \dots a_{n-1}\ a_n$

$a_1 \dots a_{n-2}\ a_{n-1}\ a_n$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \dots$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$a_3\ \ a_4\ \ a_5 \dots a_n$

$a_2\ \ a_3\ \ a_4 \dots a_{n-1}\ a_n$

$a_1\ \ a_2\ \ a_3 \dots a_{n-2}\ a_{n-1}\ a_n$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\ a_2\ a_3\ a_4 \dots a_n$

$a_1\ a_2\ a_3 \dots a_{n-1}\ a_n\ .$

Drücken wir also die Einzelcurven in Ordinaten aus, die in Zwischenräumen des Reizintervalles errichtet sind, so können wir aus den Einzelcurven leicht die Summationscurve erhalten, indem wir sie oder vielmehr ihre Ordinaten in der Weise addiren, wie die den Einzelcurven entsprechenden Reize der Zeit nach auf einander folgen. Eine solche Summationscurve muss den Erfolg der ganzen Reizung darstellen.

Aus dieser Summationsanschauung lassen sich sofort folgende Schlussfolgerungen ziehen:

1) Die Summationscurve ist abhängig von der Zahl der Reize. Sie muss mit letzterer ansteigen solange, bis ein neuer Reiz mit dem Ende der ersten Einzelcurve zusammenfällt. Jede weitere Vermehrung der Reizanzahl erhöht die Curve nicht mehr. Sie bleibt immer gleich der Summe der zu den Abscissen $i_1\ i_2\ i_3 \dots i_n$ gehörigen Ordinaten der Einzelcurve. Diese Höhe mag deshalb Maximalhöhe der Summationscurve heissen. Die Form der Curve ist in ihrem aufsteigenden Theile eine andere, wie in dem absteigenden, ausser wenn Anstieg und Abfall der Einzelcurve selbst gleich sind, und ihre Länge muss mit jedem Reize um das betreffende Reizintervall i sich vergrössern.

2) Die Summationscurve ist abhängig von der Grösse des Intervalles, in welchem die Reize auf einander folgen. Sie steigt um so rascher und höher an, je kleiner das Intervall ist, fällt aber auch wieder um so rascher.

Die Maximalhöhe der Curve hängt also direct von dem Intervalle ab. Dagegen ist der Punkt, an welchem die Curve diese Maximalhöhe erreicht, allein abhängig von der Länge der Einzelcurve.

3) Die Gestalt der Summationscurve ändert sich mit der Form der Einzelcurve.

Wenn die Summationscurve ihre Maximalhöhe erreicht hat, giebt uns die Geschwindigkeit ihres Anstiegs und Abfalls ein getreues Bild der Einzelcurve. Beide sind identisch, und zwar dann, wenn man den Anfang des Anstiegs und Abfalls, und das Ende beider zusammenlegt. Je schneller also eine Summationscurve ansteigt, desto schneller muss sie anfangs fallen, und je langsamer sie in ihre Maximalhöhe übergeht, desto langsamer nähert sich die Curve wieder der Abscisse.

4) Der Totaleffect der Reizung ist unabhängig vom Intervall, direct proportional der Zahl der Reize bei gegebener Einzelcurve.

Diese Sätze müssen zutreffen, wenn wirklich jeder folgende Reiz unabhängig vom vorhergehenden die nämliche Einzelcurve hervorruft. Vollständig wird das nicht zutreffen, da ja jeder wirksame Reiz eine Veränderung im chemischen Zustande des nervösen Apparates nothwendig mit sich bringt, weshalb dem nachfolgenden Reize auch nicht die gleiche Wirkung zukommen kann. Die Betrachtung der Summationscurven von Seite der Einzelcurven aus wird aber doch ihr Gutes haben, indem wir dadurch die Einzelcurven der verschiedenen nervösen Apparate und deren gesetzmässige Aenderung durch auf einander folgende Reize kennen lernen. Es wird sich daraus, glaube ich, ein Schluss machen lassen auf die Natur der Vorgänge, und wird sich unterscheiden lassen, welche von ihnen einander näher stehen und welche von einander zu trennen sind.

Es bleibt mir nur noch übrig zu zeigen, wie aus einer durch das Experiment gewonnenen Summationscurve die Einzelcurve gefunden werden kann.

Liegen sämmtliche Summationscurven vom ersten bis zum x^{ten} Reize, oder vielmehr deren in dem Reizintervalle er-

richteten Ordinaten vor, so lässt sich daraus durch einfache Subtraction der Summationscurven von r und $(r + 1)$ Reizen die dem $(r + 1)^{\text{ten}}$ Reize zugehörige Einzelcurve gewinnen.

Stellen z. B.

$$a_1' \; a_2' \; a_3' \; \ldots . \; a_n'$$

die in gleichen Zwischenräumen errichteten Ordinaten der Einzelcurve eines Reizes dar, und

$$b_1 \; b_2 \; b_3 \; \ldots . \; b_n \; b_{n+1}$$

die Ordinaten der Summationscurve aus zwei in demselben Zwischenraume sich folgenden Reizen, so lassen sich daraus die Ordinaten der dem zweiten Reize zugehörigen Einzelcurve direct darstellen:

$$(b_1 - a_1') \; (b_2 - a_2') \; \ldots .. \; (b_n - a_n') \; b_{n+1} \, ,$$

wobei das erste Glied $(b_1 - a_1') = 0$ ist, da der zweite Reiz erst im Punkte i_2 der Abscisse, welcher der Ordinate b_2 entspricht, den nervösen Apparat in Erregung versetzt.

Bezeichnen wir $(b_2 - a_2')$ mit $a_2'' \ldots$, b_{n+1} mit a_n'', so erhalten wir als Ausdruck der Einzelcurve des zweiten Reizes die Ordinaten:

$$a_1'' \; a_2'' \; a_3'' \; \ldots .. \; a_n''.$$

In den meisten Fällen wird es nicht möglich sein, die Summationscurven für jede Anzahl der Reize, d. h. für 1, 2 oder r Reize zu bestimmen, sondern nur für eine gewisse Summe derselben, z. B. von s zu s_r. In letzteren Falle ist es nicht möglich, die jedem Reize zukommende Einzelcurve zu ermitteln. Aber doch lässt sich aus dem jeweiligen Zuwachse eine mittlere Curve construiren, unter der Annahme, dass für die ihm angehörige Anzahl von Reizen die Einzelcurven identisch seien.

Es liege eine Summationscurve aus fünf im Intervall i sich folgenden Reizen vor, von denen jeder die gleiche Einzelcurve giebt, deren Ordinaten:

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5 \; a_6 \; a_7 \; a_8$$

den Abscissen $i_1 \; i_2 \; i_3 \; \ldots . \; i_8$ entsprechen.

Lösen wir die Summationscurve:

$$b_1 \; b_2 \; b_3 \; b_4 \; b_5 \; \ldots .. \; b_8$$

in die einzelnen Ordinaten im Intervalle von i auf, so erhalten wir:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & & & & \\
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & & & \\
 & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & & \\
 & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & \\
 & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \ldots
\end{array}$$

Wie leicht ersichtlich, lassen sich die ersten Ordinaten der Einzelcurve leicht dadurch gewinnen, dass man die eine Summationsordinate immer von der folgenden abzieht. Wir erhalten auf diese Weise:

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5 \, .$$

Von der dem letzten Reize folgenden Ordinate an erhalten wir durch Subtraction der Summationsordinaten $b_6 - b_5$ nicht mehr die Ordinate der Einzelcurve a_6, sondern $(a_6 - a_1)$. Um die Ordinate a_6 zu bekommen, müssen wir also b_6 um b_1 vermehren, ebenso b_7 um b_2 und von der so vergrösserten Ordinate die vorhergehende ebenfalls schon corrigirte abziehen.

Vermehren wir demnach die dem letzten Reize r_5 folgenden Summationsordinaten b_6 b_7 um je eine Ordinate von Anfang der Summationscurve an gezählt, so geht die Summationscurve in folgende Reihe über:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & & & & \\
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & & & \\
 & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & & \\
 & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & \\
 & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
\cline{5-12}
 & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\
 & & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
 & & & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\
 & & & & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
 & & & & & & & & & a_1 & a_2 & a_3 \\
 & & & & & & & & & & a_1 & a_2 \\
 & & & & & & & & & & & a_1 \, .
\end{array}$$

Aus dieser Reihe lässt sich nun durch Subtraction der einen Ordinate von der ihr folgenden die Ordinate der Einzelcurve:

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5 \; a_6 \; a_7 \; a_8$$

erhalten.

Vermehrt man also die dem Schluss der Reizung nachfolgenden Ordinaten der Summationscurve in obiger Weise um je

eine vorhergehende von Anfang der Summationscurve an gezählt, so lässt sich aus der neu erhaltenen Reihe die Einzelcurve durch ihre Ordinaten darstellen, indem man jede Ordinate dieser Reihe von der ihr nachfolgenden abzieht.

Ich habe, wie erwähnt, experimentell den Zusammenhang zwischen Reiz und Wirkung an dem Einflusse verfolgt, den die Reizung des Nervus accelerans cordis auf die Pulsmenge ausübt, die erhaltene Wirkung als Summationsvorgang aufgefasst, und in eben erwähnter Weise der Analyse unterworfen.

Der Nervus accelerans ist insofern dafür ein ungünstiges Object, als die Vermehrung der Pulszahl durch seine Reizung das Resultat sehr complicirter Vorgänge ist. Er entschädigt aber dadurch, dass die Wirkung, welche er ausübt, ziemlich bedeutend ist, und längere Zeit anhält.

II. Versuchsanordnung.

Um die Reizwirkung rein zu erhalten, war es nöthig, alle Factoren, welche auf die Schlagzahl des Herzens von Einfluss sind wenn auch nicht auszuschliessen, so doch unter gleiche Bedingungen zu setzen. Es wurde deshalb das Thier mit Curare vergiftet, und durch kleine Nachinjectionen Körperbewegungen ausgeschlossen, daneben durch künstliche Ventilation eine vollständig gleichmässige Lüftung der Lunge herbeigeführt. Das Curare erwies sich auf die Reizwirkung der Accelerantes nicht ganz ohne Einfluss. Doch ist derselbe nur unbedeutend und rasch vorübergehend, wenn nur immer kleine Mengen injicirt werden. Ein weiteres Erforderniss ist, die Eigentemperatur des Thieres möglichst gleich zu halten. Dasselbe wurde deshalb mit Decken eingehüllt, und so die Innentemperatur nach einem im After steckenden Thermometer regulirt. Desgleichen wurden die Nervi vagi beiderseits durchschnitten.

Die Versuche sind sämmtlich an Hunden ausgeführt.

1. Präparation des Nervus accelerans.

Unter dem Namen N. accelerans fasst man die Nervenäste zusammen, welche vom Ganglion stellatum zum Ganglion cervic. inf. gehen. Es sind gewöhnlich zwei Aeste, welche die Arteria subclavia zwischen sich nehmen.

Bei der Präparation, die an dem Thiere nach vorhergegangener Curarevergiftung ausgeführt wurde, sind mit Rücksicht auf den Zweck der Untersuchung Unterbindungen von Blutgefässen möglichst zu vermeiden. Dieselbe ist bequemer auf der rechten Seite des Thieres auszuführen, und zwar an mittelgrossen mageren Hunden.

Nachdem am Halse durch einen ungefähr 7 cm langen Schnitt etwas über der Clavicula beginnend die Haut seitlich von der Mittellinie gespalten ist, trennt man, mit der Pincette weiter arbeitend, das Bindegewebe und die Muskelpartien, bis man die äussere Seite der Vena jugularis interna erreicht. Dabei ist meistentheils eine kleine Anastomose der beiden Jugularvenen zu unterbinden. Vorsichtig längs des äusseren Randes der Vene weiter gehend, trifft man auf die Arteria subclavia; hält man sich nun an deren Lauf, indem man zugleich auch in die Tiefe arbeitet, so wird die Arteria vertebralis sichtbar, hinter deren Ursprung aus der Subclavia das Ganglion stellatum gewöhnlich liegt. Man ist deshalb häufig genöthigt, diese Arterie zu unterbinden und durchzuschneiden. Dann aber ist es stets möglich, die Art. subclavia so frei zu präpariren, dass der eine Ast des N. accelerans deutlich erkennbar wird, und diesem folgend das Ganglion selbst isolirt werden kann.

Während der ganzen Operation ist also höchstens die venöse Anastamose und die Art. vertebralis zu unterbinden. Ein Haupterforderniss bei der Operation ist auch, jede Blutung ängstlich zu vermeiden, und das Operationsfeld möglichst rein zu halten, da sonst das Ganglion nur schwer von dem umgebenden Fettgewebe zu unterscheiden ist. Nachdem so das Ganglion von dem umliegenden Fettgewebe isolirt ist, wird es mit einer Pincette gefasst und die Verbindungsäste mit den Hals- und Brustnerven durchschnitten, was am leichtesten durch eine lange Scheere mit kurzen schmalen Branchen ausgeführt werden kann.

Zur Reizung verwendet man am besten die Ludwig'schen Hartgummi-Electroden, die man nach Einlegung der Nerven durch Zwischenschieben von Guttapercha vollständig von dem umliegenden Gewebe isolirt. Ist dies geschehen, so näht man die Wunde, um die Vertrocknung zu vermeiden, wieder zu, und befestigt daran mit einigen Stichen die Electroden, damit dieselben während des Versuches sich nicht verschieben.

2. Die Aufzeichnung der Pulscurve.

Um die Pulscurve zu erhalten, verband ich die Caraotis mit dem Fick'schen Sphygmographen vermittelst einer mit gesättigter Sodalösung gefüllten Bleiröhre. Derselbe schrieb seine Curve auf ein Ludwig'sches Kymographion mit endlosem Papier. Die Bleiröhre war fest mit dem Apparate verbunden, um bei zufälliger Verschiebung des Thieres jede Aenderung in der Federstellung des Sphygmographen zu vermeiden.

3. Die Reizvorrichtung.

Die Summationen hängen, wie schon früher besprochen wurde, von der Intensität des Reizes, von der Zahl der Reize, und von dem Intervalle zwischen zwei aufeinander folgenden Reizen ab.

Zur Regulirung der Reizstärke benutze ich bei zwei Grove'schen Elementen den Inductionstrom eines Dubois'schen Schlittens mit Ausschluss des Hammers, dessen Scala nach dem Kronecker'schen Verfahren graduirt war.

Zur Variirung der Zahl der Reize und des Intervalles diente mir der von Ludwig angegebene Apparat. Derselbe ist nach dem nämlichen Principe, wie der von Bohr[1]) schon beschriebene gebaut. Dennoch muss ich etwas näher darauf eingehen, da der von Bohr benutzte schon eine vollendetere Form angenommen hatte.

Auch mein Apparat musste zwei Anforderungen genügen, er musste Reize von gleicher Intensität und von gleichem Verlaufe in beliebiger Anzahl liefern und eine Variation des Intervalles zwischen zwei Reizen in verschiedener Weise gestatten.

Diese Forderungen werden durch folgende Vorrichtung erfüllt:

Ein Uhrwerk, welches durch ein fallendes Gewicht in Bewegung erhalten wird, setzt vermittelst eines Schnurlaufes eine Frictionsscheibe in Mitbewegung und damit auch die Axe C, welche die Scheibe a_1 trägt. Auf dem Rande dieser Scheibe

---

1) Christian Bohr, Ueber den Einfluss der tetanisirenden Irritamente auf Form und Grösse der Tetanuscurve. Archiv für Physiologie von Du Bois-Reymond 1882.

sind vier kleine Sättel f_1 angebracht mit gegen die Scheibe hin abgeschrägten Enden. An dem Hebel *c* befindet sich auf der einen Seite die Rolle *b*, welche auf dem Rande der Scheibe *a* schleift, auf der andern Seite die aus Platin verfertigte Gabel *d*. Die Zinken dieser Gabel tauchen nach Art des Kronecker-schen Capillarcontactes in mit Quecksilber gefüllte Glasröhrchen *e*, so dass die eine Zinke beständig mit dem Quecksilber in Berührung bleibt, während die andere kürzere nur bei tiefster Hebelstellung eintaucht.

Die Platinspitze wird gesenkt oder gehoben, je nachdem die Rolle *b*, welche an dem andern Ende des Hebels *c* sich befindet, auf den kleinen Sätteln *f*, oder auf dem Rande der Scheibe selbst schleift; und schliesst oder öffnet dadurch den Stromkreis der primären Rolle eines Dubois'schen Schlittens. Es lässt sich also das Reizintervall d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher die einzelnen Stromunterbrechungen auf einander folgen, variiren, durch die Stellung der Axe *C* auf der Frictionsscheibe *A* oder durch die Anzahl der Sättel, welche dem Rande der Scheibe *a* aufsitzen.

Um die gestellte Aufgabe vollständig zu lösen, gehört aber noch dazu, entweder den Oeffnungs- oder Schliessungs-Inductionsstrom abblenden zu können, da beide Ströme ungleiche Richtung und ungleichen Verlauf besitzen, somit auch einen ungleichen Reiz darstellen. Zu diesem Zwecke steht die secundäre Rolle nicht allein mit dem Nerven, sondern auch mit einem zweiten Röhrchenpaare e_2 in Verbindung, das auf dieselbe Weise wie das erste Paar durch die Senkung des Hebels c_2 in leitende Verbindung gebracht werden kann. Da die Scheibe a_2, auf welcher die der Rolle b_1 analoge Rolle b_2 schleift, auf derselben Axe *C* sich befindet, so bewegen sich beide Hebel c_1 und c_2 mit gleicher Geschwindigkeit. Die beiden Vorrichtungen unterscheiden sich nur darin, dass die Sättel *f* auf den Scheiben *a* nicht mit einander correspondiren, sondern gegen einander etwas verschoben sind, so dass also der Hebel c_1 früher gehoben wird, und früher wieder in seine Ruhelage zurücksinkt, als der Hebel c_2. Wenn also durch die Senkung des Hebels c_1 die Schliessung des primären Stromes erfolgt, geht der Schliessungsinductionsschlag durch den Nerven, da zu der Zeit die Rolle b_2 noch nicht auf dem Sattel, sondern auf dem Rande der Rolle schleift, d. h. die Gabel d_2 die leitende Verbindung zwi-

schen dem Röhrchenpaare e_2 noch nicht hergestellt hat. Der Oeffnungsinductionsschlag dagegen wird vom Nerven abgeblendet, da wegen der späteren Erhebung des Hebels c_2 die gute Nebenschliessung noch besteht, wenn durch Hebung des Hebels c_1 der primäre Strom sich öffnet.

Wenn man die Verbindungen der primären und secundären Rolle mit den Röhrchenpaaren e_1 und e_2 wechselt, kann auch der Schliessungsinductionsstrom vom Nerven abgeblendet werden, und der Oeffnungsstrom als Reiz dienen.

Um die Eigenschwingungen der Hebel c zu hindern, und die dadurch bedingten unregelmässigen Schliessungen und Oeffnungen zu vermeiden, sind aus Kork bestehende Hemmvorrichtungen angebracht, welche durch Schrauben verstellbar sind, und ebenso die Federn, welche die Hebel constant an den Rand der Scheiben a anpressen. Endlich sind noch die Röhrchenpaare durch Schrauben verstellbar zur genauen Einstellung der Spitzen der Gabeln e_1 und e_2. Durch eine Schraube lässt sich die Axe gegen die Frictionsscheibe verschieben, wodurch die Schnelligkeit der Hebelbewegung, also auch das Reizintervall geändert wird.

Mit der Aenderung der Hebelgeschwindigkeit wechselt aber auch der Inductionsstrom, da er von der Zeit der Oeffnung und Schliessung des primären Stromes abhängig ist. Wenn es also darauf ankam, bei constanter Stromintensität nur das Intervall zu ändern, musste die Geschwindigkeit der Hebelbewegung gleich bleiben, und durfte nur die Zahl der Sättel auf den Scheiben a variirt werden.

Dieser Apparat fungirte bei genauer Einstellung sehr gut, und überzeugte ich mich immer vor und nach jedem Versuche durch Anlegen des secundären Stromkreises an die Lippen, ob die Reizung in regelmässigen Intervallen erfolgte. Die fertig gestellte Reizvorrichtung ist in dem auf Seite 15 stehenden Schema veranschaulicht.

Die primäre Rolle des Inductionsapparates ist mit dem Elemente, dem einen Röhrchenpaare (e_1) des Reizapparates und mit einem electromagnetischen Schreibapparat m verbunden, der die Oeffnung und Schliessung des primären Stromkreises auf das endlose Papier des Kymographions aufträgt, d. h. die einzelnen Reize markirt. Von der secundären Rolle geht ein Zweigstrom zum zweiten Röhrchenpaare (e_2) des Reizapparates

und der andere Zweigstrom zum Nerven selbst. Letzterer ist nochmals durch einen Schlüssel (s) als Nebenschliessung unterbrochen, dessen Bewegung ebenfalls auf dem endlosen Papier sich aufzeichnet. Solange der Schlüssel geöffnet ist, geht der secundäre Strom durch den Nerven. Der Schlüssel hat die bei dem Ludwig'schen Kymographion gebräuchliche Form und habe ich

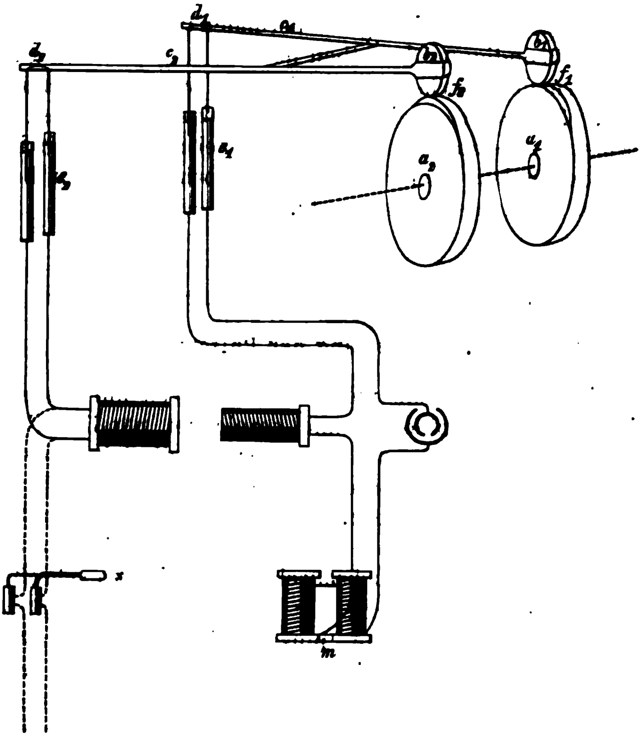


Fig. 1.

mich noch eigens davon überzeugt, bei welcher Stellung desselben die Oeffnung der Nebenschliessung erfolgt.

Die Bewegung des Schlüssels *s* markirt also die Dauer der Reizung und bestimmt dadurch die Anzahl der Einzelreize, welche den Nerven getroffen. Die Anzahl der Reize wird demnach nicht mechanisch fixirt, sondern mit der Hand. Doch lässt sich bei einiger Uebung die gewünschte Zahl ziemlich genau treffen,

wenn man schon vor dem Oeffnen des Schlüssels in der Geschwindigkeit des Reizmarkirers die Zählung der Einzelreize einige Male hinter einander ausführt.

Endlich wurde noch die Zeit in Secunden vermittelst einer Ludwig'schen Strom-Unterbrechungsuhr auf dem endlosen Papier des Kymographions aufgetragen.

Zur Bestimmung der Reizwirkung liess ich immer 30 Secunden lang vor der Reizung den normalen Puls sich aufzeichnen, und nach Beendigung derselben noch so lange, bis ich glaubte, einen normalen Verlauf der Pulscurve wieder annehmen zu dürfen. Zwischen zwei Abschnitten eines Versuches, d. h. zwischen zwei Reizungen, lag immer ein Zeitraum von mindestens 5 Minuten, so dass die Einwirkung der vorhergehenden Reizung bestimmt abgelaufen sein musste.

III. Die Berechnung der erhaltenen Pulscurve.

1. Ausmessung der Pulscurve.

Bei jedem Versuche wurden vier Curven auf das endlose Papier der Kymographiontrommel gezeichnet, nämlich die Pulscurve, die Zahl der Reize, die Reizdauer, und die Zeit in Secunden. Natürlich wurden schon vorher die Schreibfedern möglichst senkrecht untereinander gestellt. Um aber die identischen Punkte der vier Curven noch genauer zu erhalten, liess ich die Federn vor und nach jedem Versuchsabschnitte Ordinaten schreiben.

Da ich die Einwirkung der Reizung auf die Schlagfolge des Herzens studiren wollte, musste ich entweder die Zeit als Function des Pulses, oder die Pulszahl als Function der Zeit auffassen, d. h. also die Pulszahl bestimmen, welche innerhalb der Zeiteinheit vor und in Folge der Reizung aufgeschrieben wurde. Ich wählte wie Baxt[1]) das letztere als leichter durchführbar, und benutzte als Zeiteinheit immer je 2 Secunden, da ich durch einige Berechnungen gefunden, dass eine kleinere Eintheilung viel umständlicher, aber nicht genauer ausfiel, wegen der kleinen Unregelmässigkeiten der Aufschreibung und Ausmessung.

1) N. Baxt, Die Folgen maximaler Reize von ungleicher Dauer auf den N. accelerans cordis. Archiv für Physiologie von Du Bois-Reymond 1877.

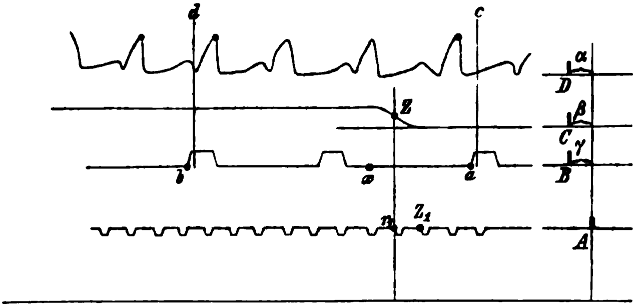


Fig. 2.

Durch obige Zeichnung will ich ein Beispiel geben über die Art meiner Ausmessung. Rechts finden sich die Ordinaten der vier Federn. Die Ordinate *D* entspricht der Pulscurve, *C* der Curve der Reizdauer, *B* ist die Ordinate des Zeitmarkirers und *A* die des Reizmarkirers. Verlängert man eine Ordinate, hier die unterste, so kann der gegenseitige Abstand dieser Ordinaten, d. h. die Grössen α, β, γ, leicht ermittelt werden.

Die linke Seite der Zeichnung ist ein Facsimile des Beginns einer Reizung. Ich habe dabei nur zu bemerken, dass darin die einzelnen Curven viel näher an einander gerückt sind, als es der Wirklichkeit entspricht, dass aber die Curven selbst in natürlicher Grösse wiedergegeben sind.

Die erste Aufgabe der Ausmessung ist, die identischen Punkte der Zeitcurve und der Pulscurve zu verbinden. Stellt nun $ab = 2$ Sec. die Zeiteinheit für die Pulsmessung dar, so repräsentirt cd den identischen Abschnitt der Pulscurve mit Rücksicht auf die Federstellung von *B* und *D*.

Das zweite Erforderniss ist, den Anfang der Reizung zu bestimmen. Bei *Z* wird durch das Oeffnen des Schlüssels der Nerv in den Stromkreis eingeschaltet, so dass mit dem Eintreffen des nächsten Reizes der Anfang der Reizung beginnt. Der identische Punkt für *Z* auf der Curve des Reizmarkirers ist Z_1, somit r_1 der erste Reiz für den Oeffnungsstrom bei Abblendung des Schliessungsstroms. Der identische Punkt von r_1 auf der Curve des Zeitmarkirers, d. h. der Anfang der Reizung, ist x.

Wenn ich also bei der Ausmessung der Pulszahlen die normale Schlagfolge bis c, und von da an die unter dem Einfluss der Reizung stehende annehme, so habe ich zur Erlangung der

richtigen Werthe eine Correctur anzubringen. Da eine Secunde hier = 19.6 mm, ax = 13.2 mm ist, so ist ax = 0.67 Secunden oder = 0.33 Zeiteinheiten der Messung.

Auf dieselbe Weise lässt sich auch das Ende der Reizung bestimmen, dadurch die Zahl der Reize, und wenn ich die Reizdauer durch die Anzahl der Reize — 1 dividire, das Intervall zwischen zwei Reizen.

Es könnte auf den ersten Blick passend erscheinen, die Correctur für den Anfang der Reizung, der, man kann sagen, nie mit der Zeiteinheit zusammenfällt, schon bei der Ausmessung der Pulszahl zu berücksichtigen. Da aber die linearen Differenzen nicht direct übertragbar sind, weil die Zeiteinheit selbst wegen der ungleichen Fortbewegung des endlosen Papiers in ihrer linearen Ausdehnung wechselt, so ist es weit bequemer, ganz unabhängig von dem Eintritt der Reizung die Schlagfolge des Herzens auszumessen, und erst bei der Correctur der so erhaltenen Zahlen auf den wahren Reizanfang Rücksicht zu nehmen.

2. Correctur der erhaltenen Werthe.

Da die durch die Reizung beeinflusste Pulszahl nur allmählich, auch während der zur Messung benützten Zeiteinheit, sich ändern wird, so übertrug ich die direct ermittelten Zahlenwerthe auf ein Millimeterpapier in der Weise, dass ich die Zeit als Abscisse, und die in der Zeiteinheit erhaltenen Pulszahlen als Ordinaten auftrug, diese Punkte aber nicht geradlinig, sondern in Curvenform verband. Da die Ausmessung der fixen Punkte, sowie die Pulszählung gewisse Fehler einschliesst, so erlaubte ich mir auch, die direct erhaltenen Punkte im Rahmen der Fehlergrenzen zu ändern, und dadurch die wahrscheinlichen Fehler auszuschliessen. Ich ging eben von dem Gedanken aus, dass im Organismus nicht plötzliche, sondern nur allmählich fortschreitende Aenderungen vorkommen können. Ich glaube auch, dass diese Methode überhaupt anzuwenden ist, wenn nur die Correctur den möglichen Fehler nicht überschreitet. Die Correction war daran gebunden, dass die durch die Reizung bedingte Pulsvermehrung sich im Gesammtwerthe nicht ändern durfte. Es mussten also die Abweichungen einer Ordinate durch die der nächstliegenden ausgeglichen werden.

In Figur 2, Tafel I habe ich eine solche Correctur wiedergegeben. Die Punkte bedeuten die direct gewonnenen Pulszahlen. Der Anfang der Reizung fällt mit 0 zusammen. Die Ordinaten gehen von der normalen Pulszahl aus. Die Curve stellt also die durch die Reizung bedingte Veränderung der normalen Schlagzahl dar, ausgedrückt in der Einheit von 2 Secunden. Die Zeichnung lässt zu gleicher Zeit erkennen, in welcher Weise ich für die Differenz zwischen Anfang der Reizung und Anfang der Zählung die Correctur anbrachte, nämlich dadurch, dass ich die Curve um diese Differenz seitlich verschob, so dass sich nun die den wahren Reizabschnitten entsprechenden Ordinaten direct ablesen lassen.

Die grösste Correctur beträgt in der angeführten Curve 0.16 Pulse für die Einheit von 2 Secunden. Ich bemerke, dass dieses Beispiel nicht deshalb herausgesucht wurde, weil dabei die Correcturen klein sind. Es ist eine Durchschnittscurve, und eine Correctur von 0.16 Pulsen gehört schon zu den Ausnahmen.

In manchen Fällen, wenn der Anfang der Reizung gerade mit einer Oeffnung oder Schliessung des primären Stromes zusammenfällt, kann es zweifelhaft werden, was als erster Reiz anzusehen ist. Ich habe mir dann in der Weise geholfen, dass ich die Curve dieser Reizung mit einer ähnlichen verglich, und nach dem Verlauf der beiden Curven die Wahrscheinlichkeit des einen oder andern Falles beurtheilte. Auf diese Weise kommt man in den meisten Fällen leicht zum Ziele.

Ich habe bisjetzt nur von der absoluten Pulszahl gesprochen, während der Effect der Reizung doch nur die überzählige Pulszahl, d. h. die über der normalen gelegene Pulszahl ist. Es handelt sich also um die Frage, welche Schlagzahl man als die normale anzusehen habe. Vor jedem neuen Versuchsabschnitte wurde, wie schon besprochen, wenigstens 30 Secunden lang die normale Pulscurve aufgeschrieben. Man könnte also die auf diese Weise gewonnene Durchschnittszahl als normal ansehen, und daraus die überzählige Pulszahl berechnen. Nun hat Baxt[1]) angegeben, dass die von ihm so genannte maximale Häufigkeit der Schlagzahl nicht von der vorher gewonnenen Normalzahl abhängig ist, sondern nur von der Intensität der

---

1) N. Baxt, Die Folgen maximaler Reize von ungleicher Dauer auf den N. acc. cord. Archiv für Physiologie von Du Bois-Reymond 1877.

Reizung, wenn nicht die Veränderung der normalen Schlagfolge von einer Vagus-Reizung oder einer Aenderung in der Eigenwärme des Thieres herrührt. Dies kann ich im Allgemeinen bestätigen. Die unter gleichen Reizbedingungen gewonnenen Pulscurven sind nahezu identisch, wenn auch die vorhergehende Normal-Schlagzahl etwas variirt hat. Sie weichen nur am Anfang und Ende d. h. bei dem Uebergang von der normalen in die von der Reizung abhängige Pulscurve und bei der Rückkehr zur normalen Schlagzahl von einander ab.

Ich habe aber auch Curven, wo dieses nicht der Fall ist, in denen die absoluten Pulszahlen sich nicht decken, dagegen die Curven der überzähligen Pulse, so dass man hier bei Vergleichung zweier Reizerfolge nicht von der gleichen, sondern der direct vorhergehenden Normalzahl ausgehen müsste. Um ja keinen Fehler zu machen, habe ich deshalb nur solche Versuchsabschnitte verglichen, welche fast identische Normalzahlen aufwiesen, dann aber immer eine gemeinsame Normalzahl angenommen.

Während eines Versuches habe ich von Zeit zu Zeit immer identische Reizbedingungen eingeführt, an deren Resultaten sich die Veränderungen im ganzen nervösen Apparat verfolgen liessen, und dann nur solche Theile verglichen, bei denen ich annehmen konnte, dass sie unter gleichen Zuständen des nervösen Apparates gewonnen waren.

Ich verhehle mir nicht, dass die auf solche Weise erhaltenen Curven der überzähligen Pulse nicht in allen Punkten richtig zu sein brauchen. Die Resultate sind aber bei den verschiedenen Versuchen so übereinstimmend, dass die Curven nicht viel von der Wahrheit abweichen können.

IV. Resultate der Reizung.

1. Abhängigkeit der überzähligen Pulse von der Reizanzahl.

a) Abhängigkeit der Summationscurve von der Reizanzahl.

Reizt man den Nervus accelerans bei gleicher Intensität und gleichem Intervalle mit wechselnder Reizanzahl, so erhält man Curvenreihen, wie sie auf Taf. 3—5 abgebildet sind. Dieselben wurden an dem gleichen Hunde gewonnen. Die Abscissen be-

deuten die Zeit, ausgedrückt in Secunden, die Ordinaten die innerhalb 2 Secunden erhaltenen überzähligen Pulse, und zwar nach den schon corrigirten Zahlen.

Betrachten wir zunächst die einzelne Reizcurve für sich, so lassen sich daran vier Abschnitte unterscheiden, eine Strecke der Wirkungslosigkeit, welche dem Latenzstadium entspricht, einen aufsteigenden Theil, den Gipfel und den absinkenden Theil.

Die Grösse des Latenzstadiums ist nicht genau zu bestimmen, dauert aber auf jeden Fall länger als bei der Muskelcontraction. Aus ihm geht die Curve rasch in ihren aufsteigenden Theil über, welcher, nachdem er einige Zeit mit fast gleichmässiger Geschwindigkeit gewachsen ist, allmählich zum Gipfel umbiegt. Der absteigende Curventheil besteht aus zwei Schenkeln, welche durch einen nicht überall gleich deutlich ausgeprägten, aber doch immer erkennbaren Wendepunkt verbunden sind. Im ersten Schenkel sinkt die Curve mit nahezu gleicher Geschwindigkeit, um nach ihrem Wendepunkte, im zweiten Schenkel ganz langsam der Abscisse sich zu nähern.

Mit steigender Reizanzahl wachsen die Curven in ihrer ganzen Ausdehnung, aber nicht proportional der Reizanzahl, sondern mit anfangs zunehmender, dann aber langsam abnehmender Geschwindigkeit. Es lässt sich dies sofort beweisen, wenn wir z. B. in Fig. 5 die Reizcurven von $r = 9$ mit $r = 20$ vergleichen und damit die Differenz zwischen den Curven $r = 30$ und $r = 40$.

Mit zunehmender Reizdauer wird endlich ein Punkt erreicht, wo durch eine Vermehrung der Reizanzahl die Höhe der Curven sich nicht mehr, oder nur um eine minimale Grösse ändert, und die Länge derselben nur mehr um die Verlängerung der Reizung selbst. Diesen Punkt hat schon Baxt in seiner Untersuchung über die Abhängigkeit der überzähligen Pulse von der Reizanzahl bei maximaler Reizintensität und kleinem Intervalle festgestellt. Er findet sich aber bei jeder Reizintensität und jedem Intervalle. Auf der Fig. 3 habe ich ihn mit *M* bezeichnet.

Ich möchte gleich hier die Frage erörtern, ob schon ein einziger Reiz eine Wirkung ausübt. Aus Fig. 5 ist ersichtlich, dass die Wirkungscurve mit der Reizanzahl anfangs schneller anwächst. Das Gleiche zeigt sich in Figur 4 beim Vergleich der

Curve $r = 10$ mit dem Unterschiede der Curven $r = 10$ und $r = 20$, und würde sich noch deutlicher ausprägen, wenn in dieser Reihe auch eine Reizung unter $10r$ vorläge. In Fig. 6 gebe ich eine an einem andern Hunde ausgeführte Reihe, welche das nämliche Resultat ergiebt, und in der bei $4r$ noch eine deutliche Wirkung zu beobachten ist. Ich führe diese Reihe auch deshalb an, weil in ihr die absoluten Pulszahlen ohne Correctur aufgetragen sind, wie sie direct durch die Messung gefunden wurden. Hier stellen also die an der Ordinatenaxe angegebenen Werthe nicht wie bei den übrigen Curven die überzähligen, sondern die absoluten Pulszahlen dar. Im Uebrigen ist die Eintheilung gleich den früheren. Da also die Curven anfangs rascher zunehmen, als ihrer Reizanzahl entspricht, haben wir, wie dies besonders aus der Curve $r = 4$ hervorgeht, für einen einzigen Reiz überhaupt keine grosse Wirkung zu erwarten. Ich habe nun zufällig keinen Versuch mit nur einem einzigen Reize, aber doch einen mit $r = 2$ bei dem Hunde *H*, den ich zusammen mit einem von $r = 4$ in Fig. 7 dargestellt habe. Auch sie sind in absoluten uncorrigirten Zahlen wiedergegeben. Für $2r$ ist nun allerdings eine Wirkung sichtbar, die Erhebung ist aber so klein, dass sie sehr schwer von den normalen Pulsschwankungen zu unterscheiden ist. Dennoch wird dadurch sehr wahrscheinlich, dass der erste Reiz schon eine Pulsvermehrung hervorruft. Ich glaube auch, dass dies unbedingt nothwendig ist, da jeder Reiz eine wenn auch noch so minimale Aenderung im nervösen Apparate zur Folge haben muss. Und diese Aenderung kann sich wohl quantitativ aber nicht qualitativ mit der Zahl der Reize verschieben. Es würde sich also nur um die Frage handeln, ob die Aenderung, welche ein Reiz verursacht, gross genug ist, um eine sichtbare Wirkung auszuüben.

Wie ändern sich nun die einzelnen Abschnitte der Curve mit der Reizanzahl?

Im aufsteigenden Abschnitte der Curve nimmt hauptsächlich die Länge des steilen Theiles mit der Reizanzahl zu, und damit auch die Zeit, innerhalb welcher der Gipfel erreicht wird, während der Uebergang zum Gipfel bei allen Curven in ähnlicher Weise verläuft. Diese Zunahme dauert bis zu der Reizanzahl, bei welcher die Höhe des Gipfels nur mehr minimal sich ändert. Ich habe deshalb diese Höhe die Maximalhöhe genannt, und werde diesen Ausdruck fernerhin auch beibehalten, und darum

auch die Anzahl von Einzelreizen, bei welcher diese Maximalhöhe erreicht wird, als die maximale bezeichnen.

Der erste Schenkel des Abfalls nimmt ebenfalls mit der Reizanzahl an Steilheit und Länge zu in ähnlicher Weise, nur etwas weniger rasch, wie die Höhe der Curve. Auch diese Zunahme erreicht eine Grenze, von der an die Länge der Strecke gleich bleibt, während die Steilheit sogar wieder abnimmt, bis auch sie nahezu stationär wird und zwar mit der Reizanzahl, welche ich vorher die maximale genannt habe. Es weicht deshalb bei den einzelnen Curven die Lage des Wendepunkte im abfallenden Curventheile viel weniger, wie die Höhe der Gipfel von einander ab. Dieselben liegen auf einer Linie, welche, mit der Abscisse einen spitzen Winkel bildend, anfangs nahezu gerade ansteigt, um dann rasch sich wendend in eine zur Abscisse parallel laufende Gerade überzugehen.

Der zweite Schenkel des abfallenden Curventheiles nimmt mit der Reizanzahl an Länge constant zu, und zwar ebenfalls mit anfangs beschleunigter, dann abnehmender Geschwindigkeit, während seine Neigung zur Abscisse ganz langsam kleiner wird.

Auch diese Aenderung erreicht mit der maximalen Reizanzahl eine Grenze, so dass von dieser Reizanzahl an Anstieg wie Abfall nahezu vollständig gleich bleiben, und die Curven hauptsächlich in der ungleichen Länge ihrer Gipfel sich unterscheiden. Ich nenne deshalb diese Curvenform, welche die maximale Reizanzahl hervorbringt, die Grenzcurve, weil sie sich mit der Reizanzahl fast nur mehr durch die Verbreiterung des Gipfels ändert.

Die Gesetzmässigkeit dieser Aenderung geht direct aus der Betrachtung der Curven hervor, und ist es unnöthig, durch Zahlenangaben weitere Beweise dafür zu liefern, besonders wenn man die Curven zu Hilfe nimmt, die ich noch weiter anführen werde.

Die Betrachtung der Curven zeigt, glaube ich, dass wirklich eine Summation vorliegt. Dieselben steigen abhängig von der Reizanzahl mit abnehmender Geschwindigkeit bis zur Maximalhöhe an. Mit der Höhe des Gipfels wächst auch die Steilheit des Abfalls, welcher in ähnlicher Weise wie der Anstieg verläuft.

Dagegen finden sich doch auch bedeutende Abweichungen von einer Summation, deren Einzelcurven alle identisch sind. Es nehmen einmal die Curven anfangs mit wachsender und dann

erst mit abnehmender Geschwindigkeit zu, die Länge der Curve wächst nicht proportional der Reizanzahl, sondern in einem andern Verhältniss, und auch die Geschwindigkeit des Abfalls ändert sich nicht proportional mit der Höhe der Curven. Wollen wir diese Unregelmässigkeiten in Zahlenform ausdrücken, so erhalten wir folgende Tabelle:

Zahl der Reize	Höhe der Curven		Länge der Curven		Mittl. Geschw. f. d. Einh. v. 10 Sec.		
	absolute Höhe	Zunahme für 1 r	absolut	nach Schluss der Reizung	Anstieg	Abfall 1. Schenkel	Abfall 2. Schenkel
			Figur 3.				
11	2.35	0.21	32.4	31.4	3.6	1.18	0.51
19	3.25	0.11	42.2	40.4	3.8	1.52	0.53
31	3.75	0.06	74.6	71.6	4.0	1.54	0.25
49	4.03	0.02	81.6	76.7	3.7	1.57	0.27
201	4.66	0.00	?	?	4.1	1.36	0.21
			Figur 4.				
10	1.80	0.18	28.4	27.5	3.0	1.07	0.40
20	3.12	0.13	40.0	38.1	4.0	1.45	0.46
41	3.80	0.03	61.0	57.0	3.8	1.51	0.34
101	4.50	0.01	96.0	86.0	3.6	1.40	0.23
			Figur 5.				
9	0.73	0.08	20.2	17.2	0.91	0.62	0.30
20	1.84	1.01	33.0	25.0	1.53	1.01	0.39
30	2.18	0.03	40.8	28.6	1.49	1.09	0.46
40	2.40	0.02	47.0	30.6	1.31	1.11	0.44

Auch aus diesen Zahlen ersieht man, dass die Höhen der Curven mit abnehmender Geschwindigkeit wachsen, nachdem sie, wie aus Fig. 5 hervorgeht, kurze Zeit zugenommen haben; das Nämliche hat für die Länge der Curven Geltung, nur dass die zunehmende Geschwindigkeit erst später beendigt ist. Dieses drückt sich besonders in der 5. Columne aus, deren Werthe bei einfacher Summation[1]) alle gleich sein sollten. Die angeführten Geschwindigkeiten des An- und Abstiegs sind nicht vollständig correct, da die Wahl der fixen Punkte immer eine gewisse Willkürlichkeit in sich schliesst. Es ist aber trotzdem daraus ersichtlich, dass die Geschwindigkeiten nicht gleich sind, dass die Geschwindigkeit des ersten Schenkels im Abfall nach einem ganz anderen Verhältnisse zunimmt, wie die Gipfelhöhe, und bei längerer Reizung sogar wieder abnimmt, dass

1) Seite 211.

auch der zweite Schenkel nach einer kurzen Zunahme in seiner Geschwindigkeit ganz allmählich zurückgeht.

Um übrigens momentan entscheiden zu können, ob hier eine einfache Summation vorliegt, haben wir nur die Grenzcurve z. B. in Fig. 3 bei $r = 201$ ins Auge zu fassen, und die Form des An- und Abstiegs mit einander zu vergleichen, welche ja in diesem Falle identisch sein müssten.

Es muss also nothwendig während der Reizung eine Aenderung in der Einzelcurve eintreten.

b) Die Abhängigkeit der Einzelcurve von der Reizzahl.[1])

Um die Abhängigkeit der Einzelcurve von der Reizzahl kennen zu lernen, habe ich aus der Differenz der Summationscurven nach der schon angegebenen Methode die mittleren Einzelcurven construirt, und mit einander verglichen. Die Reihen der Einzelcurven, die ich zunächst besprechen will, gehören den Summationscurven auf Fig. 3—5 an, und sind in den Figuren 8—10 abgebildet.

Die Eintheilung ist dieselbe, wie bei den Summationscurven, nur sind die überzähligen Pulse nicht in der Einheit von 2 Sec. sondern von 1 Sec. ausgedrückt.

Wir sehen zunächst, dass die Wirkung eines Reizes je nach der Zahl der vorhergehenden Reize eine bedeutende Aenderung erfährt, welche zwar nicht in allen gegebenen Beispielen gleich, aber doch nach dem nämlichen Princip abläuft.

Die Einzelcurven nehmen anfänglich mit der Reizzahl in ihrer ganzen Ausdehnung zu, ohne die Aehnlichkeit in der Form zu verlieren, und zwar ungefähr bis zu einer Reizzahl von 10 bis 20r. Dies ergiebt sich aus den Curven in Fig. 10, hat aber auch für die übrigen Reihen Giltigkeit. Auf die Ursachen dieser Verschiedenheiten will ich mich vorläufig nicht einlassen, und sie erst dann besprechen, wenn die Abhängigkeit der Einzelcurve von der Reizintensität und dem Intervalle klar gelegt ist.

Von dem 10. bis 20. Reize an beginnt eine rückläufige Be-

1) Ich verstehe unter Reizzahl einen bestimmten Einzelreiz in der ganzen Reizreihe, also den ersten oder zweiten oder x^{ten} Reiz. Im Gegensatz dazu bezeichne ich mit Reizanzahl die Summe aller Reize.

wegung, mit der sich auch die Form der Curve umgestaltet. Dieselbe besteht hauptsächlich darin, dass der Gipfel unter steter Verbreiterung sinkt, verbunden mit einer Zunahme der Curvenlänge. Mit dem 30. Reize ungefähr nimmt die Einzelcurve wieder eine constantere Form an, ändert sich überhaupt nur mehr sehr langsam durch weiteres Sinken des Gipfels unter Zunahme ihrer Länge. Sie nähert sich also sehr langsam einer Grenzcurve.

Die Form der mittleren Einzelcurve aus den ersten zehn Reizen lässt sich zum Entscheid der Frage benutzen, ob der erste Reiz schon eine Vermehrung der Pulszahl hervorruft. Zunächst ist daraus ersichtlich, dass die Frage experimentell nicht gelöst werden kann, da selbst dann, wenn die Curve des ersten Reizes mit der mittleren Einzelcurve von 10 r zusammenfällt, die Erhöhung der Pulszahl in 2 Sec., nach Fig. 8 nur 0.2 Pulsschläge, und bei Fig. 10 sogar nur 0.1 Pulsschläge betragen würde. Je kleiner aber die Curve des ersten Reizes ist, desto höher müsste die Einzelcurve des Reizes $r = 10$ steigen, d. h. desto schneller müssten die Einzelcurven mit der Reizzahl wachsen, um die vorliegende mittlere Einzelcurve für die Reize $r = 1$ bis $r = 10$ möglich zu machen. Dies ist aber nach der Entwicklung, welche die mittleren Einzelcurven mit den späteren Reizzahlen z. B. $r = (10-20)$ nehmen, nicht denkbar, und wird es dadurch sehr wahrscheinlich, dass schon der erste Reiz eine Wirkungscurve besitzt.

Was ferner das Latenzstadium der Einzelcurve betrifft, so nimmt dasselbe mit der Zahl der Reize ab, ein Zeichen, dass bei der Summationscurve das sichtbare Latenzstadium zum grössten Theil aus der Form der den ersten Reizen zukommenden Einzelcurven abgeleitet werden muss.

c) Die Gesammtwirkung des Einzelreizes.

Es liegt mir ferne, zu glauben, dass die Wirkung einer Accelerans-Reizung nur in einer Veränderung der Schlagzahl des Herzens zu bestehen braucht; meine Aufgabe liegt aber allein darin, die Gesetzmässigkeit des Zusammenhangs zwischen Accelerans-Reizung und Pulsvermehrung darzulegen. Ich verstehe also hier unter Gesammtwirkung die durch die Reizung hervorgerufene Gesammtmenge der überzähligen Pulse. In die-

sem Sinne aufgefasst, wird die Gesammtwirkung des Einzelreizes durch den Flächenraum dargestellt, welchen die Einzelcurve umschreibt. Wir können also schon aus der Form der Einzelcurve ersehen, dass auch die Gesammtwirkung des Einzelreizes mit der Reizzahl wechselt.

Noch deutlicher erkennbar wird es, wenn wir die Gesammtmenge der überzähligen Pulse als Function der Reizzahl in Curvenform auftragen. Fig. 11—13 zeigen solche Curven, die den auf Fig. 8—10 dargestellten Einzelcurven angehören. In ihnen bedeuten die Abscissen die fortlaufenden Reizzahlen, die Ordinaten die dem jeweiligen Reize zukommende Gesammtwirkung.

Ich werde erst später darauf eingehen, in welcher Weise solche Curven zu construiren sind. Es sei nur soviel erwähnt, dass die den Einzelcurven zugehörigen Werthe erhalten werden, wenn man die Gesammtmenge der überzähligen Pulse der bei verschiedener Reizanzahl gewonnenen Summationscurven von einander abzieht. Trägt man also die den Summationscurven zugehörigen Werthe in Curvenform auf, so stellt uns ihr Geschwindigkeitsverlauf die gewünschte Curve dar.

Die nicht ganz ausgezogenen Linien in den aufgeführten Curven bedeuten, dass nur die beiden Endpunkte der Curvenstücke bestimmt wurden.

An diesen Beispielen tritt nun deutlich hervor, was schon aus der Formveränderung der Einzelcurve erkennbar war, dass die Gesammtmenge der überzähligen Pulse mit steigender Reizzahl rasch zunimmt, um ebenso rasch wieder bis ungefähr zum 30. und 40. Reize zu fallen. Von letzterer Reizzahl an sinkt die Curve nur mehr sehr langsam bis zum Grenzwerthe. Die Curve verläuft also in ähnlicher Weise, wie die Aenderung der Höhen der Einzelcurven, und wird das Sinken der Curven nicht durch ihre Verlängerung ausgeglichen.

Ich glaube damit gezeigt zu haben, dass die den einzelnen Reizen zukommenden Wirkungscurven nicht identisch sind, sondern mit der Reizzahl sich ändern, dass also die Einzelcurve als eine Function der Reizzahl aufgefasst werden muss.

Wodurch diese Formveränderung verursacht ist, wird erst später zu besprechen sein. Bevor ich zu etwas Weiterem übergehe, möchte ich noch einmal auf den Begriff der Grenzcurve zurückkommen, um zu untersuchen, wie weit dessen Aufstellung berechtigt ist.

Aus den obigen Curven in Figur 11—13 geht hervor, dass die Gesammtwirkung der Einzelreize von einer bestimmten Reizzahl an nur wenig und allmählich sinkt. Derselbe Schluss lässt sich aus den Einzelcurven selbst ziehen. Sie ändern sich von einer bestimmten Reizzahl an nur mehr minimal, und verschwindend gegenüber den Differenzen der vorausgehenden Einzelcurven. Ihre ganze Entwicklung weist überhaupt darauf hin, dass die Unterschiede mit fortlaufender Reizzahl immer kleiner werden. Wir können also sagen, dass die Einzelcurve sich immer mehr und mehr einer Grenzcurve nähert, und dass der Fehler, die Einzelcurve einer Reizzahl auch für eine andere nachfolgende gelten zu lassen, immer kleiner und kleiner wird. Insofern hat der Begriff der Grenzcurve gewiss seine Berechtigung.

Ich beschränke aber denselben dadurch noch etwas weiter, dass ich mit ihm eine bestimmte Eigenschaft der Summationscurve in Verbindung bringe. Ich habe schon hervorgehoben, dass von der maximalen Reizzahl an die Höhe der Summationscurve nur mehr minimal zunimmt, und dass sie ihre Gestalt vor Allem durch die Verbreiterung des Gipfels ändert. Ein weiterer Unterschied könnte nur in der Geschwindigkeit des Abfalls liegen, was aber nach den Figuren 3 und 6 durchaus nicht der Fall ist. In der Figur 3 z. B. stimmt die Curve $r = 49$ und $r = 201$ in der Geschwindigkeit des Abfalls nahezu überein, obwohl die Anzahl der Reize ziemlich verschieden, und die Reizzahl $r = 49$ noch keine maximale ist. Ich könnte dafür auch noch weitere Beispiele anführen. Eine ganz geringe Abflachung tritt allerdings noch ein, so gut wie eine Erhöhung des Gipfels. Dieselbe ist aber, wie aus der Uebereinstimmung der betreffenden Einzelcurven hervorgeht, so klein, dass sie für nicht allzugrosse Differenzen in der Reizanzahl vernachlässigt werden kann.

Weil also auch die Summationscurve von der maximalen Reizanzahl an nahezu eine constante Form annimmt, habe ich die Reizzahl, mit der die Summation ihren maximalen Gipfel erreicht, den Grenzreiz genannt, und verstehe unter der Grenzcurve die Einzelcurve, welche dem Grenzreize entspricht. Da aber eine Summationscurve in Bezug auf ihre Form nahezu unabhängig von der Anzahl der Reize ist, eignet sie sich sehr gut zur Lösung weiterer Fragen.

2. Die Abhängigkeit von der Stärke des Reizes.

a) Bestimmung der Reizstärke.

Wenn wir annehmen, dass jeder Reiz eine Zustandsänderung im nervösen Apparat hervorbringt, nach welcher die Wirkungscurve sich richtet, so haben wir zu berücksichtigen, dass nur eine Stromschwankung eine solche Zustandsänderung veranlasst. Es würde also strenge genommen der electrische Reiz, mit Ausnahme von linearen Stromschwankungen, selbst schon eine Anzahl von Einzelreizen darstellen, entsprechend des Geschwindigkeitsverlaufes seiner Curve, und erklären sich so die ganz verschiedenen Wirkungscurven von Strömen ungleichen Verlaufes, aber auch die gleichen Wirkungscurven bei Strömen verschiedener Steilheit. Wir können also die electromotorische Kraft nicht direct zur Messung der Reizgrösse benutzen, da wir die Abhängigkeit der Stromcurven von derselben in den wenigsten Fällen kennen. Dennoch habe ich dieselbe aus Mangel an etwas Besserem als Massstab für die Reizgrösse angewendet. In diesem Sinne aufgefasst wird die Reizgrösse von der Stromdichte in dem durchflossenen Nervenstücke dargestellt, wobei noch als weiterer Factor der Querschnitt der wirklich erregbaren Nervensubstanz eingeschaltet werden müsste. Die Stromdichte wird ausgedrückt durch die Intensität des Stromes J, dividirt durch den Querschnitt des durchflossenen Stückes.

Da nun die Intensität gleich ist der electromotorischen Kraft dividirt durch die Gesammtmenge der Leitungswiderstände, d. h. $J = \frac{E}{W}$, die electromotorische Kraft aber proportional den auf der Schlittenscala aufgetragenen Einheiten, so können wir bei dem nämlichen Nerven die Stromdichte d. h. die Reizstärke proportional den Schlitteneinheiten setzen; denn die Widerstände der ganzen Leitung bleiben sich überall gleich, und nur E ändert sich mit der Stellung der secundären Rolle.

Bei dem Vergleiche verschiedener Versuche untereinander dagegen ist die Reizstärke den Einheiten der Schlittenscala nicht mehr proportional, indem zwar bei Anwendung gleicher Elemente die electromotorische Kraft E dieselbe bleibt, aber nicht mehr der Widerstand W, und zwar wegen Einschaltung eines andern Nerven und auch ungleicher Lagerung desselben auf den Elec-

troden; ebenso nicht die Stromdichte wegen ungleichen Querschnitts des eingeschalteten Nervenstückes.

Soll der Einfluss der Reizstärke auf die Summationscurven festgestellt werden, so gewährt es grossen Vortheil, dazu Curven zu benützen, die bei maximaler Reizanzahl gewonnen sind, da man bei ihnen ohne grossen Fehler für ungleiche Reizdauer eine Correctur anbringen kann.

b) Einfluss der Intensität des Reizes bei maximaler Reizanzahl.

Wie ich schon bei Besprechung der Summationsvorgänge erörtert habe, müssen die Curven auch von der Grösse des Intervalls abhängen. Es lässt sich also eine vollständige Uebereinstimmung des Intensitätseinflusses bei allen Reihen nicht erwarten. Trotzdem wird es möglich sein, ganz unabhängig vom Intervalle den Zusammenhang der Reizintensität mit der Form der Summationscurve in ganz ähnlicher Weise wie für die Reizanzahl darzuthun. Ich führe in Figur 14—16 Beispiele dafür an. Figur 14 ist an dem Hunde *U*, Figur 15 und 16 an dem Hunde *N* gewonnen. Die Curven sind ohne Correctur der Pulszahlen wiedergegeben, auch ohne Berücksichtigung des wahren Reizanfanges. Sie sind also der Ausdruck der direct durch die Zählung erhaltenen Werthe.

Ich habe deshalb die Correctur weggelassen, weil die Curven auch ohne dieselbe klar machen, was sie beweisen sollen, dann aber auch, um die Gleichmässigkeit der uncorrigirten Curven an einigen Beispielen zeigen zu können. Die Eintheilung ist ganz die gleiche, wie bei den vorhergehenden Summationscurven.

Jede Reihe ist im Allgemeinen bei gleicher Reizdauer angestellt, und habe ich mir erlaubt, bei den Curven, welche zufällig davon abwichen, eine Correctur in der Weise anzubringen, dass ich den der längeren Reizung entsprechenden Curvenabschnitt einfach wegliess. So erklärt sich die Unregelmässigkeit des Gipfels in Figur 15 bei 6.6 Scaleneinheiten, wo die Reizdifferenz zehn Secunden betrug und in Figur 14 bei 15 Einheiten. Ich habe ja schon hervorgehoben, dass auch die Summationscurven maximaler Reizanzahl mit der Reizdauer beständig, wenn auch nur langsam, sich erhöhen. Durch diese Correctur

wurde für alle Curven das Ende der Reizung in *eine* Linie gelegt, die auch auf der Zeichnung ausgezogen ist.

Aus den angeführten Beispielen geht deutlich hervor, dass die Summationscurven mit der Reizintensität in ihrer ganzen Ausdehnung sich vergrössern, aber nicht proportional, sondern mit zunehmender dann abnehmender Geschwindigkeit, bis endlich die Curven von einer bestimmten Intensität an sich gleich bleiben. Dies ist die maximale Reizstärke, und die ihr entsprechende Curve die Maximalcurve.

Uebermaximale Reize ändern, wenigstens soweit ich es geprüft habe, die Curvengestalt nicht mehr. Die maximale Intensität hat übrigens auch Baxt schon angeführt. Wann die Curvenänderung ihre maximale Grenze erreicht, lässt sich graphisch nicht ausdrücken, wohl aber durch die Gesammtmenge der überzähligen Pulse, welche bei maximaler Reizung sich nicht mehr ändern darf. Ich werde darauf bei Besprechung der Gesammtwirkung, d. h. deren Abhängigkeit von der Reizintensität noch zurückkommen.

Um die Curvenänderung noch etwas genauer verfolgen zu können, zerlege ich die Curven wieder in ihre vier deutlich ausgeprägten Abschnitte: die latente Reizung, den Aufstieg, den Gipfel, und den Abstieg.

Ob die Dauer der latenten Reizung sich ändert, ist nicht zu bestimmen, scheinbar ist sie bei schwächeren Reizen verlängert, was aber auch in der geringen Höhe der Curven selbst begründet sein kann. Von vorn herein wäre die Unabhängigkeit der latenten Reizung von der Reizstärke das Wahrscheinlichste, da dieselbe nur die Zeit ausdrücken soll, welche nothwendig ist, damit eine Zustandsänderung in fortlaufender Reihe wieder eine neue hervorruft.

Der Gipfel der Curven wächst entsprechend der Reizstärke zuerst mit zunehmender, dann mit abnehmender Geschwindigkeit, bis er in den Gipfel der Maximalcurve übergeht.

Mit der Höhe der Curve nimmt der Anstieg an Steilheit zu, und ebenso die Krümmung der Wendestrecke zum Gipfel, so dass letzterer um so früher erreicht wird, und seine Form um so rascher einer Geraden sich nähert, je grösser die Reizstärke ist.

Was den Abfall betrifft, so wäre er wieder in zwei Schenkel zu zerlegen, welche durch eine Wendestrecke verbunden sind. Der erste Schenkel sinkt durchwegs viel rascher wie der zweite.

Die Aenderung des Abfalls ist viel complicirterer Natur als die des Aufstiegs. Solange die Curven mit der Zunahme der Reizstärke noch mit wachsender Geschwindigkeit ansteigen, rückt die Lage der Wendestrecke nach aussen und nur wenig nach oben. Dadurch werden beide Schenkel des Abfalls länger und durch die zunehmende Steilheit beider Schenkel, insbesondere des ersten, die Krümmung der Wendestrecke grösser. Sobald aber die Höhe der Curven mit abnehmender Geschwindigkeit wächst, rückt die Wendestrecke verhältnissmässig mehr nach oben, der erste Schenkel behält seine Länge oder verkürzt sich wieder, und seine Steilheit nimmt ab. Dadurch wird die Krümmung der Wendestrecke flacher, besonders da auch der zweite Schenkel immer langsamer der Abscisse sich nähert.

Es ändern sich also die Curven unter dem Einfluss der höheren Intensitäten hauptsächlich im abfallenden Theile; und es kommt vor, dass zwei Curven sich nur mehr durch die Steilheit des Abfalls und die verschiedene Lage seiner Wendestrecke von einander unterscheiden.

Wenn wir noch auf den Uebergang des Gipfels zum Abfall achten, so ergibt sich, dass dieser um so später eintritt, je grösser die Reizintensität ist, d. h. also auch, je früher der aufsteigende Curventheil in den Gipfel übergeht. Demnach muss die Breite des Gipfels mit der Reizintensität zunehmen. Was die Krümmung selbst betrifft, so nimmt sie analog der Steilheit des ersten Schenkels des abfallenden Curventheiles zu und ab.

Wir können also in der Veränderung der Curven durch die Reizintensität drei grosse Abschnitte unterscheiden. Zuerst nimmt die Höhe, die Länge und Steilheit des Anstiegs und Abfalls progressiv mit der Intensität des Reizes zu. Dies ist das erste Stadium. Dann wächst die Höhe der Curve verhältnissmässig wenig, die Steilheit des Anstiegs und die Breite des Gipfels nimmt aber noch zu, die Steilheit des Abstiegs dagegen ab. Dies ist das zweite Stadium. Im letzten Stadium unterscheiden sich die Curven nur mehr durch ihre Länge und die Verflachung des Abfalls.

Nicht uninteressant ist ein Vergleich zwischen Anstieg und Abfall bei den einzelnen Curven, wobei eine gewisse Uebereinstimmung zwischen beiden nicht zu leugnen ist. Sie nehmen beide, anfangs wenigstens, in Bezug auf ihre Steilheit wie auf die Krümmung der Wendestrecken in ähnlicher Weise zu. Erst

bei den höheren Intensitäten nahe dem Maximalreize beginnt die Verflachung des Abfalls, während die Steilheit des Anstiegs noch weiter zunimmt. Trotzdem ist von Anfang an schon ein Unterschied zwischen denselben bemerkbar, indem bei niederen Intensitäten der Abfall constant steiler ist wie der Anstieg, eine Differenz, die sich in der Folge gerade umkehrt. Es muss also die Geschwindigkeit des letzteren viel rascher zunehmen, als die des absteigenden Curventheiles.

An der Figur 15 auf Taf. II lässt sich diese Veränderung der Summationscurve unter dem Einflusse der Reizintensität sehr schön verfolgen, die maximale Intensität ist in diesem Beispiele wahrscheinlich bei $E = 68$ schon erreicht. Ein ganz ähnliches Resultat liefert die Reihe auf Figur 16 dieser Tafel, die an dem nämlichen Hunde N nur bei einem grösseren Intervalle ausgeführt ist. Die Maximalintensität liegt hier erst bei 111 Einheiten, ist also ziemlich verschieden von der in Figur 15. Es lassen sich auch beide Reihen, trotzdem sie an dem gleichen Hunde ausgeführt sind, nicht direct vergleichen, da die Hebelgeschwindigkeit an dem Reizinstrumente verschieden war.

Auf Figur 14 von Tafel II ist besonders die Entwicklung der Curven für höhere Intensitäten schön zu sehen, indem von der Reizstärke $E = 50$ an die Curvenänderung hauptsächlich auf den abfallenden Theil sich beschränkt.

Aus diesen Beispielen ist ersichtlich, dass mit der Stärke des Reizes die Curvenform eine complicirtere wird. Bei einfacher Summirung sollten für jede Grenzcurve Abfall wie Anstieg die nämliche Gestalt besitzen, was, wie schon bemerkt, selbst bei geringen Reizstärken nicht der Fall ist. Der Unterschied wird aber um so grösser, je höher die Reizintensität ist. Die Ursache dieser Abweichung wird sich erst erkennen lassen, wenn wir den Einfluss der Reizstärke bei submaximaler Reizanzahl, besonders auf die Einzelcurve, betrachten werden. Es lässt sich übrigens aus den vorliegenden Summationscurven schon der Schluss ziehen, dass wenigstens die mittleren Einzelcurven mit der Reizstärke an Höhe, Länge und Steilheit zunehmen, und zwar, wie die Summationscurven selbst, anfangs mit zunehmender, dann abnehmender Geschwindigkeit.

Gehen wir noch auf den Totaleffect der Reizung ein, so zeigt sich, dass er ebenfalls mit der Reizstärke bis zum Maximalreize zunimmt. Für die angeführten Curvenreihen habe ich

folgende Zahlen als Gesammtmenge der überzähligen Pulse erhalten:

Versuch *N*

Reizgrösse in Schlitteneinheiten	Reizzahl	Ueberzählige Pulse für die ganze Reizung	Ueberzählige Pulse für $r = 1$ im Mittel
	Intervall = 0.18″		
4.9	115	3.20	0.028
6.6	171	20.76	0.121
9.3	110	36.08	0.328
14.0	110	53.41	0.486
26	111	75.92	0.684
47	112	91.15	0.814
68	112	101.61	0.907
	Intervall = 0.39″		
4.4	50	1.39	0.027
4.9	51	3.05	0.060
6.6	64	8.40	0.131
9.3	52	22.40	0.431
20	52	45.60	0.880
33	52	54.00	1.040
68	51	74.95	1.470
111	51	80.62	1.580

Versuch *U*

Reizgrösse in Schlitteneinheiten	Reizzahl	Ueberzählige Pulse für die ganze Reizung	Ueberzählige Pulse für $r = 1$ im Mittel
	Intervall = 0.12″		
5	257	0.15	0.0
15	257	35.95	0.140
25	276	70.85	0.257
48	260	81.25	0.313
100	258	91.10	0.360
200	257	104.65	0.407
300	258	103.25	0.400

Um den Begriff des Maximalreizes sicher zu stellen, füge ich noch einige Zahlen des Versuches *O* bei dem Intervalle = 0.12″ hinzu:

Einheiten:	Ueberzählige Pulse:
287	66.86
362	66.14
536	66.20

Solche Beispiele könnte ich noch verschiedene anführen, doch mögen diese genügen, da ohnehin später noch Gelegenheit sein wird, darauf zurückzukommen.

Die angeführten Zahlenwerthe sind allerdings nicht vollkommen richtig, indem nicht für alle Curven das Ende der Reizwirkung vollständig vorlag. Ich habe mir aber in der Weise geholfen, dass ich die Curvenabschnitte anderer Reihen zu Hülfe nahm.

Dieses Verfahren ist allerdings, wie aus der Curvengestalt hervorgeht, nicht ganz correct, da mit der Reizgrösse der zweite Schenkel des Abfalles, um den es sich immer nur handelt, ebenfalls sich ändert; die Fehler, die ich dabei machen konnte, sind aber doch nur geringe, weil das fehlende Curvenstück

überhaupt nur klein, und weil für ähnliche Reizgrössen die Differenz analoger Curventheile gleichfalls nicht bedeutend ist. Ein weiterer Fehler, der aber noch weniger ins Gewicht fällt, ist, dass die einzelnen Abschnitte nicht bei vollkommen gleicher Reizanzahl gewonnen sind. Da, wie schon erörtert wurde, mit zunehmender Reizanzahl der entsprechende Zuwachs immer kleiner wird, so muss die aus einer grösseren Reizanzahl gewonnene mittlere Gesammtwirkung für 1 *r* auch kleiner ausfallen.

Aus den obigen Zahlen ergiebt sich das nämliche Resultat, wie aus den Curven selbst, dass der mittlere Werth *eines* Reizes mit der Intensität constant zunimmt, bis die maximale Intensität erreicht ist.

Werden die obigen Zahlen in Curvenform aufgetragen, und zwar die Stärke des angewandten Reizes als Abscisse, die auf einen mittleren Reiz treffende überzählige Pulsmenge als Ordinate (Figur 17, Tafel II), so zeigt sich, dass eine solche Curve sehr bald ihre Maximalsteilheit erreicht, um dann ganz allmählich der Geraden sich zu nähern. Die Grösse der Veränderung nimmt also nicht proportional der Reizintensität zu, sondern wächst nach einer kurzen raschen Zunahme immer langsamer, bis sie bei maximaler Intensität = 0 wird.

Zum Verständniss der Curven in Figur 17 sei noch erwähnt, dass die Resultate der Versuche *N* und *U* nicht direct vergleichbar sind, da sie an verschiedenen Thieren gewonnen wurden. Sie könnten allerdings vergleichbar gemacht werden, wenn man für jeden Versuch den wahren Maximalreiz = 100 setzen würde, was aber an der Schwierigkeit scheitert, die Grenze der Maximalintensität zu bestimmen, indem die Resultate einer Reizung erst nach Ausführung der Versuche durch genaue Rechnung erhalten werden können.

Ein solcher Vergleich würde aber auch nur über die Abhängigkeit einer Reizung von der Erregbarkeit des nervösen Apparates etwas aussagen können, was vorläufig ausserhalb des Rahmens meiner Untersuchung lag.

c) Einfluss der Reizintensität bei submaximaler Anzahl von Reizen.

Nachdem sicher gestellt ist, dass mit der Intensität des Reizes die Reactionscurve, wenigstens bei maximaler Reizanzahl, sich in gesetzmässiger Weise ändert, frägt es sich, ob

diese Aenderung bei jeder Reizanzahl gleichmässig auftritt, oder ob auch sie nach der Reizanzahl variabel ist, d. h. ob die nämliche Differenz in der Reizintensität auf Summationscurven ungleicher Reizanzahl verschieden einwirkt.

Leider ist es mir nicht möglich, die einzelnen Stadien der Veränderung, welche die Summationscurven durch die Reizintensität erleiden, an dem gleichen Intervalle auf obige Frage zu prüfen. Nachdem aber der Zusammenhang zwischen Reizintensität und überzähliger Pulszahl eine so grosse Gesetzmässigkeit zeigt, wird eine Verallgemeinerung der Resultate wohl thunlich sein.

In den Figuren 18—20 auf Tafel II und auf Tafel III habe ich Beispiele gegeben über den Einfluss der Reizintensität auf die Curvenentwicklung nach der Reizanzahl. Die Curven sind sämmtlich aus dem Versuche *Y* an dem nämlichen Hunde gewonnen, nach ihrem wahren Anfange corrigirt und in derselben Weise wie die früheren wiedergegeben. Die Curven gleicher Farbe gehören *einer* Reizintensität, und diejenigen gleicher Zeichnung der nämlichen oder wenigstens einer nahe liegenden Anzahl von Reizen an.

Figur 20, Tafel III zeigt Reihen des Intervalles 0.42 und zwar bei den Intensitäten 300, 377 und 464 Einheiten. Die Reizintensität von 464 Einheiten ist noch nicht ganz maximal, das Maximum lag erst bei 509 *E*. Wir haben also hier Versuchsreihen vor uns, die ungefähr dem ersten Stadium der Entwicklung[1]) entsprechen, was sich an der mit dem Gipfelwachsthum zunehmenden Steilheit des Anstiegs und Abfalls erkennen lässt, so dass die Gipfel der Summationscurven gleicher Reizanzahl nahezu senkrecht über einander liegen. Denken wir uns die Curvenreihe von $E = 464$ noch bis zu 40 *r* erweitert, so ergibt sich für die von der Reizgrösse abhängige Veränderung ein Bild, wie es z. B. in Figur 15, Tafel II bei Versuch *N* Int. = 0.18 für die ersten 14 *E* erhalten wurde. Es nehmen also die Summationscurven bei jeder Reizanzahl mit der Reizintensität in ihrem ganzen Umfange zu.

Betrachten wir jede Reihe für sich gesondert in ihrer Abhängigkeit von der Reizanzahl, so lässt sich an ihnen dieselbe Entwicklung erkennen, wie sie schon früher festgestellt wurde.

1) Siehe S. 236.

Wenn wir dagegen die Summationscurven gleicher Reizanzahl aber verschiedener Intensitäten mit einander vergleichen, so finden wir sofort, dass dieselben sich mit der Reizanzahl nicht in gleicher Weise ändern. Bei 300 *E* steigt der Gipfel mit zunehmender Geschwindigkeit bis $r = 20$, von da an in langsam abnehmendem Maasse. Ebenso nimmt die Steilheit des Abfalls anfangs zu, von $r = 20$ an aber nur mehr sehr langsam. Bei 377 *E* beginnt die Abnahme des Gipfelwachsthums schon von $r = 10$ an, desgleichen wächst die Geschwindigkeit des Abfalls viel langsamer als bei $E = 300$. Noch gleichförmiger verlaufen schon von den ersten Reizen an die Curven bei $E = 464$. Abgesehen von dem geringen Gipfelwachsthum erscheinen dieselben in ihrem absteigenden Theile nahezu parallel, und beginnt bei $r = 29$ schon eine geringe Verflachung des Abfalls, was bei den übrigen Intensitäten überhaupt nicht nachweisbar ist.

Daraus folgt, *dass die Summationscurven allerdings mit der Intensität zunehmen, aber in einer von der Reizanzahl abhängigen Weise.*

Ganz ähnliche Resultate ergeben auch die andern Beispiele. In Figur 19, Tafel III finden sich Reihen, die einer etwas höheren Intensität entsprechen, ungefähr dem zweiten Stadium. Sie sind mit dem Intervalle 0.20 bei den Reizeinheiten 300 und 377 ausgeführt, welche letztere schon nahezu maximal ist. Die Curven zeigen das Bild, wie es auf Figur 15, Tafel II durch die Reizung mit 26—47 Einheiten hervorgerufen wurde, indem in ihnen der die beiden Schenkel des Abfalls verbindende Wendepunkt schon bedeutend noch oben gerückt ist, eine Verschiebung, welche mit der Erhöhung der Intensität noch fortdauert. Der Grund hierfür liegt darin, dass mit wachsender Reizanzahl wohl die Höhe des Gipfels, aber nicht der erste Schenkel des abfallenden Curventheiles an Länge zunimmt. In dieser Reihe prägt sich nun der Einfluss der Reizanzahl auf die durch die Aenderung der Intensität hervorgerufene Differenz der Summationscurven noch weit deutlicher aus, indem der anfänglich bestehende Unterschied mit Erhöhung der Reizanzahl constant abnimmt, und schliesslich nur mehr eine geringe Differenz in der Lage des Gipfels und des Wendepunktes im abfallenden Curventheile übrig bleibt.

Noch näher stehen sich die Reihen auf Figur 18, Tafel II. Nur ist zu berücksichtigen, dass hier $E = 377$ schon übermaxi-

mal ist, weshalb die Aenderung der Summationscurve durch die Steigerung der Intensität von 300 E auf 377 E nur mehr sehr klein sein kann. Während der Unterschied bei einer kleinen Reizanzahl noch ziemlich bedeutend ist, verschwindet er für die höheren Summationscurven fast vollständig, so dass die höchsten Curven sich beinahe decken.

Es geht aus diesen Beispielen hervor, dass die Reizintensität auch auf die Entwicklung der Summationscurven nach der Reizanzahl von grossem Einfluss ist, und dass die Aenderung, welche die Curven von maximaler Reizanzahl bei dem Wechsel der Intensität erleiden, nicht auf die bei verschiedener Reizanzahl gewonnenen Curven entsprechend dieser Reizanzahl sich vertheilt, sondern erst im Laufe der Summation sich ausbildet. *Dass die Einzelcurve eine Function der Reizintensität ist, war von vornherein anzunehmen; aus obiger Thatsache geht aber hervor, dass diese. Function nach der Reizanzahl variabel sein muss.* Ich will nun die Gesetzmässigkeit dieser Abhängigkeit darzulegen suchen.

d) Die Einzelcurve in ihrer Abhängigkeit von der Reizintensität.

Die Einzelcurven, welche ich in Figur 21—23 auf Tafel III anführe, sind in gleicher Weise gewonnen wie die früheren, und zwar aus den Summationscurven der Figuren 18—20, Tafel II und Tafel III, denen ich noch eine weitere in Figur 24 auf Tafel III angefügt habe. Gleiche Farben bedeuten auf ihnen wieder, wie bei den Summationscurven, gleiche Intensität; der Unterschied in der Zeichnung soll die verschiedene Reizanzahl wiedergeben.

Figur 23, Tafel III entspricht den Summationscurven auf Figur 20 derselben Tafel. Die eine dieser Reihen, nämlich die der Intensität $E = 300$, habe ich schon bei Besprechung der Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl angeführt. Was uns an dieser Stelle interessirt, ist, dass die Einzelcurven bis zum zwanzigsten Reize gleichmässig an Umfang zunehmen, ohne sich in ihrer Form wesentlich zu unterscheiden. Von $r = 20$ an beginnt die rückläufige Bewegung, in Zusammenhang mit der schon früher erwähnten Umgestaltung der Curvenform.

An der zweiten Reihe, die bei der Intensität $E = 377$ ge-

wonnen wurde, lässt sich derselbe Zusammenhang zwischen der Form der Einzelcurve und der Reizzahl nachweisen. Die Einzelcurven nehmen anfänglich zu, um von einer bestimmten Reizzahl an ganz allmählich der Grenzcurve sich zu nähern. Ganz dasselbe findet auch bei der Intensität 464 statt.

Es ändert sich also, wie es schon früher ausgesprochen wurde, die Einzelcurve in ganz bestimmter Weise mit zunehmender Reizzahl, sie ist also eine Function derselben, und zwar bei jeder Intensität.

Wenn wir die Einzelcurven der verschiedenen Reihen mit einander vergleichen, so erhalten wir den Einfluss der Reizintensität auf die Einzelcurve. Dabei ergibt sich, dass dieselben mit der Grösse des Reizes in ihrem Umfange zunehmen. Während aber die Curven der niederen Reizzahlen (1—10) sehr bedeutend wachsen, und zwar ohne ihre Gestalt viel zu ändern, sind die Grenzcurven nur mehr sehr wenig verschieden, hauptsächlich in Bezug auf ihre Länge und Verflachung des zweiten Schenkels im abfallenden Curventheile. Es geht dies wenigstens aus dem Vergleich der mittleren Einzelcurven für $r = (30—40)$ bei den Intensitäten $E = 300$ und $E = 377$ hervor.

Leider habe ich für die Intensität $E = 464$ keine analoge Curve anzugeben. Es lässt sich aber doch aus der Differenz der Curven (10—19) und (19—29) entnehmen, dass auch für diese Intensität die Grenzcurve nicht viel von den anderen abweichen kann.

Da nun die Curven der niederen Reizzahlen mit der Intensität zunehmen, die Grenzcurven aber von ihr nahezu unabhängig sind, so muss die rückläufige Bewegung, welche die Entwicklung der Einzelcurve mit steigender Reizzahl erfährt, um so bedeutender sein, je mehr die Einzelcurven anfangs zugenommen haben, d. h. je grösser die Reizintensität war.

Es bleibt uns noch zu untersuchen übrig, wie die Einzelcurve, als Function der Reizzahl aufgefasst, mit der Intensität sich ändert. Wir haben schon bemerkt, dass bei der Intensität 300 die Curven bis $r=20$ zunehmen, dass dagegen die rückläufige Bewegung bei der Intensität 464 an der mittleren Einzelcurve $r = (10—19)$ schon sichtbar ist. Daraus ergiebt sich der Satz:

Die Entwicklung, welche die Einzelcurve abhängig von der Reizzahl durchmacht, ist insofern eine Function der Intensität,

als sie mit zunehmender Reizgrösse rascher sich vollzieht, indem die Einzelcurven einestheils rascher mit der Reizzahl wachsen, aber auch entsprechend früher ihre rückläufige Bewegung beginnen. Daher kommt es auch, dass die Curven der Intensitäten 300 und 464 an einer bestimmten Stelle, bei der mittleren Einzelcurve $r = (10-19)$ resp. $(9-20)$, sich nähern, um dann wieder bei $(19-29)$ resp. $(20-30)$ weiter auseinander zu treten. Zugleich möchte ich noch hervorheben, dass in dieser Reihe die mittleren Einzelcurven bis zur Grenzcurve bei den höheren Intensitäten auch grösseren Umfang besitzen.

Auf Figur (22), Tafel III finden sich die Einzelcurven, welche den Summationscurven der Figur (19), Tafel III angehören. Ich habe ihnen nur noch eine weitere Reihe von der Intensität $E = 464$ als dem maximalen Reize hinzugefügt. Diese Reihe ist mit den beiden andern nur unter Vorbehalt vergleichbar, indem ihre Summationscurven von einer andern normalen Pulszahl aus gerechnet sind. Da aber hierdurch nur die bei geringer Reizzahl erhaltenen mittleren Einzelcurven verändert werden, und es sich hier nicht um absolute Werthe der Curven, sondern hauptsächlich um deren Veränderung mit der Reizzahl handelt, habe ich dieselbe doch angereiht.

Aus den Reihen habe ich solche mittlere Einzelcurven weggelassen, welche zum weiteren Verständniss nichts beitragen. Es fehlt in der Reihe $E=300$ die mittlere Einzelcurve $(30-40)$. Sie würde gerade in die Mitte zwischen $r = (19-30)$ und $r = (40-51)$ zu liegen kommen. Bei $E=377$ fehlt die mittlere Einzelcurve $r=(29-40)$, und liegt dieselbe etwas über der Einzelcurve $r=(40-48)$. In der Reihe $E=464$ ist $r=(30-39)$ weggelassen, dieselbe fällt nahezu zusammen mit $r=(39-99)$.

Aus all' diesen Curven ergibt sich wieder das nämliche Resultat, was wir schon aus Figur 23, Tafel III erhalten. Die Entwicklung der Curven nach der Reizzahl verläuft bei allen Intensitäten in analoger Weise. Die Curven der niederen Reizzahlen nehmen mit der Intensität zu, wie sich aus dem Vergleich der Reihen $E = 300$ und $E = 377$ ergibt. Die Reihe 464 ist hier gerade, aus dem vorher erwähnten Grunde, nicht in Rechnung zu ziehen. Ebenso sind die Grenzcurven sehr wahrscheinlich bei allen Intensitäten nahezu gleich. Die Einzelcurven $r=(40-51)$ und $(40-48)$ sind allerdings noch keine Grenzcurven, weichen aber, wie sich aus dem Vergleich mit $r=(39-99)$ ergibt, nicht

weit von denselben ab. Nur der Beweis über die verschiedene Geschwindigkeit der Curvenentwicklung bei den einzelnen Intensitäten ist gerade an dieser Reihe schwerer zu erbringen. Es lässt sich aber doch, wenn wir die mittleren Einzelcurven der höheren Reizzahlen betrachten, noch Verschiedenes aus ihnen entnehmen. Die mittlere Einzelcurve $r = (20 - 30)$ ist nämlich bei allen Intensitäten nahezu gleich hoch, und weist sogar die Curve der kleinsten Reizgrösse $E = 300$ den höchsten Gipfel auf, wenn auch die Längen der Curven immer noch mit der Intensität zunehmen. Noch mehr interessiren die mittleren Einzelcurven $r = (40 - 50)$, da hier der höchste Gipfel auf die der kleinsten Reizgrösse angehörige Curve fällt, welche überhaupt mit Ausnahme ihrer Länge die anderen überragt; denn auch die der Reihe $E = 464$ angehörige Curve $r = (30 - 39)$ liegt unterhalb derselben und fällt mit der Grenzcurve $r = (39 - 99)$ nahezu zusammen.

Während also bei der ersten Gruppe der Einzelcurven die Curven hoher Intensitäten in ihrer ganzen Ausdehnung die der anderen überragen, gibt es in dieser Reihe eine Reizzahl, mit der die Einzelcurven höherer Reizgrössen unter die der kleineren herabsinken. Dies ist auch ein Beweis für die vorher ausgesprochene Behauptung, dass die Geschwindigkeit der Curvenentwicklung nach der Reizzahl von der Intensität abhängt. Diese Reizzahl, bei der die Curven der höheren Intensitäten unter die der niederen herabsinken, liegt sehr wahrscheinlich zwischen $r = 20$ und $r = 30$.

Die nämlichen Thatsachen lassen sich aus den Curven der Figur 21, Tafel III entnehmen, welche den Summationscurven von Figur 18, Tafel II entsprechen und kann mit ihnen besonders der Beweis erbracht werden, dass die Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl von der Intensität abhängig ist, durch Vergleich der mittleren Einzelcurven $r = (10 - 20)$ resp. $r = (11 - 19)$ bei der Intensität $E = 300$ mit $E = 377$. Denn die Curve der höheren Reizgrösse $E = 377$ hat schon ganz die Form der rückläufigen Bewegung angenommen, ist auch viel tiefer gesunken, wie die der kleineren Intensität angehörige Curve. Auch die Grenzcurven sind wieder nahezu identisch, obgleich sie nicht den nämlichen Reizzahlen entsprechen, da die eine die mittlere Einzelcurve von $r = (41 - 101)$, die andere von $r = (49 - 201)$ vorstellt. Die wahren Grenzcurven müssen also

einander noch viel näher stehen, als es hier zum Ausdruck kommt. Jedenfalls geht aber aus dieser Gruppe hervor, dass die Einzelcurven der verschiedenen Intensitäten in ihrer Entwicklung sich wieder an einer bestimmten Stelle kreuzen, und zwar liegt in diesem Beispiele der Kreuzungspunkt um Vieles höher wie vorher, d. h. ganz an dem Anfange der rückläufigen Bewegung zwischen $r = 10$ und $r = 20$.

Ich habe noch ein weiteres Beispiel in Figur 24, Tafel III eingeschaltet, mit zwei Reihen von Einzelcurven bei den schon höheren Intensitäten $E = 273$ und $E = 300$, für welche ich die Summationscurven weggelassen, weil an ihnen nichts Weiteres zu sehen ist. Die Reihen sind dem Versuche X entnommen und sind mit dem Intervalle von 0.20 Sec. ausgeführt. Ich wähle gerade dieses Beispiel, weil hier an der wichtigsten Stelle der Curvenentwicklung eine weitere mittlere Einzelcurve eingeschoben ist, so dass gerade diese Reihen ein schönes Bild von der ungleichen Entwicklung der Curven bei den einzelnen Intensitäten gewähren. Die Einzelcurven der Reihe $E = 273$ nehmen bis zur Curve $r = 19$, die der Reihe $E = 300$ bis $r = 15$ zu. Auch hier ist also die Entwicklung bei der höheren Intensität eine viel raschere, weshalb auch anfangs der Unterschied zwischen den Curven beider Reihen mit der Reizzahl zunimmt. Dafür tritt die rückläufige Bewegung bei ihr früher auf, so dass die Differenz der Curven immer mehr verschwindet, und sogar negativ wird, wenn die mittlere Einzelcurve $r = (20—41)$ bei der höheren Intensität unter die der niederen herabsinkt.

Fügen wir nun die bei den verschiedenen Intervallen erhaltenen Resultate zu einem Ganzen zusammen, so erhalten wir als Ausdruck für die Abhängigkeit der Einzelcurve von der Reizintensität folgendes Gesetz:

Die Einzelcurven nehmen mit der Intensität des Reizes im Allgemeinen zu. Doch bezieht sich diese Zunahme hauptsächlich auf die Einzelcurven der niederen Reizzahlen, während die Grenzcurven der verschiedenen Intensitäten nahezu identisch sind. Dadurch ändert sich mit der Reizgrösse die Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl in der Weise, dass sie mit steigender Reizzahl um so mehr zunimmt, aber auch um so tiefer wieder sinkt, je höher die Intensität ist.

Mit der Reizgrösse ändert sich aber auch der Gang der Entwicklung, indem die Einzelcurven mit zunehmender Intensität ihr

Maximum früher erreichen, und mit grösserer Geschwindigkeit ihrer Grenzcurve sich nähern.

Während also bei mittleren Reizgrössen die Einzelcurven der grösseren Intensität in ihrem ganzen Umfange die der kleineren überragen, tritt durch diese Verschiebung in der Curvenentwicklung bei stärkeren Reizen der Fall ein, dass die Curven der höheren Intensitäten unter die der kleineren herabsinken, und zwar um so früher, je grösser der angewendete Reiz ist.

Es ist demnach, was wir schon aus den Summationscurven geschlossen, die Einzelcurve eine Function der Intensität, aber auch die Veränderung der Einzelcurven nach der Reizzahl in Bezug auf die Intensität variabel, und lässt sich aus ihr schon erkennen, ob die bei einer Reizung angewandte Intensität hoch oder niedrig gewesen ist.

Mit Hülfe des obigen Gesetzes lassen sich die Aenderungen, welche die Summationscurven mit zunehmender Intensität erleiden, leicht erklären. Da die von der Reizintensität bedingten Differenzen der Einzelcurven mit wachsender Reizzahl abnehmen, müssen auch die Unterschiede der Summationscurven mit letzterer sich verringern, und zwar um so rascher, je grösser die Intensitäten sind, bei denen sie gewonnen wurden, indem in diesem Falle auch die raschere Annäherung an die Grenzcurve ihren Einfluss ausübt.

Ebenso lässt sich die Entwicklung, welche Curven maximaler Reizanzahl mit der Intensität erleiden, auf die bei den verschiedenen Reizgrössen ungleich verlaufende Veränderung der Einzelcurven zurückführen. So lange die Einzelcurven, wie dies bei den niederen Reizgrössen der Fall ist, mit der Reizzahl nahezu gleichmässig sich ändern, müssen dies auch die Summationscurven maximaler Reizanzahl thun. Sobald aber die Einzelcurven der niederen Reizzahlen verhältnissmässig höher steigen, und rascher wieder fallen, nimmt bei der Summationscurve die Steilheit des Anstiegs gegenüber der Gipfelhöhe zu, so dass die Maximalhöhe auch früher erreicht wird. Nähert sich aber die Intensität dem Maximum, bei dem die den höheren Reizzahlen angehörigen Einzelcurven unter die der geringeren Intensität herabsinken, und sich zuletzt nur mehr durch ihre ungleiche Länge auszeichnen, muss auch der Abfall der Summationscurve bei ungefähr gleicher Maximalhöhe an Steilheit abnehmen.

e) Der Einfluss der Intensität auf die Gesammtwirkung einer Reizung.

Wir haben schon kennen gelernt, in welcher Weise sich bei maximaler Reizanzahl die Gesammtwirkung mit der Reizintensität ändert. Nachdem wir aber wissen, dass dieser Einfluss je nach der Reizdauer ein wechselnder ist, wäre noch zu untersuchen, ob das Nämliche auch für die Gesammtwirkung Geltung hat. Da die Einzelcurven mit der Reizzahl sich ändern, so wäre es, um vergleichbare Resultate zu erhalten, nothwendig, die Gesammtwirkung der einzelnen Reizungen bei gleicher Reizdauer zu kennen, was durch den Versuch direct nicht gegeben war. Ich half mir aber in ganz ähnlicher Weise, wie schon früher, indem ich die Gesammtmenge der überzähligen Pulse von den durch das Experiment gewonnenen Curven auf ein Millimeterpapier übertrug, und zwar die Reizzahlen als Abscissen, die dazu gehörigen überzähligen Pulse als Ordinaten, und die so erhaltenen fixen Punkte durch eine Curve verband. Solche Curven finden sich z. B. in Figur 31, Tafel IV, und kann man aus ihnen die wahrscheinlichen Werthe für Summationen gleich langer Reizdauer direct entnehmen. Auf diese Weise sind die Curven auf Figur 28—30, Tafel IV entstanden. Die Reizgrössen sind hier als Abscissen aufgetragen. Die dazu gehörigen Ordinaten bedeuten die den entsprechenden Summationen zukommende Gesammtwirkung, ausgedrückt durch den auf einen Reiz treffenden mittleren Werth. Die in gleicher Art gezeichneten Linien gehören Summationscurven gleicher Reizanzahl an.

Was uns an diesen Curven vor Allem interessirt, ist ihre Veränderung mit zunehmender Reizdauer. Da in Figur 29 die Curven nicht bis zur Maximalintensität fortgeführt sind, in Figur 28 aber eine Curvenentwicklung bis zu dieser sich vorfindet, so wollen wir uns beide Reihen zusammengefügt denken. Daraus ergiebt sich, dass die nach der Intensität des Reizes sich richtende Veränderung der Summationscurven bei jeder Reizanzahl eine ganz ähnliche Curve beschreibt, wie sie für die maximale Reizanzahl aufgestellt wurde, d. h. sie wächst anfangs mit zunehmender, dann abnehmender Geschwindigkeit, bis sie bei dem Maximalreiz auch ihren Maximalwerth erreicht hat. Die Form der Curve ist aber doch je nach der Reizanzahl verschieden. Je grösser die letztere ist, desto eher nimmt die Ge-

schwindigkeit des Anstiegs ab, und desto früher nähert sich die Curve dem Maximalwerthe, bis sie endlich die Form annimmt, wie wir sie für die maximale Reizanzahl schon kennen gelernt haben.

Ganz das nämliche Resultat erhält man für den kleineren Abschnitt auf der Fig. 30 zwischen den Intensitäten $E = 273$ und $E = 300$.

Man sieht daraus, dass der ganze Umfang der Summationscurve d. h. die Gesammtwirkung der Reizung nach dem nämlichen Gesetz, wie die Höhe der Summationscurven sich ändert. Bei gleicher Differenz in der Reizstärke ist der Unterschied zwischen den Summationscurven von kürzerer Reizdauer verhältnissmässig viel bedeutender, als die von längerer. Es lässt sich also an ihnen auch genauer feststellen, ob ein Reiz maximal ist oder nicht.

Aus den vorliegenden Curven liesse sich zugleich die Aenderung erkennen, welche der Umfang der Einzelcurve d. h. die Gesammtwirkung der Einzelreizung mit zunehmender Reizzahl erleidet, und zwar in ihrer Abhängigkeit von der Reizintensität. Dies tritt aber noch viel deutlicher hervor, wenn wir aus den auf Fig. 31, Tafel IV angeführten Curven die Gesammtwirkung der Einzelreize ausrechnen, und die so erhaltenen Zahlen, ganz ähnlich, wie es bei den Curven auf Fig. 11—13, Tafel III geschehen ist, in Curvenform auftragen.

In den Fig. 25—27 der Tafel III sind solche Curven wiedergegeben. Sie entsprechen, wie aus der Bezeichnung ersichtlich ist, den Einzelcurven auf Fig. 21—23 der gleichen Tafel. Die Reihen *einer* Figur sind bei gleichem Intervalle gewonnen. Die über einander liegenden Curven unterscheiden sich also nur durch ihre Reizintensität.

Was allen Curven gemeinsam ist und was wir schon bei der Besprechung der Einzelcurven in ihrer Abhängigkeit von der Reizzahl hervorgehoben haben, ist, dass dieselben rasch in die Höhe steigend ebenso rasch auch wieder fallen, um von einem bestimmten Punkte an, dem Wendepunkte, ihrem Grenzwerthe sich zu nähern.

Vergleichen wir die Curven verschiedener Intensitäten, so ergiebt sich, dass dieselben mit steigender Reizgrösse an einem immer höheren Punkte beginnen, und nach einem viel kürzeren Anstieg etwas früher den Gipfel erreichen. Der absteigende

Theil biegt um so später in die Annährungslinie zum Grenzwerth um, je grösser die Intensität ist, während die Grenzwerthe selbst beinahe zusammenfallen. Dadurch muss der erste Schenkel des Abfalls bei ungefähr gleicher Neigung mit der Reizgrösse an Länge zunehmen, der zweite Schenkel dagegen sich verkürzen.

Die Curven kleiner und mittlerer Intensitäten wachsen so ziemlich gleichmässig; je höher aber die Intensität steigt, desto mehr ändern sie ihre Form, sowohl weil der Gipfel früher eintritt, wodurch die schon sinkende Curve eine noch emporsteigende berührt; als auch deshalb, weil der Wendepunkt des abfallenden Curventheiles neben seiner seitlichen Verschiebung immer tiefer und tiefer zu liegen kommt, so dass Curven höherer Intensitäten unter die der niederen herabsteigen. Weiter auf die Curvenänderung jetzt schon einzugehen, hat keinen Zweck, indem ein Theil derselben auch von dem verschiedenen Intervalle herrührt. Dieselbe wird also erst dann vollkommen verständlich werden, wenn der Einfluss des Intervalles auf die Summationscurve besprochen ist.

Dagegen lässt sich jetzt schon aus diesen Curven die Folgerung ziehen, *dass die Gesammtwirkung des Einzelreizes sich nach einem ganz ähnlichen Gesetze mit der Reizintensität ändert, wie der Gipfel der Einzelcurve.*

3. Der Einfluss des Intervalles auf die Schlagzahl des Herzens.

Das Intervall muss, auch wenn es die Einzelcurve nicht beeinflusst, die Summationscurven ändern, indem deren Ordinaten, gleiche Reizanzahl und Intensität angenommen, je nach der Grösse des Intervalles aus ganz ungleichen Stücken der Einzelcurve sich zusammensetzen. Es wird dies deutlich werden, wenn ich für zwei verschiedene Intervalle nochmals eine Summation durchführe.

Es liege eine Einzelcurve vor mit den Ordinaten:

$$a_0 \; a_1 \; a_2 \; a_3,$$

entsprechend den Abscissen:

$$i_0 \; i_1 \; i_2 \; i_3,$$

wobei das Intervall zwischen je zwei Abscissen selbstverständlich als gleich angenommen ist.

Wird mit dieser Einzelcurve eine aus vier Reizen bestehende Summationscurve bei dem Intervalle i_0 gebildet, dann wird folgende Reihe erhalten:

$$\begin{array}{l} a_0\ a_1\ a_2\ a_3 \\ \quad a_0\ a_1\ a_2\ a_3 \\ \qquad a_0\ a_1\ a_2\ a_3 \\ \qquad\quad a_0\ a_1\ a_2\ a_3. \end{array}$$

Um aus der nämlichen Einzelcurve wiederum mit vier Reizen eine Summationscurve bei einem andern Intervalle entstehen zu lassen, ist es nothwendig, die Ordinaten der Einzelcurve auch für das neue Intervall zu kennen.

Es sei das neue Intervall n-mal kleiner, als das vorhergehende. Dann sind die dem Intervalle entsprechenden Abscissen:

$$i_0^1\ i_0^2 \ldots i_0^n,\ i_1^1\ i_1^2 \ldots i_1^n,\ i_2^1\ i_2^2 \ldots i_2^n,\ i_3^1\ i_3^2 \ldots i_3^n,$$

wobei $i_0^n = i_0$, $i_1^n = i_1$, $i_2^n = i_2$ und $i_3^n = i_3$.

Die den neuen Abscissen entsprechenden Ordinaten der Einzelcurve sind:

$$a_0^1\ a_0^2 \ldots a_0^n,\ a_1^1\ a_1^2 \ldots a_1^n,\ a_2^1\ a_2^2 \ldots a_2^n,\ a_3^1\ a_3^2 \ldots a_3^n.$$

Wenn wir also im neuen Intervalle i_0^1 eine Summationscurve aus vier Reizen bilden, so erhalten wir folgende Reihe:

$$\begin{array}{l} a_0^1\ a_0^2\ a_0^3\ a_0^4 \ldots a^n \quad \ldots a_3^1 \quad a_3^2 \quad \ldots a_3^n \\ \quad a_0^1\ a_0^2\ a_0^3 \ldots a_0^{n-1} \ldots a_2^n \quad a_3^1 \quad \ldots a_3^{n-1}\ a_3^n \\ \qquad a_0^1\ a_0^2 \ldots a_0^{n-2} \ldots a_2^{n-1}\ a_2^n \quad \ldots a_3^{n-2}\ a_3^{n-1}\ a_3^n \\ \qquad\quad a_0^1 \ldots a_0^{n-3} \ldots a_2^{n-2}\ a_2^{n-1} \ldots a_3^{n-3}\ a_3^{n-2}\ a_3^{n-1}\ a_3^n. \end{array}$$

Die Ordinaten dieser Summationscurve sind also aus ganz anderen Ordinaten der Einzelcurve zusammengesetzt, wie bei der vorhergehenden Curve, da die Einzelcurven nach dem jeweiligen Intervalle verschoben zu der Summationscurve sich summiren.

Mit Rücksicht auf die Entstehungsweise der Summationscurve ergeben sich bestimmte Folgerungen: Die Summationscurve ist bei unveränderter Reizanzahl um so höher, steiler im Anstieg und Abfall, aber auch um so kürzer, je kleiner das Intervall ist, und wird bei letzterem der Gipfel auch früher erreicht.

Das Gleiche hat für die Summationscurve maximaler Reizanzahl Geltung, nur dass hier der Anfang des Gipfels unbedingt auf die nämliche Abscisse fällt, so dass die Maximalhöhe einer

Summation auch bei einer um so kleineren Reizanzahl eintritt, je grösser das Intervall ist.

Dies ist aus dem Vergleiche der beiden obigen Summationscurven leicht zu ersehen. Da die Einzelcurve nur allmählich sich ändert, so muss die Summationscurve, die sich aus den einzelnen Ordinaten dieser Einzelcurve zusammensetzt, um so höher werden, je näher die Ordinaten bei einander liegen, d. h. je kleiner das Intervall ist. Ist z. B. $a_2{}^n = a_2$ die höchste Ordinate der Einzelcurve, so wird $a_2{}^{n-1} > a_2{}^{n-2} > a_2{}^{n-3}$ grösser sein als a_1, da jede einzelne davon der höchsten Ordinate a_2 viel näher liegt. Es muss also auch die Summe dieser Ordinaten die der anderen übertreffen, das heisst mit anderen Worten: Die Ordinaten der Summationscurven sind um so höher, je kleiner das Intervall ist, bei dem sie entstanden sind. Da aber dieser Beweis auch allgemein für jede Ordinate gültig ist, so muss mit der Höhe des Intervalles auch die Steilheit des Anstiegs und Abfalls der Summationscurven zunehmen. Und da die Summationscurve bei Vermehrung der Reizanzahl jedesmal um das Intervall selbst sich verlängert, so muss bei constanter Reizzahl die Curve um so länger sein, je grösser das Intervall ist. Bezeichnen wir die Länge der Einzelcurve mit l, so ist bei dem Intervalle i und der Reizanzahl n die Länge der Summationscurve $L = l + ni$.

L wird also bei constantem n um so grösser, je grösseren Werth i annimmt. Ich habe schon bei Besprechung der Summation im Allgemeinen erwähnt, dass eine Summation ihre maximale Höhe erreicht, wenn ein neuer Reiz mit dem Ende der Einzelcurve zusammenfällt, d. h. wenn die Ordinate der Summationscurve aus allen im Reizintervalle errichteten Ordinaten der Einzelcurve zusammengesetzt ist. Daraus folgt, dass der maximale Gipfel unabhängig vom Intervalle stets auf die gleiche Abscisse fällt, dass aber dieser Gipfel um so höher wird, und einer um so grösseren Reizanzahl entspricht, je kleiner das Intervall ist.

Es ist also mit einem Wechsel im Intervalle, auch wenn die Einzelcurve keine Function desselben ist, eine Aenderung der Summationscurve nothwendig verbunden, und wo ein Summationsvorgang vorliegt, muss auch diese Abhängigkeit zu constatiren sein. Ausserdem erwächst uns aber noch die weitere Frage, ob nicht unter dem Einflusse des Intervalles die Einzelcurve selbst eine Aenderung erfährt.

a) Einfluss des Intervalles auf Summationscurven maximaler Reizanzahl.

α) Bei gleicher Reizintensität.

Wie aus den obigen Sätzen hervorgeht, ist die Aenderung, welche die Grenzcurven, d. h. die Summationscurven maximaler Reizanzahl, mit dem Intervalle erleiden, leicht zu erkennen, weshalb gerade sie sehr gut zur Orientirung in den aufgeworfenen Fragen zu benützen sind. Dabei muss jedoch vorausgesetzt werden, dass die Reizintensität bei dem Wechsel des Intervalles gleich gehalten wird.

Auf Figur 32, Tafel IV habe ich eine Reihe von solchen Summationscurven bei verschiedenem Intervalle wiedergegeben. Die Curven sind dem Versuche *O* entnommen und ohne Correctur abgebildet. Dieselbe Farbe bedeutet hier das gleiche Intervall, die gleiche Art der Zeichnung die nämliche Intensität. Die Reizdauer ist selbstverständlich bei allen gleichlang, und ist das Ende der Reizung durch eine Senkrechte angezeigt.

Vergleichen wir die zusammengehörigen Curven, so finden wir zwischen ihnen Unterschiede, wie es die Verschiedenheit des Intervalles verlangt. Der Gipfel der Curven wird ungefähr zu gleicher Zeit erreicht, und entspricht deshalb auch einer verschiedenen Reizanzahl. Desgleichen nimmt die Höhe des Gipfels und die Steilheit des Anstieges mit dem Intervalle zu. Es ist also unleugbar, dass gewisse Forderungen der Summation erfüllt sind, aber doch nicht alle. Die Curven bei gleicher Intensität sollten nämlich, vom Ende der Reizung an gerechnet, gleich lang bleiben, und zwar gleich der Länge der Einzelcurve; demnach müsste auch das abfallende Curvenstück bei gleicher Reizdauer mit Erhöhung des Intervalles an Steilheit zunehmen, was aber beides durchaus nicht der Fall ist. Die Curvenlänge nimmt im Gegentheil vom Ende der Reizung an gerechnet mit der Grösse des Intervalles ab, die Steilheit des Abfalls mit ihr zu.

Dieser Unterschied liesse sich von der ungleichen Reizanzahl ableiten, der die Curven ihr Zustandekommen verdanken, indem dieselben bei gleicher Reizdauer, und deshalb bei verschiedener Reizanzahl gewonnen sind, die Curven des grösseren Intervalles bei 201, die des kleineren bei 666 Reizen. Es wäre also wohl denkbar, dass die Abweichung beider Reihen

von dieser Differenz in der Reizanzahl herrühre, zumal ja feststeht, dass die Einzelcurve eine Function der Reizzahl ist. Ich habe schon angegeben, dass diese Function einer bestimmten Grenze sich nähert, und dass von der sogenannten Grenzcurve an die Aenderungen nur mehr sehr klein sind. Es muss sich deshalb auch beweisen lassen, dass jener Unterschied nicht von der ungleichen Reizanzahl herrührt. Dazu lässt sich Figur 33 auf Tafel IV benutzen. Die betreffenden Curven sind aus Versuch *L* bei maximaler Intensität gewonnen. Zwei dieser Curven besitzen bei maximaler Reizanzahl gleiche Reizdauer. Die höhere von beiden entspricht dem Intervalle 0.19, ist also eine Summationscurve aus 157 Einzelreizen, die andere dagegen ist bei dem Intervalle 0.39 aus 78 Einzelreizen zusammengesetzt. Vergleichen wir beide Curven, so ergeben sich die nämlichen Resultate wie aus Figur 32. Um nun beurtheilen zu können, inwieweit die ungleiche Reizanzahl an dieser Abweichung von einer einfachen Summation Schuld ist, habe ich noch eine weitere Curve hinzugefügt, die bei dem Intervall 0.19 52 Reizen entspricht, und ebenfalls bei maximaler Intensität gewonnen ist. Ich muss erwähnen, dass $r = 52$ noch keine maximale Reizanzahl ist, dass diese erst bei $r = 65$ erreicht wird. Dennoch ist der Unterschied in der Form der Curven $r = 52$ und $r = 157$ nicht besonders gross, und würde noch kleiner sein, wenn beide maximaler Reizanzahl angehören würden.

Ein Vergleich zwischen den Curven $r = 52$ bei dem Intervall 0.19 und $r = 78$ bei Intervall 0.39 ergiebt aber, dass zwischen beiden ganz ähnliche Differenzen vorhanden sind, wie wir sie vorher zwischen Curven maximaler Reizanzahl erhalten haben. Die Länge der Curven vom Ende der Reizungen an ist auch hier ganz verschieden, und ebenso ist die Geschwindigkeit des Abfalles nicht wie es sein sollte bei dem kleineren, sondern bei dem grösseren Intervalle bedeutender.

Dies beweist, dass auch eine durch das Intervall bedingte Differenz vorhanden ist, welche nicht auf dem Summationsvorgange allein beruht. Diese Abweichung kommt noch deutlicher zum Ausdruck, wenn wir Curven höherer Intensität vergleichen, wie dies in Figur 34, Tafel IV, geschehen ist. Dieselben sind, aus dem Versuche *U* stammend, wieder bei gleicher Reizdauer ausgeführt. Wie bei den früheren Curven sind die gleichen Intervalle mit derselben Farbe, und die gleichen Inten-

sitäten mit derselben Art der Zeichnung wiedergegeben. Wir sehen aus ihnen, dass bei höherer Reizintensität die Unterschiede, wie sie das Intervall erfordert, immer mehr verschwinden, wogegen sich gerade die eben besprochenen Abweichungen von dem einfachen Summationsvorgange immer mehr ausbilden, d. h. die mit der Verkürzung des Intervalls einhergehende Verlängerung der Curve und die Verflachung des Abfalls.

Ich glaube daraus den Schluss ziehen zu müssen, dass eine Summation wirklich stattfindet, da bis zu einem gewissen Grade die Forderungen einer solchen erfüllt sind; dass aber auch wegen der verschiedenen Abweichungen von den Anforderungen einer einfachen Summation eine Beeinflussung der Einzelcurve durch die Grösse des Intervalles, d. h. durch die Schnelligkeit, mit der die einzelnen Reize auf einander folgen, anzunehmen ist.

Wie ist nun dieser Einfluss zu denken?

Es könnte die durch die Reizzahl bedingte Aenderung der Einzelcurve bei den verschiedenen Intervallen anders verlaufen. Es könnte aber auch die Abhängigkeit der Einzelcurve von der Intensität je nach dem Intervalle verschieden sein.

Für beide Annahmen haben wir bestimmte Anhaltspunkte. Wir haben gesehen, dass die Einzelcurve unter dem Einflusse der Reizzahl sich ändert, dass aber diese Aenderung einer Grenze sich nähert, zu einer Zeit, wo die Maximalhöhe der Summationscurve erreicht wird. Da aber dieser Punkt bei kleineren Intervallen auf eine viel höhere Reizzahl fällt, so ist es auch wahrscheinlich, dass diese Aenderung der Einzelcurve bei kleinerem Intervalle viel weiter fortschreitet, als bei grösserem Intervalle. Andererseits beweisen uns die mit der Reizintensität zunehmenden Abweichungen von den Resultaten, wie sie einfache Summationen ergeben würden, dass das Intervall auch auf die Abhängigkeit der Einzelcurve von der Intensität von Einfluss sein muss.

Auf letztere möchte ich zuerst näher eingehen, und zwar an der Hand von Summationscurven von maximaler Reizanzahl.

β) Einfluss des Intervalles auf die Entwicklung der Summationscurven von maximaler Reizanzahl nach der Reizintensität.

Ich möchte, bevor ich auf die Curvenentwicklung nach der Reizintensität eingehe, eine Zusammenstellung von Curven maximaler Intensität aber verschiedenen Intervalles vorführen, weil

sie die schon besprochenen Abweichungen sehr deutlich erkennen lassen.

In Figur 35, Tafel V sehen wir solche Curven aus dem Versuche *U*, die alle bei gleicher Reizdauer erhalten sind. Auch sie sind uncorrigirt, nicht einmal bei gleicher normaler Pulszahl gewonnen, so dass auf kleine Abweichungen kein Gewicht zu legen ist. Mir kommt es nur darauf an, an ihnen die Gesetzmässigkeit der Curvenentwicklung bei Wechsel des Intervalles vorzuführen.

Was zunächst in die Augen fällt, ist, dass mit dem kleineren Intervalle die maximale Intensität stets früher erreicht wird. Sie ist bei:

Intervall =	0.035″	= 100	Einheiten
	0.11	= 200	»
	0.20	= 400	»
	0.67	= 400	»

Die betreffenden Intensitäten sind nicht genau maximal, sie können auch übermaximal sein, da es aus schon früher erwähnten Gründen sehr schwer ist, während eines Versuches genau die maximale Intensität zu bestimmen. Deshalb lässt sich auch aus der Reihe kein weiterer gesetzmässiger Zusammenhang zwischen Intervall und maximalem Reiz erkennen. Dass die Intensitäten aber gewiss nicht submaximal sind, davon habe ich mich durch Vergleich der Curven überzeugt. Und da sich vollständig deckende Curven nicht vorführen lassen, will ich den Beweis dafür in der Weise führen, dass ich die Gesammtmenge der überzähligen Pulse für die einzelnen Intensitäten angebe. Die Zahlen unterliegen den nämlichen Ungenauigkeiten, wie die früher schon angeführten Werthe für die Gesammtwirkung einer Reizung, und habe ich die Ursache davon damals schon klar gelegt. Auch hier sind die Zahlen auf die mittlere Wirkung eines einzigen Reizes umgerechnet.

Reizgrösse in Einheiten der Schlittenscala	Intervall = 0.11″		Intervall = 0.20″		Intervall = 0.67″	
	1 *r* =	Maximal-intensität = 100	1 *r* =	Maximal-intensität = 100	1 *r* =	Maximal-intensität = 100
400 *E*	—	—	0.532	100	0.911	100
300 *E*	0.421	100	0.501	94	0.834	92
200 *E*	0.421	100	0.481	90	0.690	76
100 *E*	0.363	87	0.393	74	0.575	63

Dies heisst also: Bei dem Intervalle 0.11 stimmen die Werthe für 1 *r* schon von 200 *E* an vollständig miteinander überein, bei Int. 0.20 ist $E = 300$ schon nahe maximal, während bei Int. 0.67 die Differenz zwischen 300 und 400 Einheiten noch ziemlich bedeutend ist. Die Verschiedenheit der Maximalintensität tritt noch deutlicher hervor, wenn wir die bei ihr erhaltene Gesammtmenge der überzähligen Pulse = 100 setzen, und das Verhältniss des Totaleffectes der übrigen Intensitäten dazu berechnen.

Es ist somit der Maximalreiz von der Grösse des Intervalles abhängig.

Kehren wir nun zu den Curven auf unserer Figur zurück, so ergibt sich folgendes. Die Maximalcurven steigen bei kleinerem Intervalle steiler empor und erreichen ihr höheres Maximum früher, die Gipfelbreite und die Länge der Curven nimmt zu, während der Abfall flacher wird. Wir erhalten also dasselbe Bild, welches wir schon an einigen Reihen bei der Curvenentwickelung nach der Reizintensität kennen gelernt haben. (Figur 14—16, Tafel II.) Wie dort erreichen wir auch hier eine Grenze, bei der durch weitere Verkleinerung des Intervalles die Steilheit des Anstiegs und die Höhe der Curven nicht mehr geändert wird, sondern nur die Länge derselben und die Verflachung des Abfalls. Dagegen existirt hier keine Grenze, an der die Curven vollständig sich decken, wenigstens nicht bis zu dem von mir untersuchten Intervalle von 0.035 Secunden. Das Gleiche scheint auch der grosse Unterschied in den Curven des Intervalles 0.035 und 0.11 zu beweisen.

Ehe wir auf die Ursachen dieser Verschiedenheit eingehen, müssen wir zuerst klar gelegt haben, in welcher Weise dieselbe mit wachsender Intensität sich ausbildet. Wir haben also die Entwicklung der Summationscurven nach der Reizintensität bei den einzelnen Intervallen näher zu betrachten. Ich habe dafür den Versuch *U* gewählt, mit den Intervallen 0.11, 0.20 und 0.67 Sec. Die betreffenden Reihen finden sich auf den Figuren 14, Tafel II, 36 und 37, Tafel V. Zum besseren Vergleich derselben habe ich die Curven bei gleicher Intensität in der nämlichen Weise gezeichnet.

Jede Reihe lässt für sich die Veränderungen erkennen, die bei einem Wechsel der Intensität des Reizes eintreten, und doch ist zwischen denselben ein grosser Unterschied. Beim Inter-

valle 0.67 nehmen die Curven mit der Stärke des Reizes ganz allmählich zu, zuerst etwas schneller, dann langsamer; aber überall ist noch an allen Stücken der Curve eine Zunahme bemerkbar. Die Curven sehen sich alle ähnlich, und ist eine grosse Gleichmässigkeit in ihrer Entwicklung bis zur maximalen Intensität erkennbar. Die Veränderung bleibt also auf einer frühen Stufe stehen, die ungefähr dem entspricht, was wir früher das erste Stadium der Entwicklung genannt haben.

Bei dem Intervalle 0.20 (Figur 36) verändern sich die Curven ganz ähnlich, wie im vorhergehenden Beispiele, bis ungefähr zur Intensität $E = 50$. Von hier ab werden an den Curven deutlich die Veränderungen sichtbar, die für das sogenannte zweite Stadium als charakteristisch aufgestellt wurden, das heisst, es rückt der Wendepunkt des Anstiegs zum Gipfel beträchtlich nach aussen, wodurch die Steilheit des Anstiegs und die Breite des Gipfels selbst zunimmt. Desgleichen verflacht sich der Abfall und der Wendepunkt zwischen beiden Abfallschenkeln rückt weit mehr nach oben als nach aussen.

Noch früher beginnt diese ungleichmässige Entwicklung der einzelnen Curvenstücke bei dem noch kleineren Intervalle auf Figur 14, jedenfalls schon bei der Intensität $E = 25$. Die Verbreiterung des Gipfels in dieser Curve weist aber darauf hin, dass der Beginn dieser Ungleichmässigkeit wahrscheinlich auf eine noch kleinere Intensität fällt. Deshalb bildet sie sich hier auch weiter aus, so dass wir mit der Intensität $E = 100$ schon das dritte Stadium der Entwickelung vor uns haben, wo die Curven fast nur durch die Verbreiterung des Gipfels, Verflachung des Abfalls, und ihre Längenzunahme von einander sich unterscheiden.

Wir kommen also zu dem Schluss, dass die Summationscurven maximaler Reizanzahl bei kleinen Intensitäten ganz allmälig und regelmässig zunehmen, dass aber mit der höheren Intensität die Aehnlichkeit der Curven um so rascher verschwindet, die Curven um so bedeutendere Umformungen erleiden, und um so eher die Maximalintensität erreicht wird, je kleiner das Intervall ist.

Da also bei kleinerem Intervalle die Curven viel rascher ihre Maximalintensität erreichen, und bei den höheren Intensitäten nur eine ganz einseitige Formveränderung durchmachen, muss auch der Unterschied, den das Intervall zwischen Curven gleicher Intensität bedingt, und der anfangs den Gesetzen ein-

-facher Summation zu folgen scheint, davon mit wachsender Reizgrösse immer grössere Abweichungen erfahren. Es ist uns nun gelungen, die ganze Entwicklung der Curven nach der Reizintensität auf eine eigenthümliche Veränderung der Einzelcurve zurückzuführen, und wird es dadurch sehr wahrscheinlich, dass diese Abweichungen ebenfalls darin ihre Begründung finden.

Ehe ich aber darauf eingehe, möchte ich noch darlegen, welche Aenderung die Summationscurven submaximaler Reizanzahl durch den Wechsel des Intervalles erleiden.

b) Die Summationscurven in ihrer Abhängigkeit von der Reizanzahl und ihre Aenderung durch den Wechsel des Intervalles.

Ich habe in Figur 4 und 5, Tafel I Entwicklungen der Summationscurven nach der Reizanzahl gegeben, die unter sonst gleichen Bedingungen, und nur bei ungleichem Intervalle ausgeführt sind, habe aber damals noch nicht auf die Unterschiede der beiden Reihen aufmerksam gemacht. Es lassen sich nun leicht bei einem Vergleich beider Reihen grössere Differenzen zwischen den einzelnen Curven nachweisen, welche sich zum grossen Theil auf den Wechsel des Intervalles direct zurückführen lassen; so z. B. dass bei gleicher Reizanzahl der Gipfel mit wachsendem Intervalle niederer wird und zeitlich später fällt, dass der Anstieg und Abfall sich abflacht und dass die Maximalhöhe einer geringeren Reizanzahl entspricht, bei dem Intervalle 0.12″ ungefähr 40 Reizen und dem Intervalle 0.10″ 100 Reizen. Gleichwohl lassen sich auch an diesen Reihen Abweichungen vom Summationsgesetze erkennen. So nimmt die Länge der Summationscurve bei gleicher Reizanzahl mit der Grösse des Intervalles ab statt zu, und fällt die Maximalhöhe nicht auf die gleiche Abscisse, sondern tritt bei dem Intervalle 0.10″ in 12.8 und bei 0.12″ in ungefähr 18 Secunden ein. Weitere Differenzen ergeben sich, wenn wir bei beiden Intervallen auf die Entwicklung der Summationscurven nach der Reizanzahl näher eingehen. Bei dem grösseren Intervalle 0.12″ lässt sich anfänglich eine Zunahme, dann allerdings auch eine Abnahme in dem von der Reizanzahl abhängigen Wachsthum der Summationscurven erkennen, aber nur in geringem Maasse. Bei dem

kleinen Intervalle 0.10″ verkleinert sich die Zunahme der Summationscurve schon von $r = 10$ an, zuerst langsam dann schneller, wie dies aus einem Vergleich der Curven von $r = 41$ und $r = 101$ hervorgeht.

Ein ähnlicher Unterschied findet sich im Anstieg und Abfall der Curven beider Intervalle, besonders bei einer grösseren Reizanzahl. Für das grössere Intervall ist der Anstieg kaum steiler wie der Abfall, und wird die Differenz mit steigender Reizanzahl zu Gunsten des Abfalls immer kleiner, bei dem kleinen Intervall dagegen ist der Abfall schon anfangs viel flacher als der Anstieg, welcher Unterschied mit der Reizanzahl noch bedeutend zunimmt.

Zu besserem Vergleiche habe ich in Figur 38 u. 39, Tafel V je zwei Curvenreihen gleicher Intensität aber ungleichen Intervalles über einander aufgetragen. Dieselben sind wieder unter sonst gleichen Bedingungen an dem nämlichen Hunde *Y* gewonnen und in ganz analoger Weise wie die früheren Summationscurven gezeichnet. Gleiche Farben beziehen sich wieder auf gleiches Intervall.

In Figur 38 sind die Intervalle 0.20″ und 0.10″ nicht viel verschieden, weshalb sich auch die Curven leicht vergleichen lassen. Einige Forderungen regelmässiger Summation sind auch hier erfüllt, wie die mit dem Intervalle abnehmende Steilheit des Anstiegs und Höhe des Gipfels. Dagegen finden sich wieder die nämlichen Abweichungen davon, wie in den schon besprochenen Reihen. Aus diesem Beispiele ergibt sich, dass die Unregelmässigkeit um so bedeutender ist, und um so früher eintritt, je kleiner das Intervall ist, welches zur Reizung verwendet wurde. Wir haben aber schon kennen gelernt, dass der Unterschied zwischen Curven gleichen Intervalles mit zunehmender Reizanzahl kleiner wird dadurch, dass das Gipfelwachsthum und die Geschwindigkeit des Abfalls sich vermindert. Deshalb differiren auch Curven gleicher Reizanzahl aber ungleichen Intervalles verhältnissmässig um so weniger, je grösser die Anzahl der Einzelreize gewählt wurde. Noch prägnanter drückt sich dies in den Curven der Figur 39 aus, welche allerdings nicht bei gleicher, aber beide bei maximaler Intensität gewonnen sind.

Wir kommen also auch hier zu dem Schluss, dass nicht alle Forderungen einer regelmässigen Summation erfüllt sind,

und dass die Summation bei den verschiedenen Intervallen in ungleicher Weise verläuft.

Die Differenz, welche sich für Curven maximaler Reizanzahl bei Aenderung des Intervalles ergibt, ist demnach nicht gültig für eine submaximale Reizanzahl, sondern bildet sich erst mit wachsender Reizanzahl aus, ein Zeichen, dass die Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl auch von der Grösse des Intervalles abhängig ist.

e) Einfluss des Intervalles auf die Einzelcurve.

α) Bei gleicher Reizintensität.

Ich habe in den Figuren 9 und 10, Tafel I und II Beispiele für die Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl gegeben, habe aber noch keine Rücksicht auf die Verschiedenheit des Intervalles genommen. Da diese Reihen an dem nämlichen Hunde bei gleicher Reizintensität und überhaupt unter ganz gleichen Bedingungen, nur bei verschiedenem Intervalle gewonnen sind, so lässt sich an ihnen der durch das Intervall bedingte Unterschied in der Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl sehr gut nachweisen.

Auf *eine* Ungleichheit der Curven habe ich schon aufmerksam gemacht. Da nämlich die Einzelcurven mit der Reizzahl allmählich einer Grenzcurve sich nähern, d. h. von einer bestimmten Form an nur mehr minimale Aenderungen durchmachen, so wird sich die ganze Entwicklung nach dieser Grenzcurve richten müssen. Ich habe auch sehr wahrscheinlich gemacht, dass die Grenzcurve mit der Reizzahl ungefähr zusammenfällt, bei welcher die Summationscurve ihre maximale Höhe erreicht. Da nun aber aus den Summationscurven maximaler Reizanzahl direct hervorgeht, dass diese maximale Höhe nahezu bei gleicher Reizdauer eintritt, das heisst also bei grossem Intervalle bei einer kleineren Reizzahl, so ist daraus schon der Schluss berechtigt, dass die Einzelcurve mit zunehmendem Intervalle ihre Grenzcurve früher erreicht, und früher constante Form annimmt.

Dies finden wir auch bei Betrachtung unserer Curvenreihen bestätigt. Bei dem Intervalle 0.42 ändert sich die mittlere Einzelcurve zwischen 20 bis 30 und 30 bis 40 *r* nur mehr sehr wenig, was uns beweist, dass die Grenzcurve nicht viel davon

abweichen kann, und wohl der Reizzahl $r = 40$ entspricht. Es drückt sich dies auch in der Form der entsprechenden Summationscurve aus, und findet seine Bestätigung in der Grenzcurve, die ich aus der Abfallsgeschwindigkeit der Summationscurve $r = 40$ construirt und den anderen Curven dieser Reihe beigefügt habe.

Bei dem Intervalle 0.10″ wäre die maximale Höhe ungefähr bei 100 r erreicht. Es lässt sich also aus der Geschwindigkeit des Abfalles der Summationscurve von 100 r die Grenzcurve ableiten. Wir sehen auch, dass bis zu dieser Grenzcurve die Einzelcurven mit wachsender Reizzahl zuerst schneller, dann allmälig immer langsamer abnehmen.

Je kleiner also das Intervall ist, desto später geht die Einzelcurve mit steigender Reizzahl in die Grenzcurve über.

Ich habe schon früher hervorgehoben, dass die Einzelcurven anfänglich mit der Reizzahl zunehmen, ohne ihre Form zu ändern, und dass erst die rückläufige Bewegung mit einer Aenderung in der Curvengestalt verbunden ist, deren Endresultat die Grenzcurve darstellt. Es gewährt uns also letztere einen Anhaltspunkt über die Grösse dieser ganzen Umwandlung.

Aus dem Vergleich der beiden Curvenreihen in den oben genannten Figuren ergibt sich wieder, dass mit der Zunahme des Intervalles die Grenzcurve nicht allein eine Abnahme in ihrer Höhe, sondern auch eine Verbreiterung ihres Gipfels aufweist, und zwar allein auf Kosten des Wendepunktes zum absteigenden Theile der Curve, während die Zeit, in welcher der Gipfel erreicht wird, nahezu constant bleibt. Fügen wir noch hinzu, dass mit der Verkürzung des Intervalles der erste Schenkel des Abfalles nur wenig, dagegen der zweite bedeutend zunimmt, so ist dadurch die Verschiedenheit in den Grenzcurven charakterisirt.

Die Grenzcurve nimmt also bei kleinerem Intervalle an Höhe constant ab, an Länge zu. Mit der Verbreiterung des Gipfels sinkt auch die Steilheit des Anstiegs und Abfalls.

Die mit der Reizzahl Hand in Hand gehende Formveränderung der Einzelcurve ist bei den Intervallen nicht etwa deshalb nur verschieden, weil dieselbe bei dem grösseren Intervalle wegen des früheren Auftretens der Grenzcurve auf einem früheren Stadium der Veränderung stehen bleibt, sondern es prägt sich die dem Intervalle charakteristische Form der Um-

gestaltung schon viel früher aus, wie sich aus dem Vergleich der Curven $r = 20$ bis 41 in dem Intervalle 0.10″ und $r = 30$ bis 40 in dem Intervalle 0.42″ ergibt. Ja wir können bei dem Intervalle 0.10″ in der mittleren Einzelcurve $r = (10—20)$ schon eine gewisse Aehnlichkeit mit der späteren Grenzcurve erkennen.

Es verläuft also die ganze rückläufige Bewegung je nach der Grösse des Intervalles in einer anderen Weise.

Zur weiteren Betrachtung des Einflusses von der Grösse des Intervalles auf die Veränderung der Einzelcurve habe ich wieder in Figur 40 und 41, Tafel V je zwei Curvenreihen über einander gelegt, welche nur durch das Intervall sich unterscheiden.

In Figur 41 finden sich Curvenreihen des Intervalles 0.10″ und 0.20″, und in Figur 40 von 0.20 und 0.42 mit einander verglichen. Die Curven gleichen Intervalles haben auch hier gleiche Farbe, und die gleicher Reizzahl die nämliche Art der Zeichnung.

Daraus lässt sich, ausser den schon erwähnten Verschiedenheiten, erkennen, dass auch die Curven niederer Reizzahlen sich nicht decken. Sie sind allerdings in der Form einander ähnlich, nehmen aber bei gleicher Reizzahl mit der Höhe des Intervalles in ihrem ganzen Umfange zu. Da die Einzelcurven des ersten Reizes als unabhängig vom Intervalle bei gleicher Reizintensität identisch sein müssen, so ergibt sich die Schlussfolgerung, dass bei kleinem Intervalle die Einzelcurven mit der Reizzahl zuerst rascher anwachsen, aber auch, was aus dem früher schon Besprochenen hervorgeht, wieder rascher sinken. Es muss sich also beim Vergleich der Curvenreihen zweier Intervalle ein Einzelreiz finden lassen, für den die Curven gleiche Höhe besitzen. In dem Intervalle 0.20″ ist z. B. die mittlere Einzelcurve $r = (41 - 51)$ so hoch wie $r = (20 - 40)$ bei Intervall 0.10″ und bei 0.42 hat die mittlere Einzelcurve $r = (30 - 40)$ gleiche Gipfelhöhe wie $r = (19 - 30)$ des Intervalles 0.20″. Man sieht auch an diesen Reihen, und besonders an Figur 40, dass die rückläufige Bewegung in der Entwicklung der Einzelcurven um so rascher beginnt, je kleiner das Intervall ist, denn bei Intervall 0.42 wächst die Einzelcurve noch bis $r = (9 - 20)$, und diese Curve hat noch die Gestalt wie bei $r = (1 - 9)$ beibehalten. Dagegen ist die mittlere Einzelcurve $r = (9 - 19)$ bei dem Inter-

valle 0.20 schon gesunken, und weist gegenüber der Einzelcurve $r=(1-9)$ schon eine bedeutende Formveränderung auf.

Wir kommen also zu dem Schluss, *dass mit der Verkürzung des Intervalles die Veränderung, welche die Einzelcurve mit steigender Reizzahl erleidet, nicht nur entsprechend der Form der Grenzcurve grösser wird, sondern auch rascher sich vollzieht, dass also die Umformung in einer jedem Intervalle charakteristischen Weise auftritt.*

Es wäre eine interessante Frage, diese Verhältnisse nach beiden Seiten, das heisst bei ganz grossen und ganz kleinen Intervallen weiter zu verfolgen. Wir haben gesehen, dass die Differenz zwischen den mittleren Einzelcurven der einzelnen Reizzahlen mit der Grösse des Intervalles immer kleiner wird. Es könnte also von einem bestimmten Intervalle an dieser Unterschied vollständig verschwinden. Nun kann ich darüber einen gewissen Aufschluss wohl geben. Ich habe nämlich eine Summationscurve maximaler Reizanzahl aufzeichnen lassen bei dem Intervalle 1.00″ und einer Reizintensität $E=339$. Dieselbe ist allerdings nicht an dem gleichen Hunde gewonnen, wie die andern hier angeführten Curven; dennoch lassen sich die Resultate, weil auch die übrigen Curven vollständig übereinstimmen, verallgemeinern.

Es ergibt sich von selbst, dass die Einzelcurven gleich sein müssen, wenn der zweite Reiz den nervösen Apparat erst trifft, sobald die Wirkung des ersten Reizes abgelaufen ist. Die Curve, welche ich in Figur 42 abgebildet habe, soll darüber Aufschluss geben, in wie weit die Einzelcurven jedes kleineren Intervalles sich mit der Reizzahl ändern.

In unserer Summationscurve entspricht die maximale Höhe ungefähr 16 Reizen, es fällt also jeder folgende Reiz noch weit innerhalb der Wirkung des vorhergehenden. Aus der Gestalt der Curve und besonders aus dem Vergleiche des Anstiegs und Abfalls lässt sich nun ohne Weiteres der Schluss ziehen, dass wenigstens bis zu dem Intervall 1.00 Sec. eine Veränderung der Einzelcurve mit steigender Reizzahl stattfindet, und zwar muss die Grenzcurve, da die Geschwindigkeit des Abfalls grösser wie die des Anstiegs ist, höher sein, wie die Einzelcurve des ersten Reizes. Auch die trotz der maximalen Reizanzahl noch fortschreitende Erhöhung des Gipfels weist darauf hin, dass eine Veränderung der Einzelcurve erfolgen muss, indem bei ein-

facher Summation der Gipfel parallel zur Abscisse verlaufen würde.

Die Grösse der Veränderung der Einzelcurve lässt sich beurtheilen, wenn wir bei jener Curve aus der Geschwindigkeit des Anstiegs eine für 16 Reize mittlere Einzelcurve und aus der Geschwindigkeit des Abfalls wieder die Grenzcurve construiren. In Figur 43 habe ich beide Curven über einander gezeichnet in dem nämlichen Massstabe wie die übrigen Einzelcurven, wobei die ausgezogene Linie die Grenzcurve darstellt. Der Vergleich dieser Curven berechtigt uns zu dem nämlichen Schluss, den wir schon aus der Gestalt der Summationscurve gezogen, dass auch bei dem Intervalle 1.00″ die Einzelcurve noch mit der Reizzahl sich ändert; die Form unserer Grenzcurve lehrt uns aber noch weiter, dass die rückläufige Bewegung in der Entwicklung der Einzelcurve noch nicht vorhanden ist, oder wenigstens nicht weit fortgeschritten sein kann, indem dieselbe noch keine Verbreiterung des Gipfels und Verflachung des Abfalles aufweist. Es ist dadurch wahrscheinlich gemacht, dass bei grossen Intervallen die Einzelcurven mit der Reizzahl bis zur Grenzcurve wachsen, ohne ihre Form wesentlich zu ändern.

Ich möchte noch kurz auf die mittlere Einzelcurve eingehen, welche aus der Geschwindigkeit des Anstiegs der Summationscurve gewonnen wurde, um den Grund anzugeben, warum sie eine von der Grenzcurve so abweichende Form besitzt. Wir haben bei ihrer Construction vorausgesetzt, dass an ihrem Zustandekommen sich die einzelnen Reize gleichmässig betheiligen. Nun wissen wir aber aus früheren Reihen, dass die Einzelcurven mit der Reizzahl sowohl an Höhe wie an Länge zunehmen, so dass in diesem Falle die mittlere Höhe aus allen Einzelcurven nie so gross sein kann, als die der Grenzcurve. Es kommt aber noch etwas Weiteres in Betracht, was hauptsächlich auch zur Erklärung des breiteren Gipfels und des späteren Abfalls unserer Einzelcurve gegenüber der Grenzcurve dienen kann. Nehmen wir z. B. an, dass in unserem Beispiele die Einzelcurve des ersten Reizes mit 10 Secunden schon die Abscisse erreicht hat, so bestehen die Ordinaten der Summationscurve, die auf den Abscissen 10, 11 .... 16 Sec. errichtet sind, nicht mehr, wie vorausgesetzt, aus einzelnen Stücken von 10, 11 .... 16 Einzelreizen, sondern aus einer entsprechend geringeren Anzahl, d. h. dieser ganze Theil der mittleren Einzelcurve gehört gar nicht

mehr zur Curve des ersten Einzelreizes, sondern baut sich aus Stücken der Curven späterer Reizzahlen auf. Es kommt also diese Verbreiterung des Gipfels dadurch zu Stande, dass der maximale Gipfel der Summationscurve wegen der constanten Zunahme der Einzelcurve mit der Reizzahl später erreicht wird, als dem Ende des ersten Einzelreizes entspricht. Zum weiteren Verständnisse habe ich in Figur 44 eine Summationscurve aus einer Einzelcurve construirt unter der Voraussetzung, dass die Einzelcurve sich allmählich bis zur Grenzcurve ändert. Die Einzelcurve des ersten Reizes ist in *a* dargestellt, die betreffende Grenzcurve in *b*. Ich wollte damit zeigen, wie durch eine allmähliche Aenderung der Einzelcurve mit der Reizzahl solche Abweichungen von einer normalen Summationscurve zu Stande kommen, wie wir sie bis jetzt kennen gelernt haben, und wie sie auch wieder in Figur 42 sichtbar sind.

Es ist nicht schwierig, die grosse Aehnlichkeit in der Form beider Curven in Figur 42 und 44 und besonders die gleichen Abweichungen von einfachen Summationscurven daraus zu erkennen. Bestimmen wir aus Figur 44 die Grenzcurve und die mittlere Einzelcurve aus der Geschwindigkeit des Abfalls und Anstiegs, so erhalten wir die Curven α und β. Eben weil die Summationscurve nach dem Punkte M, welcher bei einfacher Summation den maximalen Gipfel repräsentiren würde, weiter in die Höhe steigt, erscheint die mittlere Einzelcurve α gegenüber der Curve *a* so sehr verlängert, indem wir annehmen, dass die Curve des ersten Reizes an dem ganzen Aufbaue der Summationscurve bis zum Gipfel sich betheiligt. Deshalb ist auch der Anfang der Grenzcurve, die ich aus dem Abfalle der Summationscurve M_1 construirte, nicht ganz mit dem Werthe von *b* übereinstimmend. Je näher aber die Summationscurve ihrem Maximalwerthe kommt, d. h. je geringer durch neue Reize die Curvenform sich ändert, desto mehr muss diese Differenz verschwinden.

Es scheint demnach, als ob bei grösseren Intervallen die Einzelcurven mit der Reizzahl bis zur Grenzcurve anwachsen, und erst bei kleinen Intervallen die schon besprochene rückläufige Bewegung sich ausbildet, welche dann mit abnehmendem Intervall immer grössere Dimensionen annimmt.

Auf diese, jedem Intervalle eigenthümliche Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl lassen sich die Abweichun-

gen, die wir an den Summationscurven gegenüber dem einfachen Summationsgesetze wahrgenommen haben, sehr leicht zurückführen. Bei kleiner Reizanzahl müssen die Summationscurven mit der Verkürzung des Intervalles unverhältnissmässig wachsen, und zwar im ganzen Umfange, da bei dem kleinen Intervalle die Einzelcurven selbst rascher zunehmen. Diese Differenzen werden aber nach und nach sich wieder ausgleichen, indem bei den Curven kleiner Intervalle die rückläufige Bewegung in der Entwicklung der Einzelcurve viel bedeutender ist; wogegen die Länge der Summationscurve mit dem Intervalle weiter wächst, übereinstimmend mit der fortdauernden Verlängerung der Einzelcurven. Weil dieselben bei kurzem Intervalle mit zunehmender Reizzahl kleiner werden, muss auch, gerade entgegengesetzt dem Beispiele in Figur 44, die maximale Höhe der Summationscurve etwas früher erreicht werden, als der Länge der ersten Einzelcurve entsprechen würde. Darauf, und hauptsächlich auf der Verflachung der ganzen Einzelcurve mit Verkürzung des Intervalles, beruht auch die Verflachung des Abstieges der entsprechenden Summationscurve.

β) Einfluss des Intervalles auf die Einzelcurve bei verschiedenen Reizintensitäten.

Weil die Veränderungen, welche Summationscurven maximaler Reizanzahl mit der Reizintensität erleiden, mit den Intervallen wechseln, habe ich daraus geschlossen, dass die Einzelcurve, als Function der Reizintensität aufgefasst, auch variabel nach dem Intervalle sein müsse. Es erwächst dadurch die Aufgabe, das Gesetz dieser Abhängigkeit zu finden.

Unter dem Einflusse der Reizintensität vergrössert sich die Einzelcurve, aber nicht für alle Reizzahlen gleichmässig; die Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl ist also auch von der Reizintensität abhängig, und vollzieht sich um so rascher sowohl in Bezug auf die Zunahme der Einzelcurve wie auf deren Annäherung zur Grenzcurve, je grösser die letztere ist. Ich habe dieses Gesetz nur mit Hilfe verschiedener Intervalle aufstellen können, was insofern unstatthaft ist, als ja das Intervall selbst wieder die Veränderung der Einzelcurve durch die Intensität beeinflusst. Trotzdem wird es sich beweisen lassen, dass dasselbe allgemeine Gültigkeit hat.

Zunächst ist es nothwendig, die Veränderung der Einzelcurve nach der Reizintensität bei den verschiedenen Intervallen gesondert zu betrachten, und zwar mit Hülfe der Figuren 21—23, Tafel III. Ich muss dabei nochmals hervorheben, dass diese Reihen an dem nämlichen Hunde und unter sonst gleichen Bedingungen gewonnen wurden, dass sie also alle unter einander vergleichbar sind. Ich habe nur noch hinzuzusetzen, dass für das Intervall 0.42 die Intensität $E = 464$ beinahe maximal ist, während für das Intervall 0.20 $E = 464$ und für Int. 0.10 $E = 377$ übermaximale Reizgrössen darstellen.

Aus den Curvenreihen geht zunächst hervor, dass die Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl bei den verschiedenen Intensitäten des gleichen Intervalles sehr ähnlich verläuft, was sich am Besten aus den Grenzcurven beurtheilen lässt, deren Höhe und Gestalt beinahe unabhängig von der Reizintensität für jedes Intervall charakteristisch ist. Wir können also den Satz, den wir für grössere Intensitäten schon ausgesprochen haben, dass die Formveränderung, welche die Einzelcurve mit zunehmender Reizzahl erfährt, nur eine Function des Intervalles ist, auch auf alle Intensitäten, soweit sie hier vorliegen, ausdehnen.

Durch die Reizintensität dagegen wird die Grösse der Einzelcurve geändert sowie die Geschwindigkeit, mit der sie die Formveränderung durchläuft, wofür wir schon früher den Beweis bei einzelnen Intervallen liefern konnten. Aber auch in dieser Hinsicht ist die Grösse des Intervalles nicht gleichgültig.

Die Veränderung der Einzelcurve nach der Intensität lässt sich, wie bei den Summationscurven, in drei Stadien zerlegen. Aus den Figuren 21—23 ergibt sich aber auch, dass diese Eintheilung mit verschiedenen Intervallen zusammenfällt. Denn die Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl geht bei dem Intervalle 0.42 auch für die beinahe maximale Intensität $E = 464$ nicht über das erste Stadium hinaus; das heisst, die Einzelcurven der höheren Intensitäten sind in ihrem ganzen Umfange grösser als die entsprechenden der kleineren Reizintensität. Das zweite Stadium ist dadurch charakterisirt, dass die den höheren Reizzahlen angehörigen Einzelcurven durch ihre raschere Annäherung an die Grenzcurve unter die kleinere Intensität herabsinken. Dieses Stadium wird von der Curvenreihe 0.20 bei der höchsten Reizintensität noch erreicht; da-

gegen gehört das dritte Stadium, wo die Einzelcurven schon verhältnissmässig niederer Reizzahlen unter die der kleineren Intensitäten sinken, allein den höheren Intervallen von 0.10 und darüber an.

Ich habe beim Vergleich der Curven gleicher Reizintensität aber verschiedenen Intervalles (Figur 40 und 41, Tafel V) gefunden, dass bei einer Intensität mittlerer Stärke $E = 300$ die Einzelcurven kleineren Intervalles mit der Reizzahl mehr zunehmen, aber sich auch entsprechend wieder verkleinern, so dass sie bei einer bestimmten Reizzahl unter die bei grösserem Intervalle gewonnenen Curven herabsinken. Nach den Resultaten, welche aus den Curvenreihen Figur 21—23 erhalten wurden, lässt sich ferner schliessen, dass mit zunehmender Reizintensität dieser Punkt immer früher eintritt, was sich auch bestätigt findet.

In den Figuren 45, 46, 47, Tafel VI finden sich Curvenreihen höherer Intensität zusammengelegt, die in der nämlichen Weise ausgeführt sind, wie die früheren Figuren. Eine directe Fortsetzung der beiden Curvenreihen auf Fig. 41, Tafel V bildet die Fig. 45, indem auf ihr Curven des nämlichen Intervalles, nur bei einer grösseren Intensität $E = 377$, verglichen sind. Was dabei vor Allem auffällt, ist, dass der Höhenunterschied schon zwischen den Einzelcurven der ersten Reizzahlen (1—10) verschwunden ist, und dass die folgenden Curven wegen ihrer rascheren Annäherung an die Grenzcurve bei dem kleineren Intervalle durchwegs niederer sind. Dies drückt sich auch in den Beispielen Fig. 46 und 47 deutlich aus, wo Curvenreihen maximaler Intensität über einander gelegt sind. Die Curven der verschiedenen Intervalle weisen für die ersten Reize ebenfalls keine Höhendifferenz mehr auf, während die Einzelcurven aller folgenden Reize bei dem grösseren Intervalle durchwegs grösser sind. Die Curvenreihen maximaler Intensität beanspruchen also ein grosses Interesse, weil sie zeigen, dass die Einzelcurven nur bis zu einem gewissen Grade wachsen können, und dass diese Höhe von jedem Intervalle erreicht wird, allerdings bei dem grösseren Intervalle auch erst mit grösserer Reizintensität.

Für die Intervalle von	0.05 Sec. sind	$E = 300$
	0.10 -	377
	0.20 -	464

schon übermaximale Reizgrössen, während für Int. 0.42 $E = 464$ beinahe maximal ist.

Ich bin leider nicht im Stande, auch für niedere Reizgrössen die gesetzmässige Abhängigkeit der Einzelcurve von der Intensität bei den einzelnen Intervallen in gleicher Weise wie für die höheren Intensitäten darzuthun. Es lassen sich aber doch mit Hülfe der Grenzcurven und aus den Veränderungen, welche die Summationscurven maximaler Reizanzahl bei den einzelnen Intervallen mit der Intensität erleiden, Schlüsse ziehen, die uns berechtigen, die Abhängigkeit der Einzelcurve von der Reizintensität überhaupt festzustellen; und so werden sich die Sätze, die ich früher nur aus Curven von verschiedenen Intervallen ableiten konnte, im Allgemeinen als wahr erweisen.

Ich habe schon vielfach darauf aufmerksam gemacht, dass gerade die Grenzcurve zu mancherlei Schlussfolgerungen berechtigt, indem sich in ihr die Maximalveränderung darstellt, welche die Einzelcurve mit steigender Reizzahl erleiden kann. Wenn wir also aus der Summationscurve von maximaler Reizanzahl die jeweilige Grenzcurve bilden, so muss uns der Vergleich dieser Grenzcurven einen Anhaltspunkt geben über die Veränderung, welche die Einzelcurven unter den vorliegenden Reizbedingungen überhaupt durchmachen, besonders wenn wir sie mit der aus der Geschwindigkeit des Anstiegs gebildeten mittleren Einzelcurve vergleichen.

Ich habe nun in dem Versuche *U*, den ich schon als Beispiel für die Abhängigkeit der Summationscurven bei maximaler Reizanzahl von der Reizintensität und zwar bei den einzelnen Intervallen benutzte, aus den in Fig. 14, Tafel II, und 36, 37, Tafel V angeführten Curvenreihen die Grenzcurven und die mittleren Einzelcurven gebildet, und auf Fig. 48, Tafel VII wiedergegeben, in dem Massstabe wie die übrigen Einzelcurven, nur mit dem Unterschiede, dass hier die Ordinaten die überzähligen Pulse in der Einheit von 2 Secunden darstellen.

Neben jeder Figur ist angegeben, welche Curven Grenzcurven und welche die aus der Geschwindigkeit des Anstiegs gebildeten mittleren Einzelcurven vorstellen. Ebenso ist die Intensität angegeben, bei welcher die Curven gewonnen wurden. Die zu oberst stehenden Reizintensitäten sind durchwegs maximale. Ich möchte noch hinzufügen, was ich schon bei den Summationscurven erwähnte, dass auch die Grenzcurven ohne

Correctur des Reizanfanges wiedergegeben sind, dass also die kleinen Differenzen in der Form der Curven wahrscheinlich davon herrühren. Ich habe die Correctur deshalb unterlassen, weil diese kleinen Unregelmässigkeiten, die mir erst bei der Construction der Einzelcurve auffielen, die Gesetzmässigkeit der ganzen Veränderung nicht beeinträchtigen.

Betrachten wir zunächst die Grenzcurven, so finden wir bei allen Intervallen gemeinsam, dass dieselben anfangs mit der Intensität zunehmen, bis sie eine maximale Steilheit und Höhe erreicht haben. Bei weiterer Vergrösserung der Intensität verschiebt sich der Wendepunkt zum Gipfel etwas nach rechts, wodurch der Anstieg sich verflacht, es verbreitert sich der Gipfel und bei ungefähr gleicher Geschwindigkeit des Abfalls die Länge der Curve selbst. Durch immer weiteres Hinausrücken des Wendepunktes zum Gipfel, und immer grössere Verflachung des Anstiegs nimmt die Curve bei nahezu gleicher Gipfelbreite und gleichem Abfalle bis zur maximalen Intensität an Länge zu.

Die Entwickelung der Grenzcurve nach der Intensität verläuft bei den einzelnen Intervallen mit verschiedener Geschwindigkeit. Während bei dem grossen Intervalle 0.67 die Grenzcurve erst ganz nahe der Maximalintensität bei 200 E nicht mehr weiter sich erhöht, wird diese Maximalhöhe bei dem Intervalle 0.20 schon bei 50 E erreicht, und bei dem noch kleineren Intervalle 0.12 bei $E = 15$. Es entspricht also dieser Punkt, wie die maximale Intensität selbst, ganz verschiedenen Reizgrössen.

Durch diese Grenzcurven wird weiter bestätigt, was schon für die höheren Intensitäten festgestellt ist, dass die Grenzcurve um so höher ist, und um so weniger von der Form der Einzelcurve niedriger Reizzahl sich unterscheidet, sowohl in Bezug auf Steilheit des Abfalles und Anstiegs wie Breite des Gipfels, je grösser das Intervall ist, mit Ausnahme der kleinsten Intensitäten. Es muss also auch die ganze Formveränderung, der die Grenzcurve mit steigender Intensität unterliegt, mit der Verkürzung des Intervalles zunehmen.

Darnach ergibt sich folgende Entwickelung der Grenzcurve nach der Reizintensität:

Sie wächst anfangs mit der Reizgrösse, verändert sich aber von einer bestimmten Intensität an nur mehr durch Verschie-

bung und Verbreiterung des Gipfels, und die dadurch bedingte Verlängerung der ganzen Curve. Die Umformung vollzieht sich um so rascher, und wird um so bedeutender, je kürzer das Intervall ist, so dass mit Ausnahme der kleinen Intensitäten die Grenzcurve sich um so mehr in Höhe und Form von den Einzelcurven niederer Reizzahlen unterscheidet, je kleiner das Intervall ist.

Wie ich schon früher auseinandergesetzt habe, lassen sich aus einer mittleren Einzelcurve, die aus der Geschwindigkeit des Anstiegs der Summationscurve gebildet ist, nur unter Vorbehalt Schlüsse ziehen. Je kleiner die Veränderung ist, welche die Einzelcurve mit steigender Reizzahl erfährt, desto einfacher muss die Form der mittleren Einzelcurve sein, und desto ähnlicher ihrer Grenzcurve, so dass die hier erhaltenen Resultate sehr gut mit den früheren übereinstimmen, da die Curven um so zusammengesetztere Form annehmen und um so mehr von ihrer Grenzcurve abweichen, je kleiner das Intervall ist. Das Nämliche lässt sich für die Intensität behaupten. Wir kommen also zu demselben Schlusse, den wir schon aus den Curven höherer Intensitäten gezogen, dass die Aenderung, welche die Einzelcurve mit steigender Reizzahl erfährt, je nach der Grösse der Intensität zunehmen muss. Es wäre dabei nur noch hervorzuheben, dass bei einer bestimmten Reizgrösse der Unterschied zwischen den mittleren Einzelcurven und ihren Grenzcurven nahezu verschwindet, welcher Punkt aber für jedes Intervall einen anderen Werth besitzt. So sind z. B. für das Intervall 0.67 bei $E = 15$ die mittlere Einzelcurve und ihre Grenzcurve nahezu identisch. Das nämliche findet sich bei Int. 0.20 für $E = 10$. Was die Form der mittleren Einzelcurve betrifft, so lassen sich auch aus ihr gewisse Folgerungen auf die Veränderungen der Einzelcurve mit steigender Reizzahl machen, besonders wenn wir dazu die Summationscurven zu Hülfe nehmen. Ich habe in einem Beispiele[1]) klar gelegt, dass die mittlere Einzelcurve länger als die Grenzcurve ist, wenn die Einzelcurven constant zunehmen, d. h. wenn die maximale Höhe der Summationscurve später eintritt, als dem Ende der ersten Einzelcurven entspricht. In ähnlicher Weise wird die mittlere Einzelcurve kürzer als die Grenzcurve ausfallen, wenn die Einzel-

---

1) S. 265.

curven auch nur theilweise bis zur Grenzcurve sich verkleinern, so dass die maximale Höhe der Summationscurve vor das Ende der ersten Einzelcurven fallen muss. Je grösser also der Unterschied zwischen den Einzelcurven der ersten Reize und der Grenzcurve ist, desto kleiner muss die Länge der mittleren Einzelcurve werden. Wenn nun diese Länge mit der Verkürzung des Intervalles abnimmt, und innerhalb des Intervalles wieder mit der Intensität, so zeigt dies wieder, dass die Gesetze, welche wir für die hohen Intensitäten aufgestellt haben, allgemein gültig sind. Das Nämliche beweist auch die Vergrösserung der Einzelcurve mit der Intensität, sowohl in Bezug auf die Höhe, wie die Geschwindigkeit des Anstiegs.

Es bleibt mir nur noch übrig, auf die Geschwindigkeit, mit der die Entwickelung der Einzelcurve nach der Reizzahl sich bei den verschiedenen Intensitäten vollzieht, näher einzugehen. Ich habe nämlich früher den Satz aufgestellt, dass dieselbe für niedere und mittlere Intensitäten nahezu gleichmässig verläuft, dass also der Anfang der rückläufigen Bewegung ungefähr auf den nämlichen Reiz fällt, da die Einzelcurven niederer Intensitäten in ihrem ganzen Umfange kleiner sind, wie die der höheren. Ich schloss dies, weil bei dem grösseren Intervalle 0.42 die rückläufige Bewegung mit Zunahme der Intensität anfangs nur unbedeutend früher eintritt, und erst bei den stärkeren Intensitäten die Entwickelung rascher verläuft. Mit Hülfe der angeführten Summationscurven lässt sich dies vollständig sicherstellen, wenn wir ihre Formveränderung bei Zunahme der Intensität berücksichtigen.

Wenn die Einzelcurven gleich bleiben, muss die Summationscurve maximaler Reizanzahl eine regelmässige Form annehmen, indem die Geschwindigkeitscurve des An- und Abstiegs zusammenfällt, und der Gipfel parallel zur Abscisse verläuft. Sobald die Einzelcurven mit der Reizzahl zunehmen, oder wenigstens die spätere Abnahme noch zurücktritt, muss die Geschwindigkeit des Abfalles gegenüber des Anstieges in rascherem Maasse wachsen, und der Anfang des Gipfels später erreicht werden. Die Differenz in der Geschwindigkeit des Anstiegs und Abfalles gleicht sich aus, sobald die Abnahme der Einzelcurve mit den späteren Reizen weiter fortschreitet. So lange die Entwickelung der Einzelcurve gleichmässig vor sich geht, müssen auch die einzelnen Theile der Summationscurve propor-

tional wachsen, d. h. die Zunahme der Curve mit der Reizintensität darf die Gestalt derselben nicht wesentlich ändern. Sobald aber einmal die rückläufige Bewegung und die Annäherung an die Grenzcurve rascher sich vollzieht, muss auch die maximale Höhe früher beginnen, der Anstieg steiler werden, und zuletzt mit Verflachung der Einzelcurve, auch die Geschwindigkeit des Abfalles zurückgehen.

Analysiren wir unsere Summationscurven auf Figur 36, 37, Tafel V und 14—16, Tafel II in dieser Richtung, so finden sich bei jedem Intervalle diese Formen vertreten, nur mit dem Unterschiede, dass bei den grösseren Intervallen die Stadien langsamer durchlaufen, und zum Theil die spätesten gar nicht erreicht werden.

Wir kommen also zu dem Schluss, dass die bei den grossen Intervallen gefundenen Umänderungen auch für die kleinen Geltung haben, aber nur für kleinere Intensitäten.

Fassen wir die gewonnenen Resultate zusammen, so lässt sich ungefähr folgendes Bild von der Entwickelung der Einzelcurve nach der Reizzahl machen:

Die Einzelcurve ändert sich mit der Reizzahl bei kleinen Reizintensitäten nur sehr wenig bis zur Grenzcurve. Mit zunehmender Intensität wachsen die Einzelcurven der ersten Reize viel rascher an, als die Grenzcurven, wodurch in der Curvenveränderung sich wieder eine rückläufige Bewegung ausbildet, der Art, dass die Curven von einem bestimmten Punkte an allmählich bis zur Grenzcurve sich wieder verkleinern zugleich mit einer geringen Verschiebung des Gipfels, wodurch Anstieg und Abfall ebenfalls sich abflachen. Während die Vergrösserung der Grenzcurve aufhört, und sie sich nur mehr durch eine seitliche Verschiebung und Verbreiterung des Gipfels ändert, verbunden mit einer weiteren Verflachung des Anstiegs und Abfalles, nehmen die den ersten Reizen entsprechenden Einzelcurven constant zu, so dass die Formveränderung der Einzelcurven durch die Reizzahl mit der Grösse der Intensität fortwährend wächst. Mit zunehmender Intensität bildet sich noch eine weitere Veränderung in der Entwickelung der Einzelcurve aus, in der Weise, dass die rückläufige Bewegung immer früher beginnt, und die Curven immer rascher der Grenzcurve sich nähern, was um so mehr in den Vordergrund tritt, wenn einmal die Einzelcurve ihre Maximalhöhe erreicht hat. Bei den stärksten Intensitäten unterscheiden sich

also die Curven nun mehr dadurch von einander, dass diese ihre Maximalhöhe früher erreichen, und der Grenzcurve immer schneller sich nähern.

Von dem Intervalle hängt die Gestalt der Grenzcurve ab, das heisst die Grösse der Formveränderung, welche die Einzelcurve mit der Reizzahl zu durchlaufen hat. Im Uebrigen ändert sich die Einzelcurve mit der Verkürzung des Intervalles ganz ähnlich wie mit der Reizintensität.

Auf diese Abhängigkeit der Einzelcurve von der Reizzahl sowohl, wie von der Grösse der Intensität und des Intervalles lassen sich alle Abweichungen von den anfangs angeführten Gesetzen der Summation zurückführen.

d) Einfluss des Intervalles auf die Gesammtwirkung einer Reizung.

Ich habe schon bei Besprechung der Summationserscheinungen in ihrer Abhängigkeit von der Reizanzahl und der Reizintensität Einiges über die Gesammtmenge der überzähligen Pulse erwähnt, habe aber dabei die Abhängigkeit derselben von dem Intervalle unberücksichtigt gelassen. Ehe ich darauf eingehe, möchte ich noch einmal darauf zurückkommen, wie die Curve der Gesammtwirkung erhalten werden kann.

Zeichnet man die aus den Summationscurven verschiedener Reizanzahl erhaltenen Werthe für die Gesammtmenge der überzähligen Pulse auf ein Millimeterpapier auf, so lässt sich mit Hülfe dieser Punkte die Curve selbst construiren, wobei sich zum Vergleiche die bei andern Intensitäten und Intervallen gewonnenen Punkte mit grossem Vortheile verwerthen lassen, unter der Annahme, dass diese Curven nur allmählich in gesetzmässiger Weise sich ändern. Um den wahren Nullpunkt der Curve zu bestimmen, sind die Curven von gleicher Intensität aber verschiedenem Intervalle besonders geeignet, indem derselbe bei diesen Curven identisch sein muss, da der Erfolg eines einzigen Reizes nicht mehr von dem Intervalle abhängig sein kann. Wir haben also solche Curven nur nach unten zu verlängern, um in dem gemeinsamen Schnittpunkte auch den Ausgangspunkt für die Curven aller Intervalle gleicher Intensität zu erhalten. Nimmt man also Summationscurven von verschiedener Intensität und verschiedenem Intervalle zu Hülfe, so lässt

sich die Curve der Abhängigkeit der Gesammtwirkung von der Reizanzahl mit grosser Wahrscheinlichkeit feststellen.

In Figur 49, Tafel VII sind solche Curven aus dem Versuche *Y* wiedergegeben.

Aus ihnen lässt sich leicht die jeder Einzelcurve zukommende überzählige Pulsmenge ableiten, und zwar durch Subtraction der den einzelnen Summationscurven zugehörigen Ordinaten. Ich habe der Bequemlichkeit halber die Differenzen von Ordinaten der Abscissenabschnitte genommen, die 2.5 Reizen entsprechen, und aus diesen die überzähligen Pulsmengen einer mittleren Einzelcurve gerechnet. Uebertrügt man diese Zahlen wieder in derselben Weise auf ein Millimeterpapier, so erhält man eine Curve, welche uns die Gesammtmenge der überzähligen Pulse des Einzelreizes abhängig von der Reizzahl darstellt.

Zur Beurtheilung der Abhängigkeit dieser Curve von dem Intervalle ist es zunächst nothwendig, die Entwicklung derselben nach der Reizintensität bei jedem einzelnen Intervall zu verfolgen.

Auf Tafel III, Figur 25, 26, 27 finden sich solche Curvenreihen, über deren Bedeutung ich schon früher[1]) das Nothwendige gesagt habe. Ich möchte diesen Erörterungen nur noch Einiges hinzufügen. Aus der Veränderung, welche die Einzelcurve mit der Reizzahl bei niederen Intensitäten erfährt, lässt sich leicht die Curvenform für die Gesammtwirkung der Reizung ableiten. Wenn die Einzelcurve ihre Gestalt nur wenig ändert, muss dieselbe nahezu eine Gerade darstellen; und erst wenn einmal die Einzelcurven der ersten Reize höher werden als die Grenzcurven, tritt die Curvengestalt auf, wie wir sie in unseren Beispielen vertreten finden. Mit der Reizintensität steigt zugleich mit dem Ausgangspunkte der Gipfel der Curve constant und zwar so, dass die Entfernung der beiden zuerst zu-, dann wieder abnimmt, während der Gipfel selbst allmählich gegen den Anfang zu rückt. Ob es eine Intensität gibt, wo der Gipfel mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, darüber werden wir noch später zu sprechen haben. Mit der Intensität rückt auch der Wendepunkt der abfallenden Curventheile weiter nach unten und aussen. Und da die Grenzcurve von einer bestimm-

---

1) S. 249.

ten Reizgrösse an nur mehr sehr wenig sich ändert, so müssen auch die Curven an einem bestimmten Punkte ihres abfallenden Theiles sehr nahe zusammentreten, um dann allmählich in ihren Grenzwerth überzugehen.

Für das grössere Intervall (Fig. 25) ist charakteristisch, dass die maximale Curve nur mehr eine geringe Entfernung ihres Gipfels vom Ausgangspunkte aufweist, und dass die Curven der einzelnen Intensitäten sich wahrscheinlich nie wirklich kreuzen, indem die Geschwindigkeit, mit der die Curven dem Grenzwerthe zustreben, nahezu gleich ist. Bei dem kleineren Intervalle wird die Curvenentwicklung für die niederen Intensitäten eine ganz ähnliche sein, und wird nur in Uebereinstimmung mit der Einzelcurve schneller mit der Reizgrösse zunehmen. Auch hier werden an einem Punkte des abfallenden Schenkels die Curven nahe zusammentreten, um dann den Werth für ihre Grenzcurve anzunehmen. Wenn einmal mit der höheren Intensität die Einzelcurven der Grenzcurve rascher sich zu nähern beginnen, so dass ihre Gipfel unter die der kleineren Intensitäten fallen, sinkt auch der Wendepunkt des abfallenden Theiles unserer Curve, so dass diese mit den Curven niederer Intensität einen Kreuzungspunkt besitzt (Fig. 27 und 26).

Bei dem kleinen Intervalle 0.10″ kommt noch eine weitere Unregelmässigkeit zum Ausdruck, die damit zusammenhängt, dass die Einzelcurven sehr kleiner Intervalle ihre höchste Entwicklung viel rascher erreichen, weshalb die beiden Curven auf Figur 27 schon zu Anfang des abfallenden Curventheiles einander sehr nahe treten. Dass in diesem Beispiele die Differenz der absinkenden Curventheile nicht mehr so bedeutend ist, wie in Fig. 26, liegt wohl daran, dass für das Intervall 0.10″ die Intensität $E = 377$ schon übermaximal ist.

Diese Aenderungen der Curven beweisen uns, dass die Curven des Totaleffectes nach der Höhe der Einzelcurven sich richten, und mit ihr steigen und fallen.

Vergleichen wir nun die Curven der verschiedenen Intervalle bei gleicher Reizintensität. Beispiele dafür habe ich in Figur 50, 51, 52, Tafel VII aus dem Versuch *Y* gegeben. Für jede Reizintensität wächst die Curve mit der Verkürzung des Intervalles, erreicht aber ungefähr zur nämlichen Zeit ihr Maximum. Ebenso fällt, wenigstens für kleinere und mittlere Intensitäten, der Wendepunkt des Abfalles zeitlich nahe zusammen. Da nun,

nach den Einzelcurven zu schliessen, die Grenzwerthe um so niederer sind, je kleiner das Intervall ist, so müssen auch beide Schenkel des abfallenden Theiles mit dem Intervalle zunehmen, so dass die Curven gleicher Intensität an bestimmten Punkten sich schneiden. Diese Schnittpunkte fallen hinter den Wendepunkt, auf den zweiten Schenkel des abfallenden Curventheiles; sie sind um so weiter vom Wendepunkte entfernt, je grösser die Differenz zwischen den beiden Intervallen ist. Ein Beispiel dafür gibt der Vergleich des Intervalles 0.42 und 0.20 bei $E = 300$.

Für das Intervall 0.10″ derselben Reizgrösse $E = 300$ findet sich schon eine Unregelmässigkeit, weil die Einzelcurven dieses Intervalles viel rascher der Grenzcurve sich nähern, als dies bei den grösseren Intervallen z. B. Int. 0.20 der Fall ist. In Folge davon sinkt auch der absteigende Curvenast viel tiefer und kommt dessen Wendepunkt unter den des Intervalles 0.20 zu liegen, so dass der Kreuzungspunkt beider Curven früher eintritt. Das Gleiche ist der Fall bei der Intensität 377, nur mit dem Unterschiede, dass hier auch der Wendepunkt des Intervalles 0.20 auffallend tiefer liegt, weshalb die Curven des Intervalles 0.20 und 0.10, unter sich wieder viel ähnlicher, vor ihrem Wendepunkte mit dem Intervalle 0.42 sich kreuzen.

Auf Figur 52 habe ich Curven von maximaler Intensität bei den Intervallen 0.42 und 0.10 aufgezeichnet. Beide stehen sich deswegen in ihrer Form viel näher. Da die Maximalintensität für das Intervall 0.42 $E = 464$ für 0.10 $E = 377$ darstellt, so müssen auch die Ausgangspunkte der Curven verschoben sein, desgleichen wird für das grössere Intervall 0.42 wegen der höheren Reizintensität die Entfernung des Ausgangspunktes vom Gipfel kleiner. Strenge genommen sollten alle Intervalle die gleiche Maximalintensität haben, da die Summationscurven nicht vollständig gleich sein können, so lange nicht auch die erste Einzelcurve ihre maximale Reizgrösse erreicht hat. Dass also die Maximalintensität für das kleinere Intervall früher eintritt, als für das grössere, liegt nur an der ungleichen Entwicklung der Einzelcurve nach der Reizzahl, bei den verschiedenen Intervallen; weshalb die geringe Differenz, welche für die höchsten Intensitäten zu Anfang der Summationscurve noch vorhanden ist, nicht mehr unterschieden werden kann. Ob wirklich

der Gipfel der Curve bei dem grösseren Intervalle niederer ist, wie bei dem kleineren, mag dahin gestellt bleiben, da ich gerade dafür keinen zweiten vergleichbaren Fall unter meinen Versuchen habe. Wahrscheinlich wird es aber durch die ganze Form der Curven.

Kehren wir nun nochmals zu den Curven zurück, welche für die Summationscurve die Gesammtmenge der überzähligen Pulse in ihrer Aenderung mit der Reizanzahl wiedergeben. Auf ihnen bedeuten die Ordinaten die überzähligen Pulsmengen, die Abscissen die Anzahl der Reize. In Figur 31, Tafel IV sind solche Curven gleichen Intervalles aber verschiedener Intensität dargestellt. Es lässt sich aus ihnen der Einfluss der Intensität entnehmen, indem mit ihr die Geschwindigkeit des Anstieges wächst. Während aber bei kleinen und mittleren Intensitäten die Geschwindigkeitszunahme hauptsächlich auf den mittleren Curventheil beschränkt bleibt, rückt sie mit wachsender Reizgrösse immer mehr gegen den Anfang der Curve vor, und wird gegen den Grenzwerth zu früher constant. Für die maximale Intensität erhalten wir eine Curve, die schon nahezu mit grösster Geschwindigkeit anhebt, und allmählich mit abnehmender Geschwindigkeit in eine Gerade übergeht.

Bei grösseren Intervallen nimmt die Geschwindigkeit gleicher Curvenabschnitte mit der Intensität beständig zu, wenn auch in ungleichem Maasse. Das Gleiche muss für die kleineren Intervalle mittlerer Intensität zutreffen. Bei hohen Intensitäten dagegen zeigt sich in so ferne ein Unterschied, als die Geschwindigkeit der Curve von höherer Intensität theilweise unter die der niederen herabsinkt. Die Curven hoher Intensität divergiren also nicht während ihres ganzen Verlaufes, sondern nur im Anfangstheil, um dann nach einer kurzen Convergenz nahezu parallel der Geraden sich zu nähern.

Bei Betrachtung der Curven gleicher Intensität aber verschiedenen Intervalles (Figur 49, Tafel VII) ist zunächst zu beachten, dass die Curven um so später der Geraden sich nähern, je kleiner das Intervall ist, d. h. je später die Einzelcurve in die Grenzcurve übergeht. Da die Grenzcurve mit dem Intervalle, wenn letzteres nicht sehr gross ist, zunimmt, so ist der Winkel, den diese Gerade mit der Abscisse einschliesst, um so spitzer, je kleiner das Intervall ist. Es müssen sich also die Curven von verschiedenen Intervallen in einem bestimmten Punkte

kreuzen. Dieser Kreuzungspunkt ist aber um so weiter entfernt, je grösser die Differenz der beiden Intervalle, und um so grösser die Reizintensität selbst ist, wie wir sogleich aus der Gestalt der Curven entnehmen werden. Die Curven wachsen nämlich anfangs um so rascher, je kleiner das Intervall ist, d.h. sie divergiren bis zu dem Punkte, wo die Wirkungscurven der Einzelreize für das grössere Intervall die grösseren werden. Von hier an müssen sie convergiren, zuerst schnell, dann langsam bis zum Kreuzungspunkte. Da nun aber die Einzelcurven des kleinen Intervalles mit zunehmender Intensität viel rascher sich vergrössern, wodurch auch die anfängliche Divergenz in den Curven der Gesammtwirkung anwächst, während die Neigung der Geraden, der sie sich allmählich nähern, bei den verschiedenen Intensitäten nahezu gleich bleibt, so muss mit wachsender Reizgrösse auch der Kreuzungspunkt hinausgeschoben werden. Eine Ausnahme hievon machen wieder die Curven bei hohen Intensitäten, sobald die von der Intensität bedingte Zunahme der Einzelcurve für das grössere Intervall bedeutender wie für das kleinere wird, d. h. wenn in der Curve der Gesammtwirkung die Geschwindigkeit des Anstiegs gegenüber einer Curve grösseren Intervalles abnimmt, wodurch auch ihr Kreuzungspunkt früher eintreten muss. Ein solcher Unterschied kommt auf Figur 49, beim Vergleich des Intervalles 0.20 und 0.42 bei $E = 300$ oder 377 zur Geltung. Noch deutlicher tritt es zu Tage bei maximaler Intensität, weil dabei die anfangs nahezu gleich grosse Einzelcurve um so rascher ihrer Grenzcurve sich nähert, je kleiner das Intervall ist.

Es ist also der Einfluss der Reizintensität auf die Summationscurven bei den einzelnen Intervallen mit der Reizanzahl wechselnd, und lässt sich nur dann ein richtiges Bild von der Aenderung der Summationscurve nach der Reizstärke für die verschiedenen Intervalle erhalten, wenn die Curven von verschiedener Reizanzahl bestimmt werden. Aus den Curven der Gesammtwirkung ist auch leicht zu ersehen, welchen Nutzeffect die Reizung bei verschiedenen Intervallen hat, und lässt sich auch leicht beweisen, dass für nicht zu lange Einwirkung die kleinen Intervalle den Vorzug verdienen. Die Curven kleiner Intervalle wachsen ja, wie wir gesehen, rascher an, und sinken erst bei längerer Reizdauer unter die des grösseren Intervalles herab, diese Differenz ist für mittlere und kleine Intensitäten am be-

deutendsten. Ausserdem gestattet nur das kleine Intervall eine bedeutende Veränderung von kurzer Dauer.

Bekanntlich liegt das Intervall der physiologischen Reizung, wenigstens für die Muskeln, unterhalb 0.05". Ich glaube es spricht nichts dagegen, das physiologische Intervall im Allgemeinen als sehr klein anzunehmen, da die Erregungen von einander sehr nahe stehenden Apparaten ausgehen. Ein solches Intervall würde wenigstens in diesem Falle den grössten Nutzeffect haben, sodass dabei der Organismus mit dem geringsten Kraftaufwand arbeiten würde.

V. Die Ursachen der Veränderung der Einzelcurve.

Ich hoffe dargethan zu haben, dass die Resultate, welche ich durch Einwirkung einer Accelerans-Reizung auf die Vermehrung der Schlagzahl des Herzens erhalten habe, sich aus dem Summationsgesetze erklären lassen, unter der Annahme, dass die Einzelcurve nicht allein eine Function der Reizintensität, sondern auch der Reizzahl ist, welche Function aber wieder nach der Reizgrösse selbst und nach dem Intervalle variabel gedacht werden muss.

Es frägt sich also, auf welche Ursache eine solche Veränderung der Einzelcurve zurückzuführen ist.

Bei einer Erklärung von Summationsvorgängen im lebenden Organismus haben wir immer damit zu rechnen, dass die Reizung selbst eine Zustandsänderung im nervösen Apparate hervorbringt, vermöge deren die Bedingungen für den Erfolg des nachfolgenden Reizes geändert werden. Es muss also die Einzelcurve mit der Reizzahl sich ändern, und zwar entsprechend der Grösse der Zustandsänderung, welche zur Zeit der Reizung besteht; das heisst also, analog der Ordinate der durch die vorhergehende Reizung bedingten Summationscurve. Da der Grund dieser Aenderung der Einzelcurve schon bei Beginn derselben besteht, so ändert sich die Form der Curve wohl im Ganzen, muss sich aber immer ähnlich bleiben.

Nun kann die Grösse der möglichen Zustandsänderung im nervösen Apparate nur eine beschränkte sein, und darf ein gewisses Maass nicht überschreiten. Da aber dieser Einfluss mit der Höhe der Summationscurve allmählich erst sich ausbildet, und um so mehr sich geltend macht, je mehr die Summationscurve

dieser Grenze sich nähert, so wird dadurch nicht die Einzelcurve als solche geändert, sondern eigentlich nur die einzelnen Ordinaten der Summationscurve, was sich bei der Construction der Einzelcurven aus dieser durch eine mehr oder weniger grosse Umwandlung ihrer Form ausdrücken muss.

Wenn eine Summation eine zweite hervorbringt, so richtet sich letztere nicht mehr nach den Einzelcurven der ersten Summation, sondern nur nach den Ordinaten derselben. So lange aber die erste noch aus regelmässig sich ändernden Einzelcurven zusammengesetzt ist, wird dies auch bei den Einzelcurven der Fall sein, welche wir aus der zweiten construiren können, vorausgesetzt, dass wir nicht bei dieser früher an die obere Grenze gelangen. Die Aehnlichkeit in der Form der Einzelcurven hört alsbald auf, wenn einmal irgend ein Theil des nervösen Apparates an die Grenze seiner Zustandsänderung angekommen ist. Das schliessliche Resultat fällt also ganz verschieden aus, je nachdem die mögliche Zustandsänderung an einem Theile des nervösen Apparates grösser oder kleiner wie die des anderen ist.

Kommen wir nun auf unsern speciellen Fall zurück, so ist zunächst im Auge zu behalten, dass die Ursache der Herzbewegung im Herzen selbst zu suchen ist; die Erregung des Nervus accelerans überträgt sich also nicht direct auf die Herzmusculatur, sondern durch verschiedene Zwischenglieder, und haben wir es nicht mit einer einfachen Summation, sondern mit verschiedenen Summationsvorgängen zu thun. Der Zusammenhang zwischen der Accelerans-Reizung und der Pulsvermehrung ist also sehr complicirter Natur. Ausserdem kommt noch in Betracht, dass wir durch Veränderung der Schlagzahl des Herzens indirect den ganzen hier in Betracht kommenden nervösen Apparat unter andere Bedingungen setzen. Ich will dabei nur auf eine Möglichkeit aufmerksam machen, weil sie mir zum Theil an der Aenderung der Einzelcurve betheiligt zu sein scheint. Mit der Veränderung der Schlagzahl des Herzens wird die Leistung der Herzmusculatur ebenfalls eine andere, und zwar annähernd proportional, da die Stärke der einzelnen Contractionen für gewöhnlich wenigstens gleich bleibt. Da dies die Bildung einer grösseren Menge von Zersetzungsproducten bedingt, so wird dadurch der chemische Zustand der Herzmusculatur ein anderer, und desgleichen auch die Erregbarkeit derselben, wenn

nicht mit der Leistung der Musculatur die Durchspülung derselben in gleichem Maasse zunimmt.

Erhöht sich die Schlagzahl des Herzens, so vermehrt sich auch die Blutmenge, welche in der Zeiteinheit in das Gefässsystem geworfen wird, wenigstens so lange die Herzcontraction gleich gross bleibt. Da nun der Austausch zwischen Zelle und Umgebungsflüssigkeit um so rascher und intensiver vor sich geht, je grösser der Unterschied in der Zusammensetzung der Innen- und Aussen-Flüssigkeit ist, so wird der Austausch bei dem häufigeren Blutwechsel, der bei Gleichbleiben des Blutdruckes eintreten muss, auch leichter und besser sich vollziehen können. Wir haben also auf der einen Seite eine Anhäufung von Zersetzungsproducten im Herzmuskel, hervorgerufen durch seine grössere Leistung, auf der andern Seite eine bessere Ausspülung solcher Zersetzungsproducte durch den häufigeren Blutwechsel. Es wird deshalb allein auf die Lage der einzelnen Theile des nervösen Apparates und auf die Blutvertheilung in ihm ankommen, welcher Erregbarkeitsänderung jeder derselben durch den Wechsel in der Schlagzahl des Herzens ausgesetzt ist. Die gleiche Betrachtung gilt auch für die Zufuhr des nothwendigen Ernährungsmaterials etc.

Bei directer Reizung eines nervösen Apparates muss die schon besprochene Grenze der möglichen Zustandsänderung sowohl durch *einen* maximalen Reiz, wie durch eine Summation submaximaler Reize hervorgebracht werden können. Anders ist es bei indirecter Reizung, wo die Höhe der möglichen Zustandsänderung des direct gereizten Theiles eine andere ist, wie die des zweiten, auf den sich die Erregung überträgt. Wir dürfen, glaube ich, annehmen, dass histologisch und physiologisch gleich geartete Organe bei ihrer Reizung auch eine ähnliche Einzelcurve geben, so lange wenigstens nicht das Gegentheil erwiesen ist. Nun zeigen aber die Untersuchungen von Kries und Sewall[1]), dass eine Verstärkung des Reizes, das heisst eine Summirung der Reize im Nerven selbst nur bei einem Intervalle unter 0.006″ eintritt, so dass dieses Intervall ungefähr die Länge der Einzelcurve des gereizten Nerven repräsentiren würde.

Es ist, glaube ich, daraus der Schluss zu ziehen, dass in

1) Ueber die Summirung untermaximaler Reize in Muskeln und Nerven. Archiv für Physiologie von Du Bois-Reymond. Bd. 1881.

meinen Versuchen bei einem Minimalintervall von 0.035" eine Summation im Nerven überhaupt nicht eingetreten ist, sondern erst in den folgenden Theilen des nervösen Apparates, und dass die auffallende Länge meiner Einzelcurven wohl erst von dem motorischen Theile des ganzen Apparates herrührt, wie ja auch der willkürlich bewegliche Muskel eine verhältnissmässig lange Contractionscurve aufweist. Damit erklärt sich auch, warum trotz maximaler Reizung noch eine weitere Summation zu Stande kommt, indem diese nur der maximalen Zustandsänderung im Nerven entspricht, wo wegen der Grösse des von mir angewendeten Reizintervalles überhaupt keine Summation stattfinden kann, während die übrigen Theile des nervösen Apparates, deren Zustandsänderung viel später ihre oberste Grenze erreicht, eine solche noch gestatten.

Was nun die Veränderung betrifft, welche die Einzelcurve unter dem Einflusse der Reizzahl erleidet, so ist dieselbe zweierlei Art, die eine zu Gunsten, die andere zu Ungunsten ihrer Grösse und ihres Umfanges. Die anfängliche Zunahme der Einzelcurve mit der Reizzahl zeichnet sich dadurch aus, dass die Curven alle einander ähnlich bleiben, das heisst ihre Form nur wenig ändern. Es ist dies ein Zeichen, dass die Ursache dafür auf das Zustandekommen der Einzelcurve selbst von Einfluss ist, und sich nicht erst im Laufe der Summation entwickeln kann. Daher liegt es sehr nahe, die Zustandsänderung des nervösen Apparates durch die vorhergehende Reizung dafür in Anspruch zu nehmen. Principiell lässt sich, glaube ich, dagegen nichts einwenden, ja es ist sogar sehr wahrscheinlich, dass, wenn einmal ein System in eine bestimmte Schwingungsrichtung versetzt ist, der gleiche Anstoss eine grössere Wirkung erzielt.

Eine grosse Unterstützung findet diese Annahme ferner darin, dass die nämliche Modification der Curve durch eine Erhöhung der Reizintensität erzielt werden kann. Da es feststeht, dass ein grösserer Reiz auch eine grössere Erregung, oder, was dasselbe ist, eine grössere Zustandsänderung im nervösen Apparat hervorbringt, wodurch auch der sichtbare Erfolg ein grösserer sein muss, so dürfen wir die gleiche Wirkung bei dem nachfolgenden Reize voraussetzen, in Folge der durch die vorhergegangene Reizung hervorgebrachten Zustandsänderung. Wir müssen also annehmen, dass die Grösse der Einzelcurve von

der Höhe des Summationsabschnittes abhängt, der der vorausgegangenen Reizung entspricht.

Es liesse sich überhaupt die ganze Abhängigkeit der Einzelcurve von der Reizzahl, der Intensität und dem Intervalle erklären, unter der Annahme, dass die Grenze der Zustandsänderung eines nervösen Apparates um so später erreicht wird, je länger seine Einzelcurve ist, und dass letztere bei dem hier in Frage kommenden Apparate von dem Nerven gegen den Endapparat zunimmt.

Dadurch wird verständlich, warum eine Erhöhung einer Einzelcurve schon eintreten kann, wenn deren Reiz noch in das Latenzstadium fällt, zu einer Zeit, wo ein sichtbarer Erfolg noch nicht vorhanden ist, indem in einem Theile des nervösen Apparates ganz gut der Erregungsvorgang schon abgelaufen sein kann, ehe derselbe im Endapparate beginnt.

Die Einzelcurve wächst unter dem Einflusse der Reizzahl anfangs mit zunehmender, dann abnehmender Geschwindigkeit. Ob das Gleiche für die Reizstärke gilt, ist wenigstens nach Fig. 29, Tafel IV sehr wahrscheinlich. Jedenfalls nimmt aber die Geschwindigkeitszunahme nach einigen Reizen ab, bis die maximale Einzelcurve erreicht wird. Diese Geschwindigkeitsänderung in dem Wachsthum der Einzelcurve liesse sich schon aus einem einzigen Summationsvorgange ableiten, unter der von mir schon gemachten Annahme, dass die Grösse der Einzelcurve von der Zustandsänderung abhängt, welche die vorausgehende Reizung hervorgerufen hat. Dieselbe wird, als Summation aufgefasst, anfangs rascher, dann aber langsamer ansteigen. Es findet damit auch die Thatsache ihre Erklärung, dass die Geschwindigkeit der Zunahme mit der Reizgrösse wächst, indem dabei die Einzelcurve des ersten Reizes im ganzen Umfange grösser ist, so dass die Summationscurve ebenfalls rascher ansteigt.

Vollständig reicht aber eine einzige Summation zur Erklärung nicht aus, indem die Zunahme der Einzelcurve eine Grenze hat, die nicht überschritten werden kann, und die um so rascher erreicht wird, je höher die Intensität ist. Bei einer einzigen Summation dagegen müsste die Einzelcurve constant wachsen, allerdings mit abnehmender Geschwindigkeit, und zwar müsste die Zunahme um so beträchtlicher sein, je höher die Reizintensität gewählt ist. Dies trifft nun allerdings bei niederen Reizgrössen zu, aber wie gesagt, nicht mehr bei den höheren.

Wir haben also hiefür eine weitere Summation zu Hülfe zu nehmen, und zwar der Art, dass die erste aus verhältnissmässig kurzen Einzelcurven zusammengesetzt ist, wobei deren maximale Zustandsänderung bald erreicht wird. Damit heben sich die angegebenen Schwierigkeiten; bei untermaximalen Reizen wird wegen der kurzen Einzelcurve die Grenzhöhe der ersten Summation bald erreicht werden, so dass nun bei weiteren Reizen die Einzelcurven alle gleich ausfallen, während, wenn einmal die Grenze der möglichen Zustandsänderung überhaupt erreicht ist, weder durch Erhöhung der Reizintensität, noch durch weitere Summation eine höhere Wirkung für einen Einzelreiz erzielt werden kann. Es muss also mit der Vermehrung der Reizintensität die höchste Wirkungscurve des Einzelreizes immer früher auftreten.

Wegen der längeren Einzelcurve und der weiteren Entfernung der maximalen Zustandsänderung im zweiten Theile des nervösen Apparates kann aber auch dann noch eine Summation eintreten, wenn für den ersten Summationsvorgang die maximale Höhe oder die Grenze der möglichen Zustandsänderung eingetreten ist, wie wir ja auch bei einmaligem maximalen Reize noch eine Summation zu Stande kommen sehen.

Wenn einmal die maximale Zustandsänderung in einem Theile des Apparates eingetreten ist, wird allerdings die Wirkungscurve des Einzelreizes auch ihre Form ändern müssen. Deshalb tritt aber auch bei unserer Summation die Formveränderung um so früher ein, je grösser die Intensität ist, d. h. je schneller wir uns der Grenze der möglichen Zustandsänderung des einen Theiles nähern.

Auf die nämliche Weise lässt sich auch die Abhängigkeit der Einzelcurve von dem Intervalle erklären. Dieselbe wird bei dem grösseren Intervalle mit steigender Reizzahl nur langsam wachsen, einmal da das Intervall grösser sein kann als die Erregungscurve eines Theiles des in Frage kommenden Apparates, dann weil die Zustandsänderung als Summation aufgefasst selbst langsamer zunimmt, und ihre Curve eine viel niederere Grenzhöhe besitzt, so dass die bei jedem Intervalle zu erreichende höchste Einzelcurve mit der Grösse des Intervalles kleiner wird.

Deswegen muss auch die Curvenentwickelung nach der Reizzahl bei dem grösseren Intervalle eine gleichmässigere sein.

da die Grenze der möglichen Zustandsänderung des nervösen Apparates gar nicht oder bei viel höherer Intensität erst erreicht wird.

Zwischen dem Einflusse der Intensität wie des Intervalles auf die Grösse der Einzelcurve ist deshalb eine so grosse Uebereinstimmung, weil durch beide die Summationscurve erhöht werden kann, und damit auch die Einzelcurve des nächsten Reizes. Mit Erhöhung beider tritt auch die sogenannte rückläufige Bewegung der Einzelcurve, d. h. deren Verkleinerung und Umformung früher ein, weil sowohl durch das eine wie das andere die maximale Zustandsänderung eines Theiles des nervösen Apparates früher hergestellt werden kann, und dadurch nothwendiger Weise auch die Umgestaltung der Einzelcurve. Es beruht daher auch die rückläufige Bewegung wohl zum grössten Theile auf den Summationen allein, und muss dieselbe um so grösser sein, je mehr Theile des nervösen Apparates in ihre maximale Zustandsänderung eingetreten sind. Auch warum die Grösse der auftretenden Formveränderung von dem Intervall allein abhängt, lässt sich wohl erklären; denn wenn an irgend einem Theile des in Erregung versetzten Apparates die Grenze der möglichen Zustandsänderung erreicht ist, wird die betreffende Summationscurve nicht mehr in ihrer Höhe, sondern nur mehr im Abfalle mit dem Intervalle und der Intensität sich ändern. Die von der ersten abhängige zweite Summation wird dadurch in gleicher Weise von dem Intervalle und der Intensität unabhängig. Und wie die erste Summationscurve sich in der Zeiteinheit um nahezu gleiche Stücke vergrössert, wenn einmal die Grenze der möglichen Zustandsänderung erreicht ist, so muss auch der Zuwachs für die zweite Summationscurve, von Intervall und Intensität unbeeinflusst, nahezu gleich sein. Die aus dem ganzen Vorgange resultirende Einzelcurve wird also um so niederer sein, je grösser die Reizanzahl in der Zeiteinheit gewesen ist. Vollständig erklärt sich daraus die gesetzmässige Aenderung der Einzelcurve mit dem Intervalle noch nicht, und hauptsächlich nicht die fortdauernde Verlängerung der Einzelcurve mit dem Intervalle und der Intensität; wir müssten nur annehmen, dass mit wachsender Zustandsänderung in dem letzten Theile des nervösen Apparates die Einzelcurve viel weniger in ihrer Höhe als ihrer Länge zunimmt.

Es darf aber auch nicht ausser Acht gelassen werden, dass die vermehrte Schlagzahl des Herzens auf die schon früher angegebene Weise direct auf die entstehende Summationscurve einwirken kann.

Ich will nicht behaupten, dass die Erklärung, welche ich für die Abweichung der Einzelcurven gegeben habe, in Allem richtig ist. Die Frage wird sich überhaupt erst entscheiden lassen, wenn in ähnlicher Weise der Zusammenhang zwischen Reiz und Auslösung an weiteren Beispielen quantitativ verfolgt ist. Ich glaube aber gezeigt zu haben, dass es sich der Mühe lohnt, solche Untersuchungen anzustellen, da selbst so complicirte Vorgänge, wie die Abhängigkeit der Pulszahl von der Accelerans-Reizung, in so regelmässiger Weise verlaufen, dass man ihre Gesetzmässigkeit zu ergründen im Stande ist.

Hauptresultate.

Zum Schluss möchte ich die hauptsächlichsten Resultate der vorliegenden Arbeit in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1) Die Wirkung, welche eine Reizung des N. accelerans auf die Schlagzahl des Herzens ausübt, lässt sich als eine Summation auffassen, welche sich aus den Wirkungscurven aller angewendeten Einzelreize zusammensetzt.

2) Diese Wirkung hängt von der Reizintensität, der Anzahl der Reize und dem Intervalle zwischen zwei einander folgenden Reizen ab, in der Weise wie es die Gesetze der Summation verlangen. Nur ist dabei noch die Annahme zu machen, dass die Wirkungscurven gleicher Reize nicht identisch sind, sondern im Verlaufe der Reizung eine Aenderung erfahren.

3) Die Wirkung des Einzelreizes, d. h. die Einzelcurve, hängt nicht allein von dem Zustande des nervösen Apparates und der Reizintensität ab, sondern ist auch eine Function der vorausgehenden Reizung, d. h. der Reizzahl. Die Einzelcurve nimmt anfangs mit der Reizzahl zu, um von einem bestimmten, dem x^{ten} Reize an unter Veränderung ihrer Form bis zu der Grenzcurve wieder sich zu verkleinern.

4) Mit der Reizintensität ändert sich die Grösse der Einzelcurve, vor Allem die der ersten Reize, während die Grenzcurve von ihr nahezu unabhängig ist.

5) Mit dem Intervalle ändert sich die Abhängigkeit der Einzelcurve von der Reizzahl. Je kleiner das Intervall ist, desto schneller wachsen die Curven der ersten Reize, nehmen aber für die folgenden Reize unter Umgestaltung ihrer Form um so bedeutender bis zur Grenzcurve ab. Mit der Verkürzung des Intervalles fällt auch die Grenzcurve mit einem um so späteren Reize zusammen. Die Gestalt der Grenzcurve hängt also hauptsächlich von dem Intervalle ab, und somit auch die Grösse der Umwandlung, welche die Form der Einzelcurve im Verlaufe der Reizung erleidet.

6) Die durch eine Verkürzung des Intervalles, wie durch eine Steigerung der Intensität zu erzielende Vergrösserung der Einzelcurve erreicht eine maximale Grenze, welche um so früher eintritt, je kleiner das Intervall, oder je grösser die angewendete Reizintensität ist; wobei in demselben Maasse die Annäherung an die Grenzcurve sich beschleunigt.

7) Die Veränderung der Einzelcurve während des Verlaufes der Reizung lässt sich durch die Annahme erklären, dass die durch die Reizung des N. accelerans hervorgebrachte Pulsvermehrung das Resultat mehrerer Summationen ist. Dieselben müssen in verschiedenen nervösen Apparaten zu Stande kommen, welche ungleiche Erregungscurven besitzen, wobei dem Endapparate die grössere Erregungscurve zukommen würde.

W. His, *Ueber embryonale Ganglienzellen.*

Bei menschlichen Embryonen von Schluss des ersten und von Anfang des zweiten Entwickelungsmonates sind die Zellen der Spinalganglien bipolar. Von den beiden Ausläufern derselben tritt der dorsal gelegene in den Hinterstrang des Rückenmarkes ein, während der ventral gerichtete den motorischen Wurzelfasern sich zuwendet, um in deren Begleitung peripheriewärts weiter zu gehen. Die Ausläufer beginnen mit einem conischen Ansatzstücke, verschmälern sich aber weiterhin zu dünnen Fasern vom Charakter von Axencylindern. Ihre Verbindung mit dem Zellenleib ist keine mittel- sondern eine seitenständige. Am meisten excentrisch liegt der Kern, auf diesen folgt eine mehr oder minder breite Plasmazone, von deren Randtheil die beiden Ausläufer nach entgegengesetzten Richtungen abgehen. Das beschriebene Verhalten der Zellen ist als einleitende Vorstufe für die Bildung T-förmiger Fasern aufzufassen. Für die Beobachtung ist es günstig, dass in diesen frühen Entwickelungsperioden das Ganglion noch nicht von Bindegewebselementen durchwachsen ist und dass daher die Zellen auch noch keine besonderen Scheiden tragen.

Alfred Fischer, *Neue Beiträge zur Kenntniss der Siebröhren*. Vorgelegt v. d. w. Mitgliede *Schenk*. (Mit 2 Tafeln.)

Durch eine geeignete Methode, welche ich bereits in den Berichten der deutschen botanischen Gesellschaft[1]) mitgetheilt habe, ist es mir gelungen, die Beschaffenheit des Siebröhreninhaltes genauer zu bestimmen, als es bisher geschehen war. Schon die wenigen Dicotylen, welche ich untersucht hatte, zeigten, dass die Siebröhren der Cucurbitaceen einen anders differenzirten Inhalt führten, als die von Anchusa, Coleus etc. Es lag die Vermuthung nahe, dass alle Siebröhren, welche Stärkekörner enthalten, die gleiche Beschaffenheit des Inhaltes zeigen, dass aber bei andern die Verhältnisse der Cucurbitaceen sich wiederfinden würden. Von diesen Erwägungen geleitet habe ich noch eine Anzahl von Dicotylen untersucht. Anderseits habe ich aber das abgebrühte Material dazu verwendet, die Lebensgeschichte der Siebröhren ven Cucurbita von Anfang bis zu Ende eingehend zu studiren. Anknüpfend an Cucurbita werde ich die Siebröhren der Dicotylen überhaupt besprechen.

Um den Inhalt der unverletzten Siebröhren kennen zu lernen, brühte ich anfangs ganze, ausgetopfte Pflanzen in heissem Wasser ab. Später führte ich nur einzelne Theile unverletzter Pflanzen in dasselbe ein. Man kann hierzu die Sprossenden benutzen, man kann aber mit gleich gutem Erfolg auch Stücke mitten am Stengel in das heisse Wasser hineinbringen. Selbstverständlich dürfen die abgebrühten Stücke erst nach einigen Minuten, welche zur Gerinnung und Fixirung des Siebröhrinhaltes genügen, abgeschnitten werden, wenn man unverletztes Material erhalten will. Die ganze Manipulation ist so einfach, dass ich auf eine genaue Beschreibung verzichten kann.

---

1) III. Bd. Ueber den Inhalt der Siebröhren in der unverletzten Pflanze.

Um Wiederholungen zu vermeiden, will ich mein Untersuchungsmaterial gleich hier aufzählen mit Angabe der Art und Weise, in welcher es gewonnen wurde. Ich werde später nur noch von unverletzt abgebrühtem Material oder von Kochmaterial reden.

1. Cucurbita Pepo (ganze Pflanze und einzelne Theile abgebrüht).
2. Ecballium Elaterium (ganze Pflanze).
3. Lagenaria vulgaris (oberster Theil einer eingetopften Pflanze).
4. Humulus Lupulus (einzelne, zweijährige Aeste).
5. Urtica dioïca (einzelne Stücken mitten am Stengel).
6. Xanthium Strumarium (ganze Pflanze).
7. Euphorbia Lathyris (ganze Pflanze).
8. Dahlia variabilis (einzelne Stücke).
9. Fraxinus excelsior (einjährige Aeste).
10. Tropaeolum majus (einzelne Stengelstücke).

Ausserdem wurden frische und in Alkohol aufbewahrte Stengelstücke, welche also partiell entleerte Siebröhren enthielten, von einer grossen Zahl von Dicotylen untersucht. Ein Verzeichniss derselben findet man am Ende der Abhandlung.

I. Die active Siebröhre.

Nach den Beobachtungen, welche bisher über die Functionsdauer der Siebröhren angestellt worden sind, unterliegt es keinem Zweifel, dass dieselben bei allen Pflanzen nur eine bestimmte Zeit lang functioniren und dann zu Grunde gehen. Man bezeichnet diesen Vorgang als Obliteration, ein Name, welcher treffend darauf hinweist, dass die Siebröhren bis auf unkenntliche Reste verschwinden; ihr Inhalt wird entleert, die Röhre zusammengedrückt. Bekanntlich liegen an der Peripherie der Siebtheile, in der secundären Rinde immer Schichten oder Gruppen solcher obliterirter Röhren, welche früher und leider zuweilen auch jetzt noch als besonderes Gewebe, als Hornprosenchym, bezeichnet werden. Die offenen, activen Siebröhren können aber, wie DE BARY zuerst erkannte, auch vorübergehend in einen Ruhezustand eintreten. Diese Veränderung findet jedenfalls im Winter bei allen unseren perennirenden Pflanzen statt. Man bezeichnet solche transitorisch geschlossene Siebröhren als passiv.

Da Untersuchungen über die activen Siebröhren wohl nur im Sommer angestellt werden, so ist keine Gefahr vorhanden, dass dieselben mit den passiven verwechselt werden. Dagegen hat man sorgfältig zwischen activen und obliterirenden Siebröhren zu unterscheiden, wenn man den Bau der ersteren erforschen will. Die bereits obliterirten Röhren sind ja sicher zu erkennen, die obliterirenden dagegen dürften zu mancher Verwechslung geführt haben. Beobachtungen, welche man an diesen gemacht hatte, übertrug man auf die activen Röhren, deren eigentlicher Bau obendrein bei der Untersuchung verletzter Pflanzen gar nicht zu ermitteln war.

Das Gesagte wird mein Streben rechtfertigen, den Begriff »active Siebröhre« strenger als bisher zu fassen. Bei allen Angiospermen ist eine Siebröhre erst dann und nur so lange als activ zu bezeichnen, als sie beim Zerschneiden der Pflanze Schlauchköpfe bildet. Die Entstehung dieser ist aber abhängig einmal von der Beschaffenheit der Siebplatten und zweitens von derjenigen des Inhaltes. Die ersteren müssen offen sein, gleichviel wie stark das sie umschliessende Callusgerüst ist. Der letztere muss noch flüssig und fähig sein, Schleim vor den Siebplatten abzuscheiden. Sobald eine dieser beiden Bedingungen wegfällt, die Siebplatten unwegsam werden oder der Inhalt in später zu schildernder Weise sich verändert hat, ist die Siebröhre nicht mehr activ, sondern in Obliteration begriffen.

1. **Der Inhalt.** Nach der Beschaffenheit des Inhaltes unterscheide ich drei Arten von Siebröhren bei den Dicotylen. Es ist nicht unmöglich, dass eine Ausdehnung meiner Untersuchung auf eine grössere Zahl von Pflanzen auch eine grössere Mannigfaltigkeit ergeben haben würde; berücksichtigt man aber die Erfahrungen, welche andere Forscher in dieser Beziehung mitgetheilt haben, so scheint die Annahme gerechtfertigt, dass auch die Siebröhren der noch nicht untersuchten Dicotylen einem der drei sogleich zu schildernden Typen angehören werden. Ich will dieselben zunächst kurz beschreiben und dann einige speciellere Bemerkungen folgen lassen.

1. Typus. S i e b r ö h r e n m i t g e r i n n b a r e m S a f t. Der Inhalt besteht aus einem schmächtigen, protoplasmatischen Wandbeleg und einem klaren, in der Hitze gerinnenden Safte, dem Siebröhrensaft. *Cucurbita*.

2. Typus. Siebröhren mit Schleim. Der Inhalt besteht aus einem zarten, mit kleineren und grösseren Schleimmengen beladenen Wandbelege und einer klaren, nicht gerinnenden, wässerigen Flüssigkeit. *Humulus.*

3. Typus. Siebröhren mit Stärkekörnern. Der Inhalt besteht aus einem zarten, geringe Schleimmengen führenden Wandbelege und einer klaren, nicht gerinnenden Flüssigkeit mit kleinen Stärkekörnern. *Coleus.*

Zu dem ersten Typus gehören ausser den Siebröhren von *Cucurbita* noch diejenigen von *Ecballium* (Taf. I, Fig. 1 u. 2) und *Lagenaria.* Nach Beobachtungen, welche ich früher an Alkoholmaterial gemacht habe, muss ich annehmen, dass alle *Cucurbitaceen* gleich gebaute Siebröhren besitzen, welche einen besonderen Typus repräsentiren. Ueber denselben habe ich bereits früher eine ausführliche Mittheilung veröffentlicht.[1]) Der Inhalt der activen Siebröhren besteht aus einem Wandbeleg und gerinnbarem Saft, Siebröhrensaft. Schlauchköpfe kommen in der lebenden Pflanze gar nicht vor, wie ich früher gezeigt habe. Schleim in grösseren Mengen fehlt, dagegen findet er sich in später zu besprechender Weise an den Siebplatten fast immer vor, aber ohne Schlauchköpfe zu bilden. Auch könnte man kleine, glänzende, winzige Tröpfchen oder Kügelchen, welche im Wandbelege regelmässig vorkommen, für Schleim halten. Dieselben könnten aber auch als Mikrosomen betrachtet werden, jedenfalls bestehen sie aus Eiweiss. Sie sind nicht mit den grossen Schleimtropfen zu verwechseln, welche in noch geschlossenen jungen Siebröhrengliedern abgeschieden werden. Ihr Schicksal wird uns im nächsten Kapitel zu beschäftigen haben.

Nach Beobachtungen an abgebrühtem Material kommen Siebröhren mit Schleim bei *Humulus Lupulus* (Taf. I, Fig. 3—5) und *Urtica dioïca* (Taf. I, Fig. 6, 7, 9) vor. Wahrscheinlich gehören die Siebröhren einer grösseren Zahl von Dicotylen hierher. Ich habe bei den weiter unten genannten Pflanzen, welche allerdings nur frisch oder in Alkohol aufbewahrt untersucht wurden, feststellen können, dass die partiell entleerten Siebröhren keine Stärkekörner enthalten und gleiche Beschaffenheit ihres Inhaltes zeigen, wie diejenigen von *Humulus* (Taf. I, Fig. 5) und *Urtica* (Taf. I, Fig. 6) nach der Verletzung der Pflanze. Es ist aber

---

1) Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft III.

nicht unmöglich, dass in dem einen oder dem andern Falle Siebröhren mit gerinnbarem Safte vorgelegen haben, welche ja nach einer partiellen Entleerung dasselbe Bild gewähren, wie die mit Schleim (Taf. I, Fig. 2). Da aber das Siebröhrensystem der *Cucurbitaceen* auch in anderer Beziehung so exceptionell ausgebildet ist, so halte ich es für wahrscheinlich, dass alle andern stärkefreien Siebröhren der Dicotylen dem zweiten Typus angehören. Ich möchte deshalb demselben noch folgende Pflanzen einordnen:

1. Parietaria officinalis	6. Oxalis stricta
2. Boehmeria nivea	7. Sedum maximum
3. Cannabis sativa	8. Potentilla anserina
4. Atriplex nitens	9. Rubus Idaeus
5. Chenopodium murale	10. Cytisus Laburnum.

Von den dicotylen Wasserpflanzen scheinen folgende hierher zu gehören: *Myriophyllum spicatum*, *Hottonia palustris* und *Hippuris vulgaris*. Bei diesen enthält der Wandbeleg der Siebröhren jedenfalls nur sehr geringe Schleimmengen, wie mir aus der Kleinheit der Schlauchköpfe zu folgen scheint. Nach den Angaben Russow's[1]) und Janczewski's[2]) werden sich vermuthlich hier anschliessen: *Tilia*, *Rhamnus* und *Aristolochia*. Wahrscheinlich werden auch die Siebröhren zahlreicher Monocotylen diesem Typus angehören, wie ich aus Beobachtungen an *Tradescantia virginica*, *Philodendron Sellowianum*, *Sparganium ramosum* schliesse.

Die activen Siebröhren in abgebrühten, unverletzten Internodien von *Humulus* und *Urtica* zeigen die in den Fig. 3, 4, 7 u. 9, Taf. I wiedergegebene Beschaffenheit ihres Inhaltes. Derselbe gliedert sich in einen zarten Wandbeleg mit Schleim und eine wässerige, nicht gerinnbare Flüssigkeit. Die letztere hat wahrscheinlich dieselbe Zusammensetzung wie der Zellsaft, eine Frage, welche sich vorläufig jeder Untersuchung entzieht. Der im Wandbelege abgelagerte Schleim verhält sich gegen Reagentien so, wie die Substanz der Schlauchköpfe in den partiell entleerten Röhren, woraus folgt, dass er aus Eiweiss besteht. Er findet sich seltener in Form von Tropfen, gewöhnlich bildet

1) Bau und Entwicklung der Siebröhren. Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft. VI. Bd. 1884. pag. 300.

2) Études comparées sur les tubes cribreux. Mémoires de la société nationale des scienses naturelles de Cherbourg. XXIII. 1880. pag. 305.

er längere oder kürzere, schmale Fäden, welche aber nicht die wässerige Flüssigkeit durchsetzen, sondern dem Wandbelege anhaften.

Ein ganz anderes Bild gewähren die Siebröhren, wenn man die lebende Pflanze oder gewöhnliches Alkoholmaterial untersucht. An einer Seite der Siebplatten hat sich Schleim in grösserer Menge zu ansehnlichen Schlauchköpfen angehäuft (Fig. 5 u. 6, Taf. I). In dem Protoplasma, welches hie und da von der Wand sich zurückgezogen hat, findet man nur noch wenig Schleim, dessen Hauptmasse bei der partiellen Entleerung der Siebröhren von der ausströmenden Flüssigkeit fortgerissen wurde und an der Siebplatte als Schlauchkopf sich ansammelte. So bestätigt sich abermals, dass der Siebröhreninhalt beim Zerschneiden der Pflanzen tief eingreifende Veränderungen erfährt und in dem unverletzten Organismus eine durchaus andere Gliederung besitzt.

Aus den Untersuchungen BRIOSI's[1]) ist es bekannt, dass die Siebröhren der meisten Dicotylen kleine Stärkekörner enthalten, welche gewöhnlich an den Siebplatten sich anhäufen und lebhafte Wimmelbewegung zeigen. Wenn auch neuere Beobachtungen ergeben haben, dass das Vorkommen der Stärke in den Siebröhren keineswegs ein so allgemeines ist, wie BRIOSI annahm, so steht es doch fest, dass die Mehrzahl der untersuchten Dicotylen stärkehaltige Siebröhren besitzt. Ich habe eine grössere Zahl dicotyler Pflanzen untersucht und werde dieselben am Schlusse der Arbeit aufzählen. Besonders wichtig erschien es mir, alle diese Untersuchungen zu gleicher Zeit und während des Sommers, an lebhaft wachsenden, gesunden Pflanzen auszuführen. Auf diese Weise allein war es möglich, vergleichbare Resultate zu erlangen, da die Jahreszeiten nach RUSSOW[2]) auch Einfluss auf den Inhalt der Siebröhren haben. Nach RUSSOW's[3]) und meinen Beobachtungen unterliegt es keinem Zweifel, dass die Mehrzahl der Dicotylen während der Vegetationszeit Stärke in den Siebröhren enthält. Ueber die besonderen Eigenschaften der kleinen, mit Jod meist weinroth sich färbenden Stärkekörnchen wolle man BRIOSI's oben citirte Abhandlung vergleichen.

1) Bot. Zeit. 1873.
2) Dorpat. Sitzungsb. l. c. pag. 312.
3) l. c. pag. 300.

Russow[1]) hat wohl zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass in den stärkehaltigen Siebröhren weniger Schleim (kleinere Schlauchköpfe) vorkommt, als in den stärkefreien, dass die Menge derselben im umgekehrten Verhältniss zum Stärkereichthum steht. Hieraus erklärt es sich, dass die Schlauchköpfe in den partiell entleerten Siebröhren des dritten Typus gewöhnlich einen geringen Umfang haben. Ich habe sie aber immer und zuweilen recht kräftige angetroffen (Fig. 11, 13 u. 15, Taf. I).

Ueber die Gliederung des Inhaltes in abgebrühten Pflanzen habe ich schon früher ausführlich berichtet. Neue Beobachtungen, welche ich an *Xanthium Strumarium*, *Euphorbia Lathyris*, *Dahlia variabilis*, *Fraxinus excelsior* und *Tropaeolum majus* angestellt habe, haben meine erste Mittheilung voll bestätigt. Die activen Siebröhren des abgebrühten Materiales enthalten einen feinen Wandbeleg mit geringen Schleimmengen und eine nicht gerinnende, wässerige Flüssigkeit mit Stärkekörnern (Fig. 10, 12 u. 14, Taf. I).

Beim Zerschneiden der lebenden Pflanze, welches eine partielle Entleerung der in starke Strömung versetzten Flüssigkeit zur Folge hat, bilden sich Schlauchköpfe. Man vergleiche die Figuren 10—16, Taf. I.

Die Stärkekörner, welche in theilweise entleerten Siebröhren meist an einer Seite der Siebplatte zusammen mit dem Schleim angehäuft sind, scheinen in der lebenden Pflanze sehr oft auf beiden Seiten derselben zu liegen. Ich möchte aber bezweifeln, dass die Stärkekörner überhaupt eine feste Lage längere Zeit beibehalten, da sie ausserordentlich leicht beweglich sind und bei jeder, auch noch so schwachen Strömung der Siebröhrenflüssigkeit ihren Ort verändern werden.

2. **Die Siebplatte.** Aus den Arbeiten Wilhelm's, Janczewski's und Russow's hatte sich ergeben, dass alle activen, partiell entleerten Siebröhren, denn nur solche haben die Genannten untersucht, stark callöse Siebplatten besitzen. Das Callusgerüst überzieht das ganze Cellulosesieb, hüllt dasselbe vollständig ein und verengt, je nach seiner eigenen Entwickelung, die Sieblöcher. Es erhob sich die Frage, ob die Siebplatten, welche in der verletzten Pflanze stets starke Callusgerüste tragen, auch in der unverletzten callös sind.

---

1) l. c. pag. 312.

Untersucht man abgebrühtes Material mit den bekannten Callusreagentien, besonders mit Chlorzinkjod-Jodkaliumjodlösung [1]) oder mit Corallin, so hat es auch noch bei starker Vergrösserung den Anschein, als ob die Siebplatten callusfrei wären. Ich habe lange Zeit diese Ansicht gehabt, bis es mir mit Hilfe der Oelimmersion gelang, an allen Platten der activen Siebröhren von Cucurbita Callus nachzuweisen. Allerdings ist derselbe so ausserordentlich dünn, dass er leicht übersehen werden kann. Die mit starker Corallinlösung behandelten Siebplatten nehmen nur einen schwachen rosaen Hauch an, an durchschnittenen Platten sieht man, dass eine äusserst dünne Lage von Callus auf ihnen sich ausbreitet (Fig. 23 u. 24, Taf. I).

Von einem Callusgerüst kann man nicht mehr reden, dieses ist dagegen in allen partiell entleerten Röhren neben deutlichen Schlauchköpfen vorhanden. Jetzt werden die Siebplatten durch Corallin augenblicklich schön hyacinthroth gefärbt, jetzt hat der Callus die oft beschriebene Mächtigkeit erreicht. Durch seine Vergrösserung, welche infolge der Verletzung eintritt, sind die Sieblöcher stark verengt, kurz alle jene Eigenthümlichkeiten haben sich eingestellt, welche bisher als normal für die active Siebröhre beschrieben worden sind. Richtig ist, dass dieselbe stets callöse Platten besitzt, der Callus bildet aber nur eine ausserordentlich dünne Schicht und so bleibt es bis zum Beginne der Obliteration. Er vergrössert sich aber, sobald die Pflanze verletzt wird. Ausführlich habe ich diese Verhältnisse bei Cucurbita studirt; bei den anderen Dicotylen, welche ich in abgebrühtem Material untersuchte, habe ich nur festgestellt, dass der Callus viel schwächer entwickelt ist, als nach partieller Entleerung der Siebröhre.

Eine andere Eigenthümlichkeit, welche man bisher nothwendig übersehen musste, wurde an den genannten Pflanzen, besonders wiederum an *Cucurbita* verfolgt. Die Siebplatten sind meistens mit kleineren Schleimmengen bedeckt, gleichviel welchem Typus die betreffende Siebröhre angehört. Es handelt sich aber hier nicht um Schlauchköpfe, sondern um eine Ausscheidung oder Anhäufung von Schleim am Rande der Sieblöcher und auf beiden Seiten der Platte. Ich werde *Cucurbita* ge-

---

1) Vergl. Russow, l. c. pag. 260.

nauer besprechen, für die anderen Pflanzen ergeben sich dann die betreffenden Verhältnisse von selbst.

Betrachtet man mit Jodglycerin, welches nur den Schleim und zwar gelbbraun, den Callus aber gar nicht färbt, behandelte Längsschnitte aus abgebrühtem Material, so sieht man, dass die Siebplatten ebenfalls gelbbraun und meist dunkler als der geronnene Siebröhrensaft gefärbt sind. Bei stärkerer Vergrösserung erkennt man, dass dieselben nicht ganz schleimfrei sind, sondern auf beiden Seiten niedrige Wärzchen des bekannten Schleimes zu tragen scheinen. Auf der Flächenansicht ergiebt sich aber, dass dieser nur die Ränder der Sieblöcher umsäumt. Die Balken des Cellulosesiebes sind schleimfrei und sind nur von einem dünnen »Schleimring« (*s*) eingefasst (Fig. 23, Taf. I).

Nicht selten trifft man in abgebrühtem Material Siebplatten, bei denen die einzelnen Schleimringe über die Cellulosebalken hinweg zu einer continuirlichen, dünnen Schicht verschmolzen sind. Jetzt ist das Sieb vollständig in eine »Schleimhülle« eingeschlossen, welche auch den dünnen Callusüberzug bedeckt und unsichtbar macht, daher leicht zu Täuschungen führen kann. Die Schleimhülle bildet gewissermassen eine zweite, äussere Umhüllung der Siebplatte. Diese wird von dem Siebröhrensaft, welcher den Schleim am Rande der Sieblöcher abscheidet, durchsetzt. Zu einer vollständigen Ausfüllung derselben mit Schleim kommt es in der lebenden Pflanze nicht, der Schleimbeleg beschränkt sich auf die Ränder der Löcher.

In dem abgebrühten Material, bei dessen Herstellung selbst bei grösster Vorsicht gewaltsame Bewegungen des Siebröhrensaftes nicht zu vermeiden sind, findet sich sehr oft ein kräftigerer Schleimbeleg vor, als für die lebende Pflanze anzunehmen ist. In dieser selbst muss die Dicke und Ausbreitung desselben aber grossen Schwankungen unterworfen sein, da auch hier zeitweilig stärkere Strömungen des Inhaltes kaum ausbleiben werden. Diese haben aber immer eine Abscheidung von Schleim aus dem Siebröhrensaft zur Folge, wie in überzeugendster Weise die Entstehung der Schlauchköpfe zeigt. Es ist deshalb unmöglich, ein Schema für eine normale active Siebröhre in Bezug auf die Grösse des Schleimbeleges, wie ich die besprochene Bildung nennen will, aufzustellen. Derselbe wird manchmal ganz fehlen, bald auf Schleimringe an den Porenrändern beschränkt, bald als vollständige Schleimhülle ausgebildet sein.

Ja, da der Schleim, wie die Entwickelung der Siebröhren zeigt, leicht und normaler Weise gelöst wird, so ist anzunehmen, dass an einer und derselben Platte der Schleimbeleg je nach Umständen seine Dicke verändern, vielleicht zeitweilig ganz schwinden wird.

Diese Fragen liessen sich natürlich durch meine Untersuchungen nicht lösen, sie werden sich einstweilen auch nicht lösen lassen. Als ein sicheres Ergebniss derselben hebe ich aber hervor, dass der klare Siebröhrensaft, ich rede immer noch von *Cucurbita*, sehr leicht Schleim abzuscheiden vermag und dass hierauf die Verschiedenheiten in der Stärke des Schleimbeleges zurückzuführen sind. An den Balken des Cellulosesiebes staut und verdichtet sich der in Bewegung begriffene Siebröhrensaft, es erfolgt Schleimabsonderung, wie bei der Schlauchkopfbildung, aber in viel geringerem Maasse. Ich habe auch viele Platten ohne Schleimbeleg gesehen. Die Löcher waren nur mit dem geronnenen Siebröhrensafte erfüllt.

Da die Siebplatten in der lebenden Pflanze nur sehr schwach callös sind, in partiell entleerten Röhren aber von einem starken Callusüberzug bedeckt werden, so fragt es sich, woher das Material zum Wachsthum des Callus gekommen ist. Der Schleimbeleg ist in verletzten Röhren nicht mehr zu sehen und entweder von dem ausströmenden Safte fortgerissen oder in Callus verwandelt worden. Es ist unmöglich, das eine oder das andere zu beweisen. Ueber die Abstammung des Callus, welcher bald ein Umwandlungsproduct der Cellulose, bald ein Erzeugniss des Inhaltes sein soll, geben die bisher an den verletzten und unverletzten activen Siebröhre angestellten Beobachtungen keinen Aufschluss. Wir werden diese Frage in den beiden nächsten Kapiteln wieder aufzunehmen haben.

II. Entwickelungsgeschichte der Siebröhre.

Da dieses Thema in letzterer Zeit von Wilhelm[1]), Janczewski[2]) und Russow[3]) ausführlich bearbeitet worden ist, so werde ich nur

1) Beiträge zur Kenntniss des Siebröhrenapparates dicotyler Pflanzen. Leipzig 1880.

2) l. c. Mémoires des sciences naturelles de Cherbourg. XXIII. 1880.

3) l. c. Dorpater Naturf. Gesellsch. VI. 1884.

einige Erweiterungen und Berichtigungen zu den Mittheilungen der Genannten geben. In erster Linie habe ich den Inhalt der Siebröhren berücksichtigt, dessen Entwicklung bisher nur von Wilhelm und, wie nicht anders möglich, nur in Rücksicht auf die damalige Ansicht über die Beschaffenheit der activen Siebröhren untersucht worden ist. Die Entwicklung der Siebplatten habe ich nur bei Cucurbita verfolgt in der Absicht, über den Ursprung des Callus Genaueres zu erfahren.

1. **Der Inhalt.** Die verschiedene Gliederung, welche derselbe in activen Siebröhren zeigt, liess erwarten, dass auch seine Entwicklung in verschiedener Weise verlaufen würde. Ich beginne meine Darstellung mit den Veränderungen, welche in dem jungen noch geschlossenen Siebröhrengliede nach Abscheidung der Gleitzellen sich abspielen, und werde zunächst Cucurbita als Repräsentanten des ersten Typus beschreiben.

Das junge Siebröhrenglied enthält bei Cucurbita einen kräftigen protoplasmatischen Wandbeleg mit einem grossen Zellkern und sonst wässerige, nicht gerinnbare Flüssigkeit, Zellsaft. In solchen durch porenfreie Querwände getrennten, also noch geschlossenen Röhrengliedern scheiden sich zunächst kleine, glänzende Tropfen aus, welche im Protoplasma liegen und bei genauerer Untersuchung als Schleim sich erweisen. (Fig. 17, Taf. I.) Sie nehmen während der langsamen Erweiterung des jungen Röhrengliedes an Zahl und Umfang schnell zu (Fig. 20, Taf. II), und finden sich sowohl an den Längs-, als auch an den Querwänden.

Diese Vorgänge hat bereits Wilhelm[1]) richtig beschrieben, die ferneren Entwickelungstadien des Inhaltes sind ihm dagegen entgangen. Wilhelm scheint bereits offene Siebröhren für noch geschlossene gehalten zu haben, wie Fig. 104, Taf. VIII und seine dazu gehörige Auseinandersetzung auf pag. 54 etc. schliessen lässt. Die citirte Figur, in welcher die einzelnen Siebröhrenglieder bereits deutliche Schlauchköpfe enthalten, stellt entschieden eine active Siebröhre dar. In Fig. 99 dagegen hat Wilhelm eines der von ihm übersehenen oder falsch gedeuteten Stadien abgebildet. Die Schleimtropfen sind verschwunden, »der Schleim hat die anfänglich homogene Beschaffenheit anscheinend mit einer körnigen vertauscht«.[2]) Die Zeichnung

1) l. c. pag. 41.
2) l. c. pag. 54 zu Fig. 99 Taf. VIII.

wurde nach einem Macerationspräparat angefertigt, in welchem natürlich der aus den Schleimtropfen bereits entstandene Siebröhrensaft zu einem feinkörnigen Gerinnsel erstarrt war. So glaube ich mir Wilhelm's Darstellung deuten zu sollen. Wilhelm setzte eben voraus, dass Schlauchköpfe bei normaler Entwicklung der Siebröhren entstehen müssten und so musste er auf Abwege gerathen.

Wir haben das junge Siebröhrenglied während der Abscheidung der Schleimtropfen verlassen. Wenn diese in grösserer Zahl auftreten, dann ist auch die Tüpfelung der zukünftigen Siebplatte vollendet. Kurz vor oder nach der Oeffnung dieser vollzieht sich nun mit dem Inhalte der Siebröhre eine sehr wichtige, bisher nicht beachtete Veränderung. Die Schleimtropfen verschwinden und werden in dem Zellsaft zu einer klaren, beim Erhitzen gerinnenden Flüssigkeit gelöst. Es hat sich, wie ich schon in den Berichten der deutschen botanischen Gesellschaft kurz erwähnt habe, Siebröhrensaft gebildet. Jetzt ist auch der Zellkern geschwunden, wahrscheinlich wird er zugleich mit den Schleimtropfen gelöst. Der Siebröhreninhalt hat nunmehr seine definitive Beschaffenheit erreicht, er besteht aus einem zarten protoplasmatischen Wandbelege und dem gerinnbaren Siebröhrensafte.

Die Oeffnung der Siebplatte und die Lösung der Schleimtropfen zum Siebröhrensaft scheinen selten zu gleicher Zeit, gewöhnlich nach einander einzutreten. Dann geht wohl meist die Bildung der Sieblöcher derjenigen des Siebröhrensaftes voraus. Ich habe aber auch nicht wenige Präparate gesehen, welche die umgekehrte Reihenfolge andeuteten. Die Figuren 18 und 19, Taf. I und Fig. 2, Taf. XV meiner Abhandlung in den Berliner Berichten zeigen, dass die Lösung der Schleimtropfen der Oeffnung der Siebplatten vorausging. Die Fig. 21, Taf. I veranschaulicht den umgekehrten Fall. Da beide Vorgänge, gleichviel in welcher Reihenfolge, jedenfalls schnell auf einander folgen, so ist das Resultat das gleiche. Die offene Siebplatte ist zunächst schleimfrei und erst später scheidet sich aus dem Siebröhrensaft der oben beschriebene, nicht selten erst am Ende der Functionsdauer auftretende Schleimbeleg ab.

Die Entwicklung des Inhaltes beginnt auch bei den Siebröhren des zweiten Typus, bei *Humulus* und *Urtica*, mit der Abscheidung glänzender Tropfen im Wandbeleg (Fig. 8, Taf. I).

Sie bestehen aus Schleim, welcher aber später nicht gelöst wird, wie bei *Cucurbita*, sondern seine Beschaffenheit auch in der activen Röhre beibehält. Nur die Gestalt der Schleimanhäufungen ändert sich, die Tropfen gehen in Fäden oder Stränge über, Fig. 8 und 9, Taf. I. Wahrscheinlich wird diese Veränderung durch die beim Oeffnen der Siebplatten eintretende Bewegung der wässrigen Siebröhrenflüssigkeit hervorgerufen.

Andere Umwandlungen in der Anordnung und Beschaffenheit des Inhaltes finden nicht statt, abgesehen von der Lösung des Zellkernes. Derselbe verschwindet allem Anscheine nach bei *Urtica* nicht vollständig. Als Rest desselben möchte ich ein kleines, scheibenförmiges Gebilde deuten, welches fast in allen activen Siebröhren von *Urtica*, bald an einer Siebplatte, bald anderswo liegend, vorkommt, (Fig. 7 und 9, Taf. I, K), und seinen Reactionen nach als Schleim aufzufassen ist. Sicher kann ich nicht entscheiden, dass hier ein Rest des Zellkernes vorliegt. Die Gestalt des fraglichen Gebildes hat mich zu dieser Vermuthung geführt.

Die geringen Schleimmengen, welche in den activen Siebröhren des dritten Typus gewöhnlich vorkommen, entstehen zugleich mit den Stärkekörnern in den noch geschlossenen, jungen Röhrengliedern. Die Stärkekörnchen liegen an beiden Seiten der zukünftigen Siebplatte. Ich habe diese Thatsachen sehr schön an abgebrühtem Material von *Xanthium Strumarium* (Fig. 16, Taf. I) beobachtet. Briosi deutet dasselbe für *Paeonia Moutan*[1]) an. Die weitere Ausbildung der Siebröhren ist von keinen nennenswerthen Veränderungen des Inhaltes begleitet, abgesehen von der Lösung des Zellkernes. Ein schönes Beispiel für die Entwickelung stärkehaltiger Siebröhren hat Wilhelm gegeben. Er beschreibt, dass bei *Vitis vinifera* in den noch geschlossenen Röhrengliedern kleine Stärkekörner und Schleimmassen entstehen.

2. **Die Siebplatte.** Die Entwickelungsgeschichte[2]) der Siebplatte ist, wie schon gesagt, von Wilhelm, Janczewski und Russow eingehend studirt worden. Es handelt sich hierbei besonders um das erste Auftreten des Callus und um seine Abstammung. In beiden Beziehungen sind die genannten Forscher

1) Bot. Zeit. 1873, pag. 326.
2) Siebröhrenapparat etc. pag. 16—17.

zu abweichenden Resultaten gelangt. Nach Wilhelm und Janczewski ist der Callus ein Umwandlungsproduct der Cellulose, nach Russow wird er vom Inhalte auf die Siebplatte abgelagert. Diese Ansicht, welche bereits von Hanstein[1]), dem Entdecker des Callus, aufgestellt wurde, vertreten auch de Bary[2]) und Strasburger[3]).

Unanfechtbare Beweise für eine der beiden Annahmen lassen sich nicht beibringen und hieraus erklären sich zum Theil die abweichenden Ansichten. Geht man von der Untersuchung alter, stark callöser Platten aus, so wird man den Callus für eine Auflagerung, für ein Product des Inhaltes ansehen. Versucht man dagegen die Abstammung des Callus an jungen Siebplatten zu erforschen, so wird man zunächst zu der anderen Ansicht neigen. So erklärt sich, dass Wilhelm und Janczewski, welche fast ausschliesslich auf entwickelungsgeschichtlichen Beobachtungen fussen, zu einer anderen Auffassung als Russow kommen mussten, welcher mit dem Studium der alten Calluspolster begann.

Wilhelm hat beobachtet, dass auf den noch nicht durchlöcherten Querwänden, den zukünftigen Siebplatten, rundliche Fleckchen von abweichendem Lichtbrechungsvermögen, welche aus Callus bestehen, sichtbar werden. Diese Callusfleckchen vergrössern sich und lassen zwischen sich nur ein Balkenwerk aus Cellulose, das zukünftige Sieb, frei. An den callösen Stellen entstehen schliesslich die Sieblöcher, der Callus breitet sich auch über die Cellulosebalken aus und hüllt die Siebplatte allseitig in das sogenannte Callusgerüst ein. Aus diesen Beobachtungen folgert Wilhelm, dass der Callus durch Umwandlung der Cellulose entsteht. Er hat doch nur festgestellt, dass auf der anfangs homogenen Querwand rundliche Fleckchen auftreten, welche aus Callus bestehen. Hieraus aber zu schliessen, derselbe sei aus der Wandsubstanz hervorgegangen, ist ebenso verfehlt, wie der Schluss, dass der Oelfleck auf dem Papier durch eine locale chemische Umwandlung desselben entstanden sei. Eine weitere Begründung seiner Ansicht hat Wilhelm nicht gegeben.

---

1) Die Milchsaftgefässe etc. pag. 26.
2) Vergleichende Anatomie pag. 184.
3) Das botanische Practicum pag. 150 (Pinus silvestris).

Janczewski ist zu Resultaten gelangt, welche denen Wilhelm's, Russow's und meinen eigenen widersprechen. Er beschreibt die Entwickelung der Siebplatte (bei *Phragmites* und *Aristolochia*) folgendermassen. Auf beiden Seiten der anfangs homogenen Cellulosewand bilden sich correspondirende Warzen, welche zunächst ebenfalls aus Cellulose bestehen. Diese Warzen verwandeln sich unter gleichzeitiger Vergrösserung in Callus. Zwischen den Calluswarzen bleibt ein zunächst aus reiner Cellulose bestehendes Gitterwerk übrig, welches das Sieb liefert und später von Callus überzogen wird. Die Löcher entstehen dadurch, dass die zwischen den correspondirenden Calluswarzen vorhandene Cellulose sich in Callus verwandelt. Jetzt ist die Querwand durchlöchert, die Löcher sind aber mit Calluspfropfen verschlossen. Diese werden später von den Verbindungsfäden durchbohrt. Wenn wirklich zunächst Cellulosewarzen sich bildeten und an ihrer Stelle später Calluswarzen vorkämen, dann würde die Entstehung dieser aus jenen mit grosser Wahrscheinlichkeit angenommen werden können. Einstweilen erheben sich aber einige Zweifel gegen die Janczewskischen Beobachtungen.

Janczewski hat nur mit Chlorzinkjod (chlorure de zinc jodé) gearbeitet und schliesst immer dann auf Callus, wenn er eine braune Färbung erhält. Unzersetztes Chlorzinkjod färbt aber nach Wilhelm's [1]), Russow's [2]), und meinen eignen Erfahrungen den Callus gar nicht, bringt ihn nur zu starker Quellung. Zu dieser Unklarheit, welche vielleicht nur durch eine ungenaue Ausdrucksweise hervorgerufen ist, kommt hinzu, dass die ganze Ansicht Janczewski's ausserordentlich complicirt, geradezu paradox ist. Es bilden sich correspondirende Verdickungen auf der Cellulosemembran, diese wird also gewissermassen primär getüpfelt. Die Verdickungen vergrössern sich, dann sollen sie sich in Callus verwandeln und an ihrer Stelle sollen später die Siebporen entstehen. Die anfangs dünnen Membranstellen dagegen liefen das Cellulosesieb. Gerade diese müssten aber, nach Analogie zu schliessen, zu den Siebtüpfeln und schliesslich zu den Löchern sich umbilden. Da endlich nicht anzunehmen ist, dass die Siebplatten bei verschiedenen Pflanzen

1) l. c. pag. 35.
2) l. c. pag. 260.

in verschiedener Weise sich entwickeln, so kann man, wie auch Russow gethan hat, die Angaben Janczewski's, deren Allgemeingiltigkeit er sicher selbst voraussetzt, auch an andern als den von ihm untersuchten Pflanzen controliren.

Meine Untersuchungen an Cucurbita haben nun in Uebereinstimmung mit Russow ergeben, dass der Callus nicht in Form von Warzen auftritt, sondern die seichten Tüpfelgrübchen auskleidet. Aber auch später treten nicht Calluswarzen auf, derselbe hat immer die in den Figuren 28 und 29 Taf. I abgebildete Form, welche Russow ganz treffend als seichte Schüsselchen beschreibt. Erst dann, wenn der Callus auch über die Balken des Cellulosesiebes sich ausbreitet (Fig. 28, Taf. I), bekommt man den Eindruck von Calluswarzen. Diese sind aber auch jetzt nicht vorhanden, man hat es nur mit bei gewissen Ansichten warzenförmig erscheinender Cellulosebalken zu thun, welche auf ihrer Oberfläche mit Callus überzogen sind. Wie Janczewski zu seiner Auffassung gelangt ist, kann ich mir nicht erklären, da grobe Beobachtungsfehler ihm in seiner Arbeit nicht nachzuweisen sind. Jedenfalls verläuft die Entwickelung der Siebplatten bei *Cucurbita* ganz anders.

Russow hat feststellen können, dass die jungen Siebplatten schon vor dem Sichtbarwerden des Callus getüpfelt sind und dass dieser in die sehr seichten Tüpfelgrübchen abgelagert wird. Diese Ablagerung hat Russow natürlich nicht direct beobachten können, sie ist nur erschlossen aus der eben mitgetheilten Thatsache, dass die Platten vor dem Erscheinen des Callus getüpfelt sind. Hieraus allein über die Abstammung desselben eine Ansicht ableiten zu wollen, würde voreilig sein und deshalb hat Russow noch Folgendes für seine Behauptung vorgebracht. Der Callus erscheint nicht in rundlichen, verwaschenen Tupfen, sondern in rundlich eckigen Plättchen, welche an durchschnittenen Membranen haarscharf von der Cellulose abgegrenzt sind, wie unsere Figuren 27 und 29 Taf. I zeigen. Diese Thatsachen, welche ich voll bestätigen kann, veranlassen Russow zu folgenden allgemeinen Bemerkungen: »Es ist nicht denkbar, dass bei einer chemischen Umwandlung einer Substanz in eine andere während dieses Processes eine scharfe Grenze zwischen diesen Substanzen

1) l. c. pag. 303.

bestehe.«[1]) Diese Bemerkung mag richtig sein, man sollte aber so allgemein gehaltene Sätze nicht für oder gegen die Deutung bestimmter Thatsachen verwenden, da sie nichts beweisen und doch leicht zu Täuschungen führen können.

Besser ist der Einwand Russow's[2]), dass in alten, stark callösen Platten das Cellulosegitter nicht dünner, in manchen Fällen dicker geworden zu sein scheine als früher und dass man nicht begreifen könne, wie dasselbe an der Oberfläche in Callus sich verwandeln, eine vielmal stärkere Calluslage abscheiden könne, ohne selbst dünner zu werden. Mehr als ein Wahrscheinlichkeitsbeweis liegt aber auch in dieser Bemerkung nicht und über einen solchen ist auch Russow, ebenso wie Wilhelm und Janczewski, nicht hinausgekommen. Mit einer grösseren Wahrscheinlichkeit muss man sich aber hier begnügen, da man immer nur einzelne fixirte Stadien, niemals continuirliche Reihen beobachten kann. Ich habe mich bemüht, einige neue Wahrscheinlichkeitsgründe für Russow und gegen Wilhelm und Janczewski aufzusuchen.

Nach meinen Beobachtungen verläuft die Entwickelung der Siebplatte und des Callus bei *Cucurbita* folgendermassen. An der jungen Querwand, der zukünftigen Siebplatte, lässt sich, wie Russow gezeigt hat, schon vor dem Auftreten des Callus eine seichte Tüpfelung in glücklichen Präparaten erkennen. Aber diese primären Tüpfel sind noch nicht die sogenannten Siebtüpfel, aus welchen später die Sieblöcher werden, sondern sie sind klein und ausserordentlich seicht. Die Membran ist »schwach wellenförmig hin- und hergebogen, der Unterschied in der Dicke zwischen den dünneren und dickeren Partien der Wand ist nur am Rande der Platte deutlich, nach der Mitte derselben zu aber weniger leicht zu erkennen«[3]) (Fig. 53, Taf. II). Solche callusfreie, seicht getüpfelte Querwände kommen selten zur Beobachtung, dieses Stadium scheint schnell vorüberzugehen.

Es beginnt nun die Bildung des Callus bei gleichzeitiger Vergrösserung der Tüpfel, welche nach und nach zu den Siebtüpfeln sich verbreitern und vertiefen. Der Callus tritt zunächst nur in den Tüpfelgrübchen auf, erfüllt dieselben, wie Russow

1) l. c. pag. 305—306.
2) l. c. pag. 306.
3) cf. Russow, l. c. pag. 303.

gezeigt hat, in Form flacher Plättchen, oder seichter Schüsselchen von rundlich eckigem Umriss (Fig. 22, Taf. I), der Gestalt der Tüpfel entsprechend. Der Callus setzt sich von seinem ersten Auftreten an sehr scharf gegen die Cellulose ab, eine Thatsache, welche Russow bereits hervorgehoben hat (Fig. 27 u. 29, Taf. I).

Der Inhalt des jungen Siebröhrengliedes zeigt immer schon einige Schleimtropfen, wenn die Callusbildung anfängt und es erhebt sich die Frage, ob beide Vorgänge nicht vielleicht im Zusammenhange stehen. Einige Präparate, von denen eines in Figur 29, Taf. I abgebildet ist, haben mich auf diese Vermuthung geführt. Man sieht, dass die junge Siebplatte bereits deutlich getüpfelt ist und dass die Tüpfelgruben von scharf abgegrenzten Callusplättchen (*ca*) ausgekleidet werden. Der Wandbeleg hat sich verschoben, zeigt aber noch deutlich die warzenförmigen Aussackungen, welche er in die Tüpfelgrübchen hinab getrieben hatte. Im Grunde jeder dieser Ausstülpungen hat sich glänzender Siebröhrenschleim (*s*) abgesondert, welcher hier ebenso wie an beliebigen andern Stellen des Wandbeleges abgeschieden wurde. Die Form der Aussackungen entspricht genau der der Tüpfelgrübchen, deren Callusbelege wiederum genau den Schleimansammlungen entsprechen. Kurz, es sieht so aus, als ob vom Wandbeleg zunächst Schleim abgeschieden worden wäre und dieser dann unter Verwandlung in Callus in den Tüpfeln sich ablagerte. Ob hierbei die Cellulose mitwirkt, oder ob der Callus nur aus Schleim hervorgeht, ist nicht zu sagen. Man könnte ja das Bild auch folgendermassen deuten. In den Tüpfelgrübchen wird Schleim abgeschieden, dieser wirkt gewissermasen ätzend auf die Cellulose, verwandelt dieselbe in Callus und bewirkt dadurch eine Vertiefung und Verbreiterung der Tüpfel. Man sieht, eine sichere Entscheidung ist auch hier nicht möglich, obschon der Augenschein mehr dafür spricht, dass der Schleim auf die Cellulose abgelagert und vielleicht mit, vielleicht ohne Theilnahme dieser, in Callus verwandelt wird.

Bei der Weiterentwicklung der Siebplatte rücken sich die Callusplättchen in den correspondirenden Tüpfelchen immer näher, da die zwischen ihnen vorhandene Tüpfelwand immer dünner und dünner wird (Fig. 52, Tafel II). Vielleicht vereinigt sich die hierbei in Lösung gehende Cellulose mit dem Schleim zu Callus, hierüber weiss ich nichts. Noch ehe die Oeffnung der

Siebtüpfel erfolgt, breitet sich der Callusüberzug in dünner Schicht auch auf die Balken des Cellulosesiebes aus (Fig. 28, Taf. I). Das nächste Stadium, die Oeffnung der Poren und das Verhalten des Callus hierbei, habe ich ebenso wie meine Vorgänger nicht untersucht. Das Resultat dieser letzten Veränderungen, die fertige, offene Siebplatte, ist bereits geschildert worden.

Im Hinblick auf die Verhältnisse, welche wir an dieser kennen gelernt haben, ist es möglich, die Vorgänge bei der Durchbohrung der Siebtüpfel vermuthungsweise voraus zu bestimmen. Wenn die Zellwand zwischen den correspondirenden Callusplättchen in den Tüpfelgruben vollständig gelöst oder geschwunden ist, dann müssen sich zunächst diese Callusplättchen berühren und die neue Siebpore verschliessen. Später ist dieselbe aber weit geöffnet und nur am Rande von einer dünnen Callusschicht ausgekleidet. Es muss also nothwendig eine partielle Auflösung des Callus stattgefunden haben, durch welche die Siebporen für den Siebröhrensaft wegsam wurden. Vielleicht hat dieser selbst die Fähigkeit, Callus aufzulösen.

III. Die Obliteration.

Auf die Vorgänge bei der Obliteration musste ich mein Augenmerk einiger Widersprüche wegen lenken, welche zwischen meinen neuen Beobachtungen über die Beschaffenheit des Inhaltes und denjenigen Angaben scheinbar bestanden, welche KOCH[1]) und ich[2]) über prall mit Schleim erfüllte Röhren veröffentlicht haben. Der Erstere fand dieselben in absterbenden Blättern von *Ecballium*. Ich habe die gleiche Erscheinung in der Schale junger Kürbisfrüchte, welche gleich nach ihrer Lostrennung von der Pflanze in Alkohol gebracht worden waren, und an obliterirenden, stark callösen Röhren der Internodien beobachtet.

Da aber der bekannte Schleim, wie ich neuerdings gezeigt habe, die activen Siebröhren nicht, wie ich früher annahm, prall erfüllt, ja in denselben nicht einmal in Form von Schlauchköpfen vorkommt, so erhob sich die Frage, wie derselbe in den ab-

---

1) Ueber den Verlauf und die Endigungen der Siebröhren in den Blättern. Botan. Zeitg. 1884, pag. 405.

2) Siebröhrensystem der Cucurbitaceen, pag. 37 u. 47.

sterbenden Blättern von *Ecballium* und in den obliterirenden Siebröhren der Internodien entsteht. Kunstproducte konnten hier nicht vorliegen, diese Vermuthung schien nur betreffs der jungen, in Alkohol gebrachten Früchte einige Berechtigung zu haben. Ich werde später zeigen, dass diese Annahme der Wahrheit entspricht. Zunächst handelt es sich um die Entstehung des in obliterirenden Siebröhren vorkommenden Schleimes, welcher ein normales Erzeugniss der lebenden Pflanze ist. Dies folgt aus der Beobachtung, dass obliterirende, schleimerfüllte Röhren in abgebrühtem und lebendem Material ebenso regelmässig an denselben Orten sich vorfinden, wie im Alkoholmaterial.

Die ersten Veränderungen, welche an alternden Siebröhren auftreten und die Obliteration einleiten, betreffen den Inhalt. So bestätigt sich DE BARY's Ausspruch, dass eine vom Druck (der umliegenden Gewebe) unabhängige »Veränderung der obliterirenden Organe, speciell ihres Inhaltes, die primäre und der Druck nur eine mitwirkende Ursache der Erscheinung ist«.[1]) Ich glaubte früher, mich dieser Aussicht nicht anschliessen zu können, da ich annahm, dass die activen Siebröhren bereits prall mit Schleim erfüllt seien und ohne weitere Veränderung des Inhaltes obliterirten[2]). Ich freue mich, durch eigene Untersuchungen meine irrigen Meinungen berichtigen zu können.

1. **Der Inhalt.** Bei den activen Siebröhren des ersten Typus, denjenigen der *Cucurbitaceen*, besteht der Inhalt aus einem Wandbeleg, gerinnbarem Saft und dem verschieden starken Schleimbeleg, welcher die von einer dünnen Callusschicht überzogenen Siebplatten bald vollständig als Schleimhülle bedeckt, bald in Form von Schleimringen nur die Sieblöcher umsäumt. Schleim ist in verschwindend kleiner Menge nur vorhanden und doch sind die obliterirenden Siebröhren oft prall davon erfüllt. Zahlreiche Beobachtungen haben ergeben, dass die Inhalte obliterirender Siebröhren nicht immer die gleichen Veränderungen erfahren, dass das Endziel — die Entleerung der Röhre — auf zwei verschiedenen Wegen erreicht wird.

Am häufigsten verläuft die Obliteration folgendermassen: Der klare Siebröhrensaft erstarrt zu Schleim, welcher als glänzender Faden die Siebröhre ganz ausfüllt. Gleichzeitig wird

1) Vergl. Anatomie, pag. 577.
2) Cucurbitaceen, pag. 46.

dieselbe von dem umliegenden Gewebe bald mehr, bald weniger zusammengedrückt; deshalb sind auch die obliterirenden Siebröhren meist beträchtlich enger als die activen. Einzelne Stadien dieses Erstarrungsvorganges aufzufinden ist mir nicht gelungen; ich bin der Meinung, dass derselbe sehr schnell verläuft. Diese Ansicht findet eine Stütze in der sicher ermittelten Thatsache, dass der Siebröhrensaft sehr leicht und schnell Schleim bei der Bildung der Schlauchköpfe abscheidet. Dasselbe findet auch bei der Obliteration, aber ohne Verschiebung des Inhaltes statt, die ganze Menge des Siebröhrensaftes verwandelt sich unter Wasserabgabe in Schleim. Die leichtlösliche Modification des Eiweisses, welche im Safte gelöst war, geht wieder in die unlösliche, den zähen Schleim über.

Dieser erleidet aber noch neue Veränderungen. Zunächst stellt derselbe, wie schon erwähnt, einen glänzenden, homogenen Faden dar (Fig. 33, Taf. I), welcher schon bei schwacher Vergrösserung sehr scharf hervortritt. Später wird der Schleim brüchig, es entstehen Querrisse und grössere Lücken, welche darauf hinweisen, dass derselbe eintrocknet. Hiermit im Einklange steht die Thatsache, dass das Lumen der Siebröhre wieder abgenommen hat. Die Lücken und Risse werden breiter, vermehren sich, der Schleimfaden zeigt die in Figur 34, Taf. I wiedergegebene Beschaffenheit. Endlich ist er in einzelne, durch grosse Lücken getrennte Stücke zerfallen, welche immer kleiner werden und endlich ganz verschwinden. Jetzt ist die Siebröhre entleert, der aus dem Siebröhrensaft hervorgegangene glänzende Schleim ist gelöst, aus der obliterirten Siebröhre entfernt worden. Diese wird nun gänzlich zusammengedrückt. Bis zu diesem Endstadium gelangt der Process in der lebenden Pflanze immer.

Wenn dieselbe dagegen im Herbste abstirbt, so gerinnt nur noch der Siebröhrensaft zum zähen Schleim, welcher dann mit dem übrigen Gewebe vertrocknet oder verfault. Hieraus erklären sich die Beobachtungen, welche Koch an absterbenden Blättern von *Ecballium*, ich an herbstdürren Stengeln von *Cucurbita*[1]) gemacht habe. Meine früher ausgesprochene Vermuthung, dass diese einige Auskunft über die normale Beschaffenheit des Siebröhreninhaltes geben könnten, hat sich

---

1) Siebröhrensystem der Cucurbitaceen, pag. 11, Taf. IV, Fig. 12.

sonach bestätigt. Nur die richtige Deutung des Beobachteten war mir damals noch nicht möglich. Ich nahm an, dass die zu einem Strang contrahirte Schleimmasse die active Siebröhre früher prall erfüllte. Jetzt weiss ich, dass der Schleimstrang durch die Erstarrung des klaren Siebröhrensaftes entsteht.

Mit einigen Worten habe ich an dieser Stelle auf KOCH's Beobachtungen an *Ecballium*-Blättern einzugehen. KOCH beschreibt, dass er in Blättern, welche im November einer im freien Lande wachsenden Ecballiumpflanze entnommen wurden, die Siebröhren prall mit glänzendem Schleim erfüllt fand. KOCH bezeichnet diesen Zustand als den herbstlichen und giebt an, dass er nur in den erwähnten Blättern, aber nicht in Stengel und Blattstiel und zu keiner anderen Zeit solche schleimerfüllte Röhren beobachtet hat. Ich habe oben gezeigt, dass diese im normalen Verlauf der Obliteration auftreten. Wenn KOCH länger gesucht hätte, dann würde er ebensolche Röhren auch im Blattstiel und im Stengel aufgefunden haben und nicht bloss im November, sondern zu jeder Zeit. Die Obliteration der Siebröhren in den Blattnerven beginnt auch keineswegs erst in diesem Monate, die Jahreszeit ist zunächst gleichgiltig. Wenn man im October gelbwerdende oder gelbe Blätter von *Ecballium* untersucht, so findet man ebenfalls obliterirende, prall mit Schleim erfüllte Röhren, so wie KOCH beschreibt. (Fig. 45 u. 47, Taf. II.)

Der Genannte hat aber auf einen Punkt nicht geachtet, welcher für die Deutung der Erscheinung hätte massgebend sein sollen: er hat die Siebplatten gar nicht berücksichtigt. Diese sind aber regelmässig durch dicke Calluspolster verschlossen, ein weiteres Zeichen dafür, dass Obliteration eingetreten ist. Zuweilen, nicht selten, trifft man Siebröhren, bei denen einige Siebplatten nicht callös aufgetrieben sind, so dass es bei flüchtiger Beobachtung den Anschein hat, als ob die schleimerfüllte Röhre noch offen wäre. Sieht man aber genauer hin, so findet man, dass stark callöse Platten mit den andern abwechseln, so dass durch zwei Calluspolster nicht bloss ein einziges, sondern zwei oder drei Röhrenglieder abgeschlossen werden (Fig. 46, Taf. II). KOCH hat, wie ich schon gesagt, diese Verhältnisse gar nicht berücksichtigt.

Es ist nothwendig, an dieser Stelle einige Bemerkungen über die physikalischen Eigenschaften des Siebröhrenschleimes einzufügen. Derselbe kommt vor in geschlossenen, jungen Röh-

rengliedern, als Schleimtropfen, ferner an der Siebplatte der activen, als Schleimbeleg, und endlich im obliterirenden, als Schleimstrang. Die Eigenschaften einer allerdings zähen Flüssigkeit scheint der Schleim in sich entwickelnden Siebröhren zu haben. Seine Abscheidung in Tropfen spricht dafür. Dagegen ist der Schleim in obliterirenden Siebröhren starr und fest, keine Flüssigkeit mehr. Dass aber dem Schleim jene Eigenschaften zukommen, folgt aus seinem Verhalten zu Reagentien. In Kali quillt er stark auf, wie KOCH[1]) und vor ihm sehr ausführlich HANSTEIN[1]) beschrieben haben. Die gequollenen Schleimfäden lassen sich sehr stark dehnen, ringeln sich, wenn sie an der durch Kali bewirkten Streckung verhindert werden, in Schlangenwindungen hin und her, kurz sie zeigen lauter Eigenschaften nicht einer Flüssigkeit, sondern eines festen, kautschukähnlichen Körpers. Dieses Verhalten beobachtet man an Präparaten von lebendem Material, eine künstliche Gerinnung ist also ausgeschlossen; diese wird auch durch Kali oder Schwefelsäure nicht erst bewirkt, denn die glänzenden Schleimstränge sind schon vorher sichtbar und quellen nur noch auf. Da der Schleim Eiweissreaction zeigt, so ergiebt sich, dass bei der Obliteration das im Siebröhrensafte gelöste Eiweiss als fester, kautschukähnlicher Körper abgeschieden wird.

Die eben dargelegten Eigenschaften des Schleimes erklären auch die Erscheinung, dass derselbe aus angeschnittenen, obliterirenden Siebröhren nicht ausfliesst, dass diese z. B. in den gelben Ecballiumblättern keine Schlauchköpfe bilden. Hiermit fällt aber KOCH's Einwand gegen meine seiner Ansicht nach ebenso unwahrscheinliche als unbegründete Behauptung über die Entstehung der Schlauchköpfe. In der Wand älterer Früchte finden sich obliterirende, schleimerfüllte Siebröhren in grosser Zahl; diese fliessen, wie KOCH mir voraussagt, nicht aus, wenn man die Frucht in Stücke schneidet. Aber nicht deshalb, weil bei der Verletzung der Pflanze überhaupt keine Bewegung des Siebröhreninhaltes und infolge dessen auch keine Schlauchkopfbildung stattfindet, sondern nur deshalb, weil sie nicht mehr mit Siebröhrensaft, sondern mit starrem Schleim erfüllt sind.

---

1) l. c. pag. 406.
2) Milchsaftgefässe pag. 29.
3) Siehe KOCH's Kritik meiner Untersuchungen über das Siebröhrensystem der Cucurbitaceen. Bot. Zeit. 1885.

Die Obliteration des Inhaltes kann aber, wie schon gesagt, noch in anderer Weise geschehen, ohne Bildung des Schleimstranges. Der Process beginnt mit einer Veränderung des Inhaltes, welche nur im abgbrühten Material sichtbar ist und darin besteht, dass der Siebröhrensaft nicht mehr ein feinkörniges, sondern ein grobflockiges Gerinnsel (Fig. 36 u. 38, Taf. I) liefert. Gleichzeitig treten im Wandbeleg der Siebröhren wieder Schleimtropfen in grösserer Menge auf, es scheint, dass der Siebröhrensaft nicht mehr im Stande ist, den Schleim aufzulösen. Welchem Zustande in der lebenden Pflanze das grobflockige Gerinnsel entspricht, habe ich nicht entscheiden können, jedenfalls einer Lösung, einem Siebröhrensaft von einer nicht näher bestimmten Beschaffenheit.

Anfangs ist das grobkörnige Gerinnsel sehr dicht, weist also darauf hin, dass noch viel gerinnbare Substanz im Siebröhrensaft enthalten war. Nach und nach wird das Gerinnsel lockerer, der Raum, welcher von einer wässerigen Flüssigkeit eingenommen zu werden scheint, vergrössert sich (Fig. 40, Taf. I). Später zeigen sich nur noch vereinzelte Flocken, die letzten, spärlichen Reste der einstens im Siebröhrensafte gelösten Eiweisssubstanzen. Auch diese schwinden, es bleibt nur der Wandbeleg mit einigen Schleimtropfen übrig (Fig. 42, Taf. I). Endlich werden auch diese beiden entfernt, die leere Siebröhre bleibt zurück und wird zerdrückt.

Es erhebt sich die Frage, ob die beiden beschriebenen Arten der Obliteration nicht bloss Stadien eines und desselben Vorganges sind, deren Zusammenhang sich der Wahrnehmung entzieht. Nach meinen sehr zahlreichen Beobachtungen verhält es sich folgendermassen. Der Inhalt obliterirender Siebröhren erleidet zunächst immer erst ein und dieselbe Veränderung, welche darin besteht, dass Schleimtropfen im Wandbeleg auftreten und dass der Siebröhrensaft ein grobkörniges Gerinnsel liefert. Solche Siebröhren würden bei der Verletzung der Pflanze noch gewöhnliche Schlauchköpfe bilden und durchaus den activen gleichen, da ihre Siebplatten in der Regel noch offen sind. Die weiteren Veränderungen führen nun entweder zum Schleimstrang oder zur langsamen Verarmung des Siebröhrensaftes.

Im ersteren Falle, welcher unter starkem Druck der umliegenden Gewebe eintritt, wird dem veränderten Siebröhrensafte eben durch diesen starken Druck das Wasser schnell

entzogen und es bleiben, wie bei der Schlauchkopfbildung, die schwer löslichen Eiweisssubstanzen als Schleim, hier als homogener Schleimstrang, zurück. Dieser wird dann, wie oben beschrieben, aufgelöst. Dass wirklich der starke Druck der umliegenden Gewebe die Bildung des Schleimstranges veranlasst, möchte ich daraus entnehmen, dass die schleimerfüllten Röhren immer einen viel geringeren Durchmesser haben, als diejenigen, deren Inhalt anders obliterirt. Bei schwächerem Druck werden die eiweissartigen Bestandtheile des Siebröhrensaftes nach und nach fortgeführt, wie daraus folgt, dass derselbe ein immer schwächeres und substanzärmeres Gerinnsel liefert.

Meine Ansicht würde also die sein, dass beim Beginn der Obliteration der Inhalt in allen Siebröhren die gleiche Veränderung (Abscheidung von Schleimtropfen, grobkörniges Gerinnsel) erleidet, dass aber später zwei Wege zur gänzlichen Entleerung der Siebröhren führen. Die Obliteration mit Schleimstrang tritt vermuthlich bei starker Quetschung der obliterirenden Röhre ein; sonst findet Obliteration mit Erhaltung des Siebröhrensaftes und langsamer Verarmung desselben statt. Meine Annahme, dass der Siebröhrensaft obliterirender Röhren, welcher ein grobkörniges Gerinnsel liefert, unter schneller Wasserentziehung zum Schleimstrang erstarrt, stützt sich auf folgende Beobachtung.

Führt man das wachsende Ende einer unverletzten Kürbispflanze in starken Alkohol und lässt dasselbe ungefähr drei Stunden darin verweilen, so kann man es unter Alkohol abschneiden, ohne dass noch Siebröhrensaft ausfliesst. Der Alkohol hat also den Inhalt der Siebröhren fixirt, aber nach dem Alter dieser in verschiedener Weise. In den activen Siebröhren haben sich Schlauchköpfe gebildet unter dem Einfluss der Strömungen, welche durch die wasserentziehende Kraft des Alkohols hervorgerufen wurden (Fig. 37, Taf. I). Diejenigen Siebröhren dagegen, welche an der Peripherie der Siebtheile liegen nnd bereits in Obliteration begriffen sind, erweisen sich prall mit Schleim erfüllt, deutlich sieht man aber von diesen sich einzelne Schleimtropfen im Wandbeleg abheben. (Fig. 39, Taf. I bei *s*.)

Hätte ich diese Siebröhren, wie ein Vergleich mit anderen Materialien ergiebt, in heissem Wasser abgebrüht, so würde ich nicht einen solchen Schleimstrang, sondern ein grobflockiges Gerinnsel mit Schleimtropfen im Wandbeleg erhalten haben. Die

Figuren 38 und 39, Taf. I zeigen dies. Sie gehören zu ungefähr gleich alten, unverletzten Internodien, von denen das eine unverletzt abgebrüht (Fig. 38), das andere in Alkohol fixirt war (Fig. 39). Die schleimerfüllten Röhren und die mit grobflockigem Gerinnsel haben die gleiche Lage an der Peripherie der Gefässbündel. Ebenso hatten alle ento- und ectocyclischen Siebröhren im Kochmaterial die in Figur 38, im Alkoholmaterial die in Fig. 39, Taf. I abgebildete Beschaffenheit.

Hieraus möchte ich aber folgern, dass der bereits veränderte Saft einer obliterirenden Siebröhre bei schneller, gewaltsamer Wasserentziehung zum Schleimstrang erstarrt, im anderen Falle nach und nach alle gerinnbare Substanz verliert.

Wir haben gesehen, dass der Alkohol die Bildung schleimerfüllter Siebröhren in Internodien veranlasst und wir dürfen hieraus schliessen, dass es sich mit denjenigen in der Wand junger Früchte ebenso verhält. Die schleimerfüllten Röhren, welche ich früher beschrieben habe, sind nach meinen neuen Untersuchungen zum Theil Kunstproducte. Ich sage zum Theil, denn es kommen schon in jungen Früchten obliterirende Siebröhren mit Schleimstrang in grosser Zahl in der Fruchtwand vor. Es ist aber unmöglich, im Alkoholmaterial zwischen schleimerfüllten Röhren, welche schon in der lebenden Frucht vorhanden waren, und solchen zu unterscheiden, welche durch den Alkohol gewissermassen erst erzeugt worden sind.

Ich habe zwei ungefähr gleich alte, junge Früchte zu einer neuen Untersuchung benutzt. Die eine derselben war an der Pflanze ohne Verletzung in heissem Wasser abgebrüht, die andere unter denselben Bedingungen drei Stunden in Alkohol gebracht worden. In der letzteren waren alle Siebröhren des hypodermalen Netzes prall oder nahezu vollständig mit Schleim erfüllt (Fig. 44, Taf. II). Die letzteren zeigten, dass der Siebröhrensaft vor seiner durch den Alkohol bewirkten Erstarrung in schwacher Strömung gewesen war. In der abgekochten Frucht befanden sich die hypodermalen Siebröhren im Zustande der Figur 45, Taf. II. Schwache Schleimtropfen (*s*) als Andeutung der beginnenden Obliteration. Dieselben Tropfen zeigten sich auch im Alkoholmaterial (Fig. 44), dessen Siebröhren demnach auf demselben Stadium der Obliteration standen. Während aber das heisse Wasser den Siebröhrensaft zur Gerinnung brachte (das Gerinnsel ist hier noch feinflockig), hat der Alkohol vermöge seiner starken Wasser-

anziehung die Erstarrung zum Schleimstrang veranlasst. Diese schleimerfüllten Siebröhren habe ich früher neben anderen, welche bereits in der Obliteration vorgerückt und auch mit Schleim erfüllt waren, vor mir gehabt, jene waren ein Kunstproduct des Alkohols, diese ein normales Erzeugniss der lebenden Pflanze.

Die Obliteration der Siebröhren endet mit einer gänzlichen Entleerung derselben, der Inhalt wird, gleichviel welche Veränderungen er erleidet, fortgeführt. Auf welchen Wegen das geschieht, muss ich dahingestellt bleiben lassen. Bei den Siebröhren des zweiten und dritten Typus habe ich die Obliterationserscheinungen nicht lückenlos verfolgt. Das Endresultat des in Rede stehenden Processes ist auch hier eine gänzliche Entleerung, welcher bei *Humulus* z. B. die Bildung eines Schleimstranges vorangeht. Bei den Siebröhren mit Stärkekörnern verschwinden diese zuletzt nach dem Wandbeleg mit seinen Schleimeinlagerungen. Schleimstränge entstehen hier nicht.

Ich habe schon früher darauf hingewiesen, dass schleimerfüllte, obliterirende Siebröhren grosse Aehnlichkeit mit Milchröhren haben und früher oft als Lebenssaftgefässe beschrieben worden sind.[1]) Auch Hanstein hat diese Vermuthung ausgesprochen, ist aber dem anderen Irrthume verfallen, solche obliterirende Siebröhren für active zu halten. In diesen kommen aber Schleimstränge nicht vor, denn gerade durch die Verwandlung des Siebröhrensaftes in zähen, festen Schleim wird die Stoffwanderung unmöglich gemacht.

2. **Der Callus.** Von allen Forschern, welche über Siebröhren gearbeitet haben, ist hervorgehoben worden, dass mit dem Alter derselben der Callusüberzug der Siebplatten zunimmt, bis endlich ein vollständiger Verschluss derselben eintritt. Da alle activen Siebröhren bereits callöse Platten besitzen, so ist es schwer anzugeben, bei welchem Umfange des Callus die Obliteration beginnt. Das Wachsthum desselben steht auch nicht in einer erkennbaren Beziehung zu den Veränderungen des Inhaltes. Wie Figur 35, Taf. I zeigt, hat derselbe gelegentlich noch die typische Beschaffenheit activer Röhren, während die Platten schon von dicken Calluspolstern verschlossen sind. In anderen Fällen wiederum hat der Inhalt bereits merkliche Ver-

---

1) Cucurbitaceen pag. 47.

änderungen erfahren, ohne gleichzeitige Vergrösserung des Callusüberzuges (Fig. 40, Taf. I). Eine Regel für diese Verhältnisse habe ich nicht auffinden können. Ich kann nur bestätigen, dass in obliterirenden Siebröhren der Callus sich stark vermehrt und sowohl die Siebplatten, als auch die Siebfelder endlich ganz verschliesst. Nach der Lösung des Inhaltes erhalten sich die Calluspolster noch lange Zeit, scheinen dann aber auch zu zerfallen.

Um über die Abstammung des Callus weiteren Aufschluss zu bekommen, habe ich das Wachsthum der starken Calluspolster in obliterirenden Siebröhren von Cucurbita genauer verfolgt. Ich muss hier an eine Bemerkung Russow's anknüpfen. Derselbe hat beschrieben, dass die dicken Callusmassen aus zweierlei Substanzen zusammengesetzt erscheinen, einer mit Jod sich heller färbenden Grundsubstanz, und dunkler werdenden cylindrischen Stiften, welche dieselbe senkrecht zur Siebplatte durchsetzen[1]. Russow hat weiterhin die Vermuthung ausgesprochen, dass jeder dieser Callusstifte einen haarfeinen Schleimfaden umschliesst, den letzten Rest der Verbindungsfäden, welche die Inhalte der activen Röhrenglieder vereinigten. Endlich hat Russow gezeigt, dass in alten Calluspolstern die Stifte nicht mehr zu sehen sind. Die Beobachtung Russow's habe ich bis auf kleine Einzelheiten wiederholen können. Meine Beobachtungen sind folgende.

Auf einem gewissen Stadium der Obliteration, auf welchem bereits ein deutlicher Schleimstrang vorhanden und das Calluspolster stark aufgeschwollen ist, gehen von jenem dicke stiftähnliche Fortsätze durch den Callus und die in ihm verborgene Siebplatte bis zum nächsten Röhrengliede aus (Fig. 30, Taf. I). Diese Schleimfortsätze, deren Zusammenhang mit dem Schleimstrang ausser allem Zweifel steht, färben sich mit Jodkalium-Chlorzinkjod dunkler, aber auch reiner braun, als der rothbraun werdende Callus. Sie sind jedenfalls mit Russow's Callusstiften identisch. Die Schleimfortsätze sind aber durchweg homogen, nur färben sich ihre oberen Lagen etwas heller. In älteren Stadien, nachdem der Callus bedeutend sich vergrössert hat, sind die Schleimfortsätze viel dünner geworden, sie scheinen oft mitten im Callus zu endigen (Fig. 31, Taf. I).

---

1) l. c. p. 293.

Endlich sind sie nahezu verschwunden, einige feine Striche in dem mächtigen Calluspolster, welche jetzt schwer noch durch eine andere Färbung sich abheben (Fig. 32, Taf. I), verrathen ihr einstiges Dasein.

Die vom Callus verdeckten Siebplatten haben ihre ursprüngliche Dicke ungefähr beibehalten (Fig. 26, Taf. I), sodass, wie Russow und Hanstein schon hervorgehoben haben, das Material zum Wachsthum des Callus wohl kaum von dem Cellulosesieb geliefert worden sein kann. Dagegen sind die Schleimfortsätze immer dünner und endlich unsichtbar geworden. Ueber ihr Verschwinden lassen sich nur zwei Vermuthungen aufstellen. Entweder sie sind, wie später der Schleimstrang, gelöst worden, oder sie haben sich in Callus verwandelt. Der erste Fall ist durch die Beobachtung nahezu ausgeschlossen, dass der Schleimstrang noch unverändert vorhanden ist, während die Schleimfortsätze im Callus verschwunden sind. Wenn diese gelöst werden, dann ist es zum mindesten wahrscheinlich, dass auch der Schleimstrang gelöst wird. Schon ein Vergleich unserer Figuren 30—32, Taf. I zeigt dagegen, dass eine Umwandlung der Schleimfortsätze im Callus recht wohl anzunehmen ist. Dieser wächst, jene verschwinden, eine andere Substanz, welche das Material zur Callusbildung liefern könnte, ist nicht vorhanden, also wird der Schleim es sein, welcher in Callus sich verwandelt.

Zu derselben Annahme gelangten wir im vorigen Kapitel, als wir die Entwicklung der Siebplatten besprachen. Ebensowenig wie wir dort einen exacten Beweis dafür liefern konnten, dass der Callus als metamorphosirter Schleim in die Tüpfelgrübchen abgelagert wird, ebenso kann man mehr als das Mitgetheilte auch bei den obliterirenden Siebröhren nicht feststellen. Allerdings bietet dasselbe einen für die mikroskopische Forschung genügenden Beweis, dass der Schleim sich in Callus verwandelt. Ob die Berührung mit dem bereits vorhandenen Callus diese Veränderung herbeiführt, ist ebenso wenig zu entscheiden, wie die Frage, ob die Cellulose der jungen Siebplatte bei der Callusbildung betheiligt ist. Soviel steht aber fest, dass der Schleim in jungen und alten Siebröhren das Material zur Entstehung und zum Wachsthum des Callus liefert, dass dieser nicht ein Product der Cellulose, sondern in erster Linie des Inhaltes ist und auf die Siebplatte aufgelagert wird.

Vielleicht hat Russow günstigere Präparate als ich vor sich

gehabt. Seine Angabe, dass die Callusstifte Schleimfäden umschliessen, würde dann dahin zu deuten sein, dass die Anfangs dicken Schleimfortsätze von aussen nach innen sich in Callus verwandeln. Dann würden in der That Bilder, wie sie Russow vorgelegen haben, entstehen.[1])

Man hat bisher alle Siebröhren für activ gehalten, deren Siebplatten, wie stark auch ihr Callusüberzug sein mag, von Schleimfäden durchzogen werden. Die neue Auffassung, welche durch meine Beobachtungen über den Inhalt der Siebröhren in der unverletzten Pflanze angebahnt worden ist, lässt eine solche Annahme, wenigstens für Cucurbita, nicht mehr zu. Der Schleim ist zäh, unbeweglich und für den Transport in grösseren Mengen nicht geeignet. Die Siebröhre wird dann als geschlossen zu betrachten sein, wenn die Sieblöcher nicht mehr von Siebröhrensaft durchströmt werden, sondern von Schleimfäden erfüllt sind. Alle Siebröhren, welche man an lebendem Material beobachtet, sind eben durch die vom Schlauchkopf ausgehenden Fortsätze bereits geschlossen, die Communication zwischen den einzelnen Gliedern ist gestört, sobald der Siebröhrensaft durch von ihm abgeschiedenen Schleim verdrängt wird.

Es erübrigt noch, mit einigen Worten zu schildern, wie man sich unter der Voraussetzung, der Callus entstehe aus dem Schleime, die zur Obliteration führenden Vorgänge zu denken hat. Wir nehmen eine active Siebröhre von Cucurbita zum Ausgangspunkt. Ihr Inhalt besteht aus einem zarten Wandbeleg und Siebröhrensaft, die Siebplatten sind von einem dünnen Callusüberzug bedeckt. Ausserdem hat sich an ihnen Schleim als Schleimbeleg, nehmen wir an in Form von Schleimringen, an den Rändern der Löcher abgesetzt. Bei längerer Functionsdauer der Siebröhre wächst dieser Schleimbeleg, die Ringe können zu einer Schleimhülle verschmelzen.

Gleichzeitig wird sich aber der an den Callus angrenzende Schleim in Callus verwandeln, der Callusüberzug verdickt sich auf Kosten des Schleimbeleges. Mit der Zeit erreicht dann der Callus eine ansehnliche Stärke, die Sieblöcher werden stark verengt, sodass für den Siebröhrensaft nur noch enge Canäle übrig bleiben. Schleim wird immer noch abgeschieden, die Schleimringe werden immer enger und schliesslich zu massiven

1) Vergl. l. c. pag. 294.

Fäden, welche die vom Callus ausgekleideten Siebporen ausfüllen. Jetzt ist die Siebröhre schon geschlossen, der Siebröhrensaft kann nicht mehr aus einem Gliede in das andere übertreten. Die Schleimfäden oder Schleimfortsätze, welche die Siebporen durchsetzen, verwandeln sich nun allmälig in Callus.

Nach dem Vorhergehenden wird auch die Thatsache verständlich, dass der Callusüberzug bei partiell entleerten, activen Siebröhren viel stärker ist, als in der lebenden, unverletzten Pflanze. Der Schleimbeleg der Siebplatten verwandelt sich in Callus und ausserdem liefern noch die Schleimfäden, welche vom Schlauchkopf durch die Poren entsendet werden, Material zu fortgesetzter Callusbildung. Die Vermehrung des Callus geht aber schnell von statten, wie folgende Beobachtung lehrt. Eine unverletzte Kürbispflanze wurde in zwei Stücke geschnitten und nun sofort ein Präparat hergestellt. Die Siebplatten der activen Röhren, welche natürlich Schlauchköpfe besassen, waren von einem starken Callusgerüst überzogen, viel stärker als der Callusüberzug in unverletzt abgebrühtem Material. Der Schleim scheint sich demnach sehr schnell in Callus zu verwandeln, wenn einmal die Bedingungen hierzu gegeben sind. Lässt man abgeschnittene Stücke längere Zeit, vielleicht 24 Stunden liegen, so wird man finden, dass die Calluspolster bereits merklich sich vergrössert haben.

IV. Die Verbindung der Siebröhren unter einander, mit den Geleitzellen und dem Cambiform.

Betrachtet man einen Querschnitt durch einen Gefässbündelsiebtheil einer beliebigen Dicotyle, so wird man finden, dass die einzelne Siebröhre, welche immer an einer Seite an eine Geleitzelle angrenzt, gelegentlich auch deren zwei besitzt, bald rings von Cambiform umgeben ist, bald mit einer anderen Siebröhre oder wohl auch mit mehreren in Berührung steht. So können Nester von zwei, drei, gelegentlich auch vier sich berührenden Siebröhren vorkommen, welche dann von einer gemeinschaftlichen Cambiformhülle umgeben werden[1]. Isolirte Röhren und diese

---

[1]) Man vergleiche hierzu die früher von mir gegebenen Abbildungen: Berichte der deutschen bot. Gesellsch. III, Taf. XV, Fig. 4. — Berichte der

mehrzähligen Gruppen finden sich ungefähr gleich häufig vor. Auf dem Längsschnitt zeigt sich, dass mehrere Siebröhren oft grosse Strecken nebeneinander herlaufen, dann sich trennen und an andere sich anschliessen oder isolirt bleiben. Hieraus erklärt es sich, dass Querschnitte aus verschiedenen Höhen desselben Siebtheiles eine verschiedene Anordnung der Siebröhren und infolge dessen auch der Cambiformzellen darbieten. Diese stehen alle mit einander in Verbindung und bilden ein zusammenhängendes Maschenwerk, welches die Siebröhren durchziehen.

Die letzteren entwickeln, wenn sie an gleichnamige Elemente angrenzen, aber auch nur in diesem Falle, auch in den Längswänden zahlreiche kleine Siebplatten, welche seit langer Zeit bekannt und von NAEGELI[1]) als Siebfelder bezeichnet worden sind. Sie sind stets in so grosser Menge vorhanden, dass die benachbarte Siebröhren trennenden Längswände reich mit correspondirenden Tüpfelchen besetzt erscheinen. Man vergleiche die Abbildungen bei HARTIG, WILHELM und in meinem Aufsatz in den Berichten der deutschen botanischen Gesellschaft. Meine soeben citirte Figur veranschaulicht das Verhalten der Siebröhrenwand, wenn sie an eine Geleitzelle oder an Cambiform angrenzt. Im letzteren Falle fehlen Tüpfel durchaus, im ersteren sind sie vorhanden, aber nicht so tief, wie zwischen benachbarten Siebröhren.

Schon HARTIG und WILHELM[2]) hatten nachgewiesen, dass die Siebfelder von den gleichen Verbindungsfäden durchsetzt werden, wie die Siebplatten. Russow hat dann mit Hilfe seiner Quellungsmethode bei einer grossen Anzahl von Phanerogamen die Wegsamkeit der Siebfelder nachgewiesen[3]). Die grosse Zahl der zwischen benachbarten Siebröhren ausgespannten Verbindungsfäden veranschaulicht Fig. 49, Taf. II. Man sieht, dass der geronnene

---

mathem.-physikal. Classe der königl. sächs. Gesellsch. der Wissensch. 1885. Taf. I, Fig. 1, 2 (Cucurbita), Fig. 17 (Physalis), Taf. II, Fig. 1 (Saxifraga). Auch WILHELM, l. c. Taf. VIII, Fig. 95.

1) Sitzungsber. d. bayrisch. Akad. d. Wissensch. 1861. I. pag. 223. Die Siebfelder wurden zuerst von TH. HARTIG (Bot. Zeit. 1854, pag. 53) beschrieben und abgebildet (l. c. Taf. I, Fig. 15—18, 21 u. 24). Auch MOHL (Bot. Zeit. 1855, pag. 890) hat dieselben kurz erwähnt.

2) Bot. Zeitg. 1854, pag. 54, Fig. 24.

3) Die Perforation der Zellwand etc. Sitzungsberichte der Dorpater Naturf. Gesellsch. 1884, VI. Bd., pag. 570.

Siebröhrensaft bis an die Siebfelder heranreicht und dass diese von feinen Fäden durchsetzt werden.

So leicht es auf der einen Seite ist, diese Thatsache festzustellen, so schwer ist es andererseits die Zusammensetzung der Verbindungsfäden zu bestimmen. Russow[1]) nimmt an, dass sie aus Schleim bestehen, dass aber die Wandbelege benachbarter Siebröhren sich nicht vereinigen. Wilhelm[2]) dagegen behauptet, dass bei Vitis eben gerade durch die Hüllschläuche die Verbindung hergestellt wird. Die Kleinheit der Siebfelder erschwert die Untersuchung derart, dass man wohl am besten ein analoges Verhalten, wie an den Siebplatten annimmt und sich mit den Nachweis begnügt, dass die Inhalte benachbarter Siebröhren überhaupt durch die Siebfelder in Verbindung stehen.

Die Siebplatten sind, wie wir gesehen haben, mit Callus überzogen und tragen einen bald stärkeren bald schwächeren Schleimbeleg. Jedenfalls füllt der Schleim bei Cucurbita nicht die Siebporen aus, durch welche vielmehr der unveränderte Siebröhrensaft hindurchströmen kann. Die Poren sind in abgebrühtem Material mit feinkörnigem Gerinnsel erfüllt (Fig. 23, Taf. I). Wie sich diese Verhältnisse bei den Siebröhren des zweiten und dritten Typus gestalten, habe ich nicht untersucht. Wahrscheinlich werden hier die Poren der ebenfalls mit Schleimbelegen versehenen Siebplatten von wässriger Flüssigkeit erfüllt.

Sehr viel ist bereits die Frage discutirt worden, ob die Wandbelege successiver Röhrenglieder durch die Löcher der Siebplatte hindurch sich vereinigen. Russow[3]) erwähnt, dass er sich von dem Vorhandensein eines feinen Protoplasmaschlauches in den Siebporen einmal deutlich überzeugen konnte, kommt aber später zu dem Schlusse[4]), »dass die Protoplasmawandbelege der Siebplatten sich nicht in die Siebkanäle hineinsenken«. Wilhelm spricht sich nicht bestimmt über diesen Punkt aus, scheint aber der Annahme zuzuneigen, dass der Wandbeleg (Hüllschlauch) durch die Siebporen hindurchtritt. Die Figur 116, Taf. IX bei Wilhelm spricht für diese Ansicht. Auch ich habe solche Bilder öfter gesehen. Da es sehr schwer ist, den

1) l. c. pag. 571.
2) l. c. pag. 27.
3) Bau der Siebröhren, l. c. pag. 297.
4) Perforation der Zellwand, l. c. pag. 572.

Wandbeleg von dem feinkörnigen Gerinnsel des Siebröhrensaftes im Kochmaterial zu unterscheiden, da an partiell entleerten Röhren die normale Anordnung des Inhaltes gerade an der Siebplatte gänzlich gestört ist, so halte ich es nicht für möglich, die aufgeworfene Frage durch das Mikroskop einwurfsfrei zu lösen.

Ich möchte mir deshalb erlauben, einen andern Weg zu ihrer Lösung oder Klärung anzugeben. Unsere Vorstellungen von den physikalischen Eigenschaften des Protoplasmas führen zu folgender Auffassung. So lange die Siebplatte noch geschlossen ist, liegen die Wandbelege der benachbarten Röhrenglieder der dünnen Tüpfelmembran an, die Ausstülpungen, welche hierdurch hervorgerufen werden, sind in Fig. 29, Taf. I abgebildet. Die Wandbelege rücken sich immer näher, je dünner die sie trennende Membran wird. Wenn dieselbe endlich gelöst, der Tüpfel zum Porus wird, dann müssen sich die Wandbelege berühren und auch mit einander verschmelzen, sobald der den Porus zunächst erfüllende Callus entfernt ist. Das Resultat dieses Vorganges würde aber, wie man leicht einsieht, darin bestehen, dass die Balken des Cellulosesiebes allseitig, also auch in den Poren, vom Wandbeleg umsponnen werden. So gelangen wir zu der Auffassung, dass die Siebplatte zunächst vom Callus, welcher direct der Cellulose aufliegt und dann vom Protoplasma, welches den Schleimbelegen als Stütze dient, überzogen ist. Ob der Wandbeleg später, noch in der activen Siebröhre, von den Siebplatten entfernt wird, kann icht nicht sagen. In obliterirenden Röhren scheint er nicht mehr vorhanden zu sein, da die Schleimfortsätze eine durchaus homogene und glatte Oberfläche besitzen.

Die Verbindung des Siebröhreninhaltes mit demjenigen der Geleitzellen durch feine Fäden, vielleicht wie diejenigen in den Siebfeldern, hält Russow für wahrscheinlich. Es ist ihm aber nicht gelungen, diese Verbindungsfäden zur Anschauung zu bringen. Er konnte nur beobachten, dass die Protoplasmakörper der Geleitzellen hie und da »in kurze feine spitz auslaufende oder in ein Knötchen endigende Fortsätze ausgezogen erschienen«, deren Verbindung mit dem Siebröhreninhalte nicht zu constatiren war[1]).

Das abgebrühte Material liefert auch in dieser Beziehung sehr günstige Resultate. Mit Hilfe der Russow'schen Quellungs-

---

1) Perforation der Zellwand, l. c. pag. 570.

methode kann man an jedem beliebigen Längsschnitt nachweisen, dass der geronnene Siebröhreninhalt zahlreiche, dicke und dünne Fortsätze nach den Geleitzellen zu besitzt. Bilder, wie das in Fig. 48, Taf. II dargestellte habe ich unzählige Male gesehen. Der Geleitzellinhalt zeigt nur selten ebenfalls solche Fortsätze, in der Regel besitzt er auch nach der Siebröhre zu eine glatte Oberfläche. Eigenthümlicher Weise gelingt es nur sehr selten, die von dem Siebröhreninhalte ausgehenden Fäden und Ausstülpungen bis zur Vereinigung mit dem Geleitzellplasma sichtbar zu machen. Die Fortsätze treten bis dicht an die Oberfläche des letzteren heran und scheinen hier, nachdem sie ausserordentlich fein geworden sind, blind zu endigen. Unter vielen hundert Fällen habe ich nur zweimal mit Bestimmtheit mich davon überzeugen können, dass die Fortsätze des Siebröhreninhaltes mit dem der Geleitzellen sich vereinigten (Fig. 51, Taf. II).

Da kaum, angesichts des regelmässigen Verkommens der scheinbar blinden Ausstülpungen, anzunehmen ist, dass für gewöhnlich eine solche Verschmelzung ausbleibt, so fragt es sich, warum man so selten dieselbe nachzuweisen vermag. Einmal mag daran wohl die Feinheit der Fäden in der Nähe der Geleitzellen schuld sein. Sie sind, selbst in gefärbtem Zustande, nur selten zu erkennen. Ausserdem ist zu berücksichtigen, dass die feinen Fäden bei der Behandlung des Präparates mit concentrirter Schwefelsäure, dem sich anschliessenden Auswaschen mit Wasser leicht von den Geleitzellen losreissen werden. Die Verbindungsfäden zwischen benachbarten Siebröhren sind viel stärker und deshalb nicht so leicht zu zerstören. Da aber diese ganz das gleiche Bild darbieten, wie die scheinbar blind auslaufenden Fäden zwischen Siebröhren und Geleitzellen, so wird man wohl annehmen dürfen, dass auch hier eine directe Verbindung besteht. Dafür, dass der Siebröhreninhalt nach einer Vereinigung mit dem der Geleitzellen strebt, spricht auch noch die Thatsache, dass die Fortsätze des ersteren nur den Geleitzellen, aber nicht auch dem Cambiform gegenüber auftreten (Fig. 51, Taf. II). Die Geleitzellen stehen weder untereinander, noch mit dem Cambiform in Verbindung[1]).

Sehr instructive Bilder über das Verhalten des letzteren zu den Siebröhren erhält man, wenn man mässig dicke Quer-

---

1) Man vergleiche auch Russow, l. c. pag. 570.

schnitte nach Russow's Angaben behandelt. Die Cambiformzellen, welche, wie oben gezeigt wurde, isolirte Siebröhren oder wenigzählige Gruppen solcher umschliessen, sind untereinander durch zahlreiche, deutliche Protoplasmafäden verbunden, während die Siebröhren mit ihren Geleitzellen vollkommen abgeschlossen vom Cambiform sich erweisen (Fig. 50, Taf. II.) Durch verschieden tiefe Einstellung des Mikroskopes lässt sich feststellen, dass alle Cambiformzellen unter einander zusammenhängen, dass aber niemals eine Verbindung mit den Siebröhren oder den Geleitzellen vorhanden ist. Längsschnitte bestätigen diese Beobachtung.

Das Cambiform geht, wie bekannt, an der Peripherie des Gefässbündels in das sogenannte Grundgewebe über und steht auch mit dessen Zellen durch feine Fäden in Communication. Da auch die Paremchymzellen der Gefässtheile sowohl untereinander, als mit dem sich anschliessenden Grundgewebe durch zahlreiche feine Protoplasmafäden zusammenhängen, so ergiebt sich, dass in den Internodien von Cucurbita alle innerhalb des Sklerenchymringes liegenden Parenchymzellen in offener Verbindung stehen. Näher auf diese interessanten Verhältnisse einzugehen, liegt ausser dem Plane dieser Arbeit. Das Gesagte mag einen kleinen Beitrag zu der in neuerer Zeit lebhaft discutirten Frage liefern, ob wirklich die Protoplasmakörper aller Zellen einer Pflanze durch die Membranen hindurch mit einander zusammenhängen.

Aus der Thatsache, dass auch die Cambiumzellen durch feine Protoplasmafäden verbunden, ihre Wände also durchlöchert sind, folgert Russow, dass »die gitter- oder siebartigen Perforationen der Quer- und Längswände der Siebröhren (wenigstens soweit diese von Cambium gebildet werden) ursprünglich und nicht wie man nach den bisherigen Untersuchungen annahm durch nachträgliche Resorption, resp. Umwandlung der Cellulose in Callussubstanz entstandene Löcher sind«.[1]) Russow nimmt fernerhin an, dass die weiten Löcher vieler Siebplatten »durch Verschmelzung mehrerer, eng benachbarter, gruppenweise angeordneter Löcher hervorgehen, während die sehr zahlreichen und engen Löcher der Siebfelder durch Theilung oder Spaltung entstehen«.

Ich glaube, dass man diese Angelegenheit leichter ent-

---

1) l. c. pag. 577.

scheiden kann, als es auf den ersten Blick scheinen mag. Man braucht nur jugendliche Siebröhren, deren Platten noch nicht definitiv ausgebildet sind, genauer zu prüfen. Gelingt es, bereits jetzt feine Fortsätze zwischen den Inhalten benachbarter Siebröhren oder successiver Röhrenglieder oder endlich zwischen Siebröhren und Geleitzellen sichtbar zu machen, dann würde Russow's Annahme gerechtfertigt sein. Ich habe sehr viele Präparate, welche die Verbindungsfäden zwischen activen Siebröhren und auch diejenigen der Paremchymzellen deutlich zeigten, durchgesehen, habe aber die betreffenden Fäden erst an vorgerückten Siebröhren beobachtet. Ungefähr fällt, wie bereits erwähnt, die Lösung der Schleimtropfen zum Siebröhrensaft und die Durchbohrung der Siebtüpfel in dieselbe Zeit. Vorher werden dieselben nicht von Protoplasmafäden durchsetzt, ebenso fehlen dieselben zwischen den Siebröhren und ihren Geleitzellen (Fig. 20, Taf. I). Hieraus folgt aber, dass die charakteristischen Löcher der Siebplatten und Siebfelder durch spätere Vorgänge entstehen und nicht aus etwa vorhandenen Primordialtüpfeln der cambialen Zellen sich entwickelt haben.

Resultate.

1. Um die Anordnung des Siebröhreninhaltes in der lebenden, unverletzten Pflanze kennen zu lernen, genügt es, einzelne Theile derselben in heissem Wasser abzubrühen.
2. Bei den Dicotyledonen kann man nach der Gliederung des Siebröhreninhaltes drei Siebröhrenarten unterscheiden:
   a) *Siebröhren mit gerinnbarem Saft.* Der Inhalt besteht aus einem schmächtigen, protoplasmatischen Wandbeleg und einem klaren, in der Hitze gerinnenden Safte, dem Siebröhrensaft. Cucurbitaceen.
   b) *Siebröhren mit Schleim.* Der Inhalt besteht aus einem zarten, mit kleineren und grösseren Schleimmengen beladenen Wandbelege und einer klaren, nicht gerinnenden, wässrigen Flüssigkeit. Humulus.
   c) *Siebröhren mit Stärkekörnern.* Der Inhalt besteht aus einem zarten, geringe Schleimmengen führenden Wandbelege und einer klaren, nicht gerinnenden Flüssigkeit mit kleinen Stärkekörnern. Coleus.

3. Diese Gliederung des Inhaltes ist nur in activen Röhren vorhanden, d. h. in solchen, welche noch offene Siebplatten haben und deshalb bei der Verletzung der Pflanze Schlauchköpfe bilden.
4. Die Siebplatten der activen Siebröhren werden von einer sehr dünnen Callusschicht überzogen, welche entweder vollständig von Schleim (Schleimhülle) bedeckt oder nur an den Rändern der Sieblöcher mit Schleimringen belegt ist. Diese Schleimablagerungen, welche als Schleimbeleg zusammengefasst werden können, finden sich auf beiden Seiten der Siebplatte und nur in der unverletzten Pflanze, sie sind von den Schlauchköpfen genau zu unterscheiden.
5. Die gegenwärtige Ansicht über die Eigenschaften des Protoplasmas lässt erwarten, dass dasselbe die callöse Siebplatte allseitig umspinnt und also auch die Porenwände auskleidet. An der Siebplatte muss eine Verschmelzung der Wandbelege benachbarter Röhrenglieder stattfinden.
6. Bei der Verletzung der Pflanze bilden sich nicht nur Schlauchköpfe, sondern der Schleimbeleg wird verschoben und schwindet oft vollständig. Ausserdem vergrössert sich der Callusüberzug sehr rasch, jedenfalls auf Kosten des Schleimes. Das bisher beschriebene Callusgerüst ist ebenso ein Kunstproduct wie der Schlauchkopf, in der activen Röhre sind die Siebplatten nur schwach callös.
7. In der lebenden Pflanze werden die Sieblöcher, so lange die Röhre activ ist, nicht von Schleim, sondern bei Cucurbita von Siebröhrensaft, bei anderen Siebröhren wahrscheinlich von wässriger Flüssigkeit erfüllt.
8. Die Entwicklungsgeschichte des Siebröhreninhaltes richtet sich nach seiner endgültigen Gliederung. Bei den Cucurbitaceen werden vom Wandbeleg zahlreiche Schleimtropfen abgeschieden und diese werden später, kurz vor oder nach der Oeffnung der Siebplatten, in dem Zellsaft zu gerinnbarem Siebröhrensaft gelöst. Bei den Siebröhren des zweiten Typus werden zunächst ebenfalls Schleimtropfen abgeschieden; diese werden aber nicht gelöst, sondern verbleiben als Schleimfäden und Stränge im Wandbeleg der activen Röhre. Siebröhrensaft wird nicht gebildet, die Siebröhre ist mit wässriger, nicht gerinnbarer Flüssigkeit erfüllt. Die Siebröhren mit Stärke bilden in den noch geschlossenen

Röhrengliedern Stärkekörner und geringe Schleimmengen. Beide erleiden bei der Oeffnung der Siebplatten keine Veränderungen.

9. Die zukünftige Siebplatte (Cucurbita) ist vor dem Auftreten des Callus schwach getüpfelt, undeutlich gewellt. Dieser beginnt mit den ersten Schleimtropfen sichtbar zu werden und kommt zunächst nur in den sich verbreiternden und vertiefenden Tüpfelgrübchen vor.

10. Die Frage, ob der Callus ein Umwandlungsproduct der Cellulose oder eine Ablagerung aus dem Inhalte sei, lässt sich mit Rücksicht auf die Vorgänge bei der Entwickelung und Obliteration der Siebröhren dahin entscheiden, dass der Schleim, also der Inhalt, das Material zum Wachsthum des Callus liefert. Es ist sogar wahrscheinlich, dass der Schleim in Callus sich verwandelt. Ein Product der Cellulose ist dieser nach allen Beobachtungen nicht.

11. Die Obliteration der Siebröhren beginnt mit Veränderungen des Inhaltes und der Siebplatten. Eine strenge Reihenfolge wird hierbei nicht eingehalten.

12. Der Inhalt erleidet bei Cucurbita in allen obliterirenden Siebröhren zunächst die gleiche Veränderung, welche sich durch die Abscheidung der Schleimtropfen und durch die Grobkörnigkeit des Saftgerinnsels zu erkennen giebt. Das Endziel der Obliteration, die völlige Entleerung des Inhaltes, wird in doppelter Weise erreicht. Entweder erstarrt der bereits veränderte Siebröhrensaft zu einem die Siebröhre prall ausfüllenden Schleimstrange, welcher später in kleine Stücke zerfällt und endlich ganz gelöst wird. Auf diese Weise scheint die Obliteration unter starkem Druck, bei schneller Wasserentziehung zu verlaufen. Oder der Siebröhrensaft wird, ohne zu erstarren, nach und nach ärmer an gerinnbarer Substanz, welche endlich ganz schwindet. Später wird auch der Wandbeleg mit den Schleimtropfen gelöst, die entleerte Röhre wird zusammengedrückt.

13. Die Siebplatten obliteriren immer in der gleichen Weise. Ihr Callusüberzug verdickt sich, die Poren verengern sich in Folge dessen und veranlassen eine Verschmelzung der sie einfassenden Schleimringe zu massiven Fäden (Cucurbita). Diese anfangs dicken Schleimfäden, welche den

Callus und die Siebplatte durchsetzen, werden immer dünner und schwinden endlich ganz. Ihre Substanz wird wahrscheinlich in Callus verwandelt.

14. Die Siebröhren sind als geschlossen zu bezeichnen, wenn ihre Siebporen nicht mehr von Siebröhrensaft (Cucurbita) oder wässriger Flüssigkeit (übrige Dicotylen), sondern von Schleim erfüllt werden. Dieser ist nicht flüssig, sondern starr und fest, kautschukähnlich. Schleimerfüllte, obliterirende Siebröhren können deshalb bei der Verletzung keine Schlauchköpfe bilden.

15. Die Siebröhren stehen mit einander und mit ihren Geleitzellen durch feine Fäden in directer Verbindung.

16. Mit dem Cambiform, dessen Zellen alle unter einander durch Protoplasmafäden zusammenhängen, sind weder die Siebröhren, noch die Geleitzellen in offener Communication.

I. Verzeichniss der von mir untersuchten Dicotylen, deren Siebröhren Stärke enthalten.

(Die mit * bezeichneten wurden im Juni, die mit ** im Juli, alle anderen von 20—23. August 1885 untersucht. Es kamen nur gesunde, kräftige Stengel und Zweige zur Verwendung.)

1. Acer Pseudo-Platanus.
2. Aesculus Hippocastanum.
3. Althaea rosea.
4. Ampelopsis hederacea.
5. Anchusa officinalis *.
6. Balsamina hortensis.
7. Clematis Vitalba.
8. Coleus Verschaffelti *,**.
9. Cornus sanguinea.
10. Corylus Avellana.
11. Dahlia variabilis.
12. Erysimum cheiranthoides.
13. Fraxinus excelsior.
14. Fuchsia coccinea.
15. Fumaria officinalis.
16. Galium silvaticum.
17. Galium verum.
18. Hedera Helix.
19. Heracleum Sphondylium.
20. Hypericum perforatum.
21. Iva xanthiifolia *.
22. Lamium album.
23. Lathyrus latifolius.
24. Ligustrum vulgare.
25. Lobelia Erinus.
26. Lonicera Caprifolium.
27. Matthiola annua.
28. Melampyrum pratense.
29. Nicandra physaloides **.
30. Oenothera biennis.
31. Phlox paniculatus.
32. Pirus Malus.
33. Pisum sativum.
34. Polygonum Convolvulus.
35. Polygonum Hydropiper.
36. Polygonum lapathifolium.
37. Polygonum Persicaria.
38. Populus tremula.
39. Prunus avium.
40. Quercus Robur.
41. Ranunculus acer.
42. Reseda odorata.
43. Ribes rubrum.
44. Rumex acetosa.

45. Sambucus nigra.
46. Scrophularia nodosa.
47. Solanum tuberosum.
48. Sorbus Aucuparia.
49. Sparmannia africana.
50. Tropaeolum majus.
51. Viola altaïca.
52. Xanthium Strumarium **.

II. Verzeichniss der Dicotylen, in deren Siebröhren keine Stärke gefunden wurde.

A. Siebröhren mit gerinnbarem Saft.

1. Cucurpita Pepo.
2. Ecballium Elaterium.
3. Lagenaria vulgaris; überhaupt die Cucurbitaceen.

B. Siebröhren mit Schleim.

1. Atriplex nitens.
2. Boehmeria nivea.
3. Cannabis sativa.
4. Chenopodium murale.
5. Cytisus Laburnum.
6. Hippuris vulgaris.
7. Hottonia palustris.
8. Humulus Lupulus.
9. Myriophyllum spicatum.
10. Oxalis stricta.
11. Parietaria officinalis.
12. Potentilla anserina.
13. Rubus Idaeus.
14. Sedum maximum.
15. Urtica dioïca.

Man vergleiche hierzu den Text pag. 6 bis pag. 7.

Erklärung der Abbildungen.

(Die eingeklammerten Ziffern geben die Vergrösserung an.)

Infolge ungünstiger Verhältnisse sind die Tafeln nicht so ausgefallen, wie ich es gewünscht hätte. Geronnener Siebröhrensaft, Protoplasma, Schleim und Callus sollten sich schärfer von einander abheben.

ca = Callus; *si* = Siebplatte; *s* = Schleim;
a = Stärkekörner; *ge* = Geleitzelle; *cb* = Cambiform.

Tafel I.

Fig. 1. Ecballium Elaterium. Active Siebröhre aus einer unverletzt abgebrühten Pflanze. Der Siebröhrensaft ist zu einem feinkörnigen Gerinnsel erstarrt. (675.)

Fig. 2. Ecballium Elaterium. Active Siebröhre aus gewöhnlichem Alkoholmaterial. Statt des zum Theil ausgeflossenen Siebröhrensaftes ist Schleim als Schlauchkopf und in feineren Strängen vorhanden. Der übrige Raum von wässriger Flüssigkeit eingenommen. (675.)

Fig. 3. Humulus Lupulus. Active Siebröhre aus einem an der lebenden Pflanze unverletzt abgebrühten Stengelstück. Zweiter Typus.

Siebröhre mit Schleim. Derselbe ist hier zu grösseren Strängen verschmolzen. (675.)

Fig. 4. Humulus Lupulus. Active Siebröhre aus demselben Material wie in Fig. 3. Der Schleim ist hier in geringen Mengen im Wandbeleg abgelagert. Schlauchköpfe fehlen. (675.)

Fig. 5. Humulus Lupulus. Active Siebröhre mit starkem Schlauchkopf (*s*) und deutlich callöser Platte aus gewöhnlichem Alkoholmaterial, also partiell entleert. (675.)

Fig. 6. Urtica dioïca. Partiell entleerte Siebröhre aus gewöhnlichem Alkoholmaterial. Schleim (*s*) unter der callösen Platte zum Schlauchkopf angehäuft. (675.)

Fig. 7. Urtica dioïca. Normale Siebröhre aus einem an der Pflanze unverletzt abgebrühtem Stengelstück. Der Schleim wie bei Humulus in Fig. 3. Bei *k* der vermuthliche Rest des Zellkernes. (675.)

Fig. 8. Urtica dioïca. Entwickelung der Siebröhre, nach Kochmaterial. Abscheidung der Schleimtropfen (*s*) im Wandbeleg des noch geschlossenen Röhrengliedes. *k* = Zellkern. (675.)

Fig. 9. Urtica dioïca. Wie Fig. 7, aber nach Maceration mit Schwefelsäure-Glycerin. (675.)

Fig. 10. Dahlia variabilis. Active Siebröhre mit Stärke aus unverletzt abgebrühtem Stengelstück. Schleim in sehr geringen Mengen vorhanden. (675.)

Fig. 11. Dahlia variabilis. Active Siebröhre mit Schlauchkopf (*s*) aus Alkoholmaterial. (675.)

Fig. 12. Euphorbia Lathyris. Active Siebröhre aus einer unverletzt abgebrühten Pflanze. Bei *a* die durch das heisse Wasser aufgequollenen Stärkekörner. Im Wandbeleg kleine Schleimtröpfchen (*s*). (675.)

Fig. 13. Euphorbia Lathyris. Partiell entleerte Siebröhre mit Schlauchkopf (*s*) aus gewöhnlichem Alkoholmaterial. (675.)

Fig. 14. Xanthium Strumarium. Active Siebröhre aus unverletzt abgebrühter Pflanze. Schleimtröpfchen im Wandbeleg. (675.)

Fig. 15. Xanthium Strumarium. Gewöhnliches Alkoholmaterial. Partiell entleerte, active Siebröhre mit Schlauchkopf (*s*) und starkem Callus. (675.)

Fig. 16. Xanthium Strumarium. Entwicklung der Siebröhre. Im noch geschlossenen Röhrenglied finden sich bereits Stärkekörner (*a*) und Schleimtröpfchen (*s*). *k* = Zellkern. (675.)

Fig. 17—43. Cucurbita Pepo.

Fig. 17. Entwickelung des Inhaltes (Kochmaterial). Abscheidung der Schleimtropfen im Wandbeleg. (675.)

Fig. 18. Entwickelung des Inhaltes. (Kochmaterial.) Die Schleimtropfen bis auf kleine Reste (*s*) zum klaren, hier geronnenen Siebröhrensaft gelöst. (675.)

Fig. 19. Kochmaterial. Schwefelsäuremaceration. Der Inhalt steht auf dem Stadium der vorigen Figur, die Siebplatte ist aber noch geschlossen, da andern Falles die Inhalte der beiden Glieder in Verbindung stehen oder doch Andeutung einer solchen, vielleicht durch die Präparation zerstörten, vorhanden sein müssten. (675.)

Fig. 20. Kochmaterial. Inhalt auf einem im Vergleich zu Fig. 17 etwas vorgerückteren Stadium. Schleimtropfen noch nicht alle gelöst, Siebplatten noch geschlossen, Schwefelsäurepräparat. (675.)

Fig. 21. Kochmaterial. Schleimtropfen noch nicht alle gelöst, ihre Lösung hatte vielleicht eben erst angefangen. Die Siebplatte ist aber schon fertig, geöffnet. Bei *si* ist nach Lösung der Cellulose durch die Schwefelsäure der Schleimbeleg der Siebplatte übrig geblieben. (675.)

Fig. 22. Entwickelung der Siebplatte. Kochmaterial. Auftreten der Callusplättchen in den Tüpfelgrübchen. Platte noch geschlossen, die weissen Streifen stellen die Balken des zukünftigen Siebes dar. (800.)

Fig. 23. Fertige callöse Siebplatte. (Kochmaterial.) Die Löcher werden von einem feinkörnigen Gerinnsel, dem geronnenen Siebröhrensaft, erfüllt und am Rande von Schleimringen (*s*) umsäumt. (800.)

Fig. 24. Fertige Siebplatte. (Kochmaterial.) Flächen- und Querschnittsansicht des dünnen, grau punktirten Callusüberzuges. (1200.)

Fig. 25. Flächenansicht einer stark callösen Platte einer obliterirenden Siebröhre nach Auflösung des Callus in Schwefelsäure. Die Löcher der Siebplatte, deren Balkenwerk ungefähr dieselbe Stärke wie in Fig. 22 hat, werden von Schleimfortsätzen (*s*) durchzogen. Der Raum zwischen diesen und den Cellulosebalken wurde vom Callus eingenommen. (Kochmaterial.) (800.)

Fig. 26. Flächen- und Querschnittsansicht des Cellulosesiebes, einer alten stark callösen Platte, durch Schwefelsäure freigelegt. (Kochmaterial.) (800.)

Fig. 27. Querschnitt durch eine noch geschlossene, junge Siebplatte (gewöhnliches Alkoholmaterial). In den seichten Tüpfelgrübchen sind, scharf abgesetzt von der Cellulose, die ersten Anfänge des Callus, Russow's Callusplättchen, sichtbar. (1200.)

Fig. 28. Querschnitt durch eine etwas ältere, aber noch geschlossene Platte, welche vollständig von hier punktirtem Callus überzogen ist. Der protoplasmatische Wandbeleg (*w*) ist verschoben und zeigt deutlich die Ausstülpungen, welche er in die Tüpfel getrieben hatte. Material $^1/_4$ Stunde nach der Lostrennung von der lebenden Pflanze abgebrüht. (1200.)

Fig. 29. Querschnitt durch eine noch geschlossene Platte. (Kochmaterial.) Bei *ca* die Callusplättchen in den Tüpfelgrübchen, welchen die Fortsätze des zurückgezogenen Wandbeleges genau entsprechen. Im Grunde dieser Ausstülpungen ist Schleim abgeschieden, dessen Abdruck gewissermassen der Callus bildet. (1200.)

Fig. 30. Obliterirende Siebröhre. (Kochmaterial.) Der hier und in den beiden folgenden Figuren weiss gelassene, starke Callus wird durchzogen von starken Schleimfortsätzen, welche von dem bereits erstarrten Siebröhrensaft ausgehen. (800.)

Fig. 31. Aelteres Stadium; die Schleimfortsätze sind dünner, der Callus ist dicker geworden. (800.)

Fig. 32. Ganz alter Callus. Einige Streifen senkrecht zur Siebplatte deuten die Stelle an, an welcher früher die Schleimfortsätze verliefen. Diese haben, wie die Fig. 30—32 wahrscheinlich machen, das Material zum Wachsthum des Callus geliefert. (800.)

Fig. 33. Obliterirende Siebröhre aus lebendem Material. Der Callus wird nicht mehr von Schleimfortsätzen durchzogen, der Siebröhrensaft ist zu einem homogenen, glänzenden Schleimfaden erstarrt. (675.)

Fig. 34. Aelteres Stadium der Obliteration des Inhaltes. Im Schleimstrang sind Lücken und Risse, als Zeichen des Zerfalles und der Auflösung sichtbar. Lebendes Material. (675.)

Fig. 35. Obliterirende Siebröhre. (Kochmaterial.) Der Siebröhrensaft ist noch nicht zum Schleimstrang erstarrt, während bereits ein mächtiges Calluspolster die Siebplatte verschliesst. (675.)

Fig. 36. Kochmaterial. Active Siebröhre mit geronnenem Saft aus einem sehr jungen Internodium. (675.)

Fig. 37. Active Siebröhre aus einem ungefähr gleich alten Internodium. Das wachsende Ende der unverletzten Pflanze war in Alkohol geführt worden und hatte darin gegen drei Stunden verweilt. Der in Strömung versetzte Siebröhrensaft hatte, wie bei einer Schnittverletzung, vor der Siebplatte Schleim als Schlauchkopf abgeschieden. (675.)

Fig. 38. Kochmaterial. Obliterirende Siebröhre von der Peripherie eines Siebtheiles aus demselben Präparat wie Fig. 36. Der Saft ist zu einem grobflockigen Niederschlag geronnen, im Wandbeleg sind grössere Schleimtropfen vorhanden. Die Siebplatte ist noch nicht geschlossen. (675.)

Fig. 39. Obliterirende Siebröhre aus demselben Präparat wie Fig. 37. Die Obliteration des Inhaltes hatte hier das Stadium der Figur 38 erreicht, durch den Alkohol wurde aber der Siebröhrensaft in einen Schleimstrang verwandelt. Bei *s* sind die Schleimtropfen im Wandbeleg; wie in Fig. 38 deutlich zu unterscheiden. (675.)

Fig. 40. Kochmaterial. Obliterirende Siebröhre. Das grobflockige Gerinnsel des Siebröhrensaftes ist nicht mehr so dicht, wie beim Beginne der Obliteration, z. B. Fig. 38. (675.)

Fig. 41. Kochmaterial. Obliterirende, völlig entleerte Siebröhre mit Calluspolstern nach den Geleitzellen zu. Welche Veränderungen der Inhalt durchgemacht hat, ist nicht sicher zu bestimmen, wahrscheinlich ist aber, dass er nach der zweiten, im Text geschilderten Weise obliterirt ist. Im andern Falle müsste das Lumen der Röhre bereits stark verengt sein. (675.)

Fig. 42. Kochmaterial. Obliterirende Siebröhre, deren Saft geschwunden ist, der Wandbeleg mit Schleimtropfen hat sich noch erhalten. Die schematische Siebplatte ist noch wenig verändert. Zweiter Modus der Obliteration. (675.)

Fig. 43. Kochmaterial. Obliterirende Siebröhre mit grobkörnigem Gerinnsel des Saftes und stark callöser Platte. (675.)

Tafel II.

Fig. 44. Cucurbita. Obliterirende Siebröhren nach Einwirkung von Alkohol. Wie Fig. 39. Aus den hypodmeralen Siebröhrennetz einer jungen Frucht, welche an der Pflanze ungefähr drei Stunden lang in Alkohol untergetaucht gewesen war. Die Anordnung des Schleimes zeigt, dass eine stärkere Strömung der Gerinnung des Siebröhrensaftes vorausgegangen war. Schwefelsäureglycerinpräparat. (675.)

Fig. 45. Cucurbita. Siebröhre aus der Wand einer jungen Frucht, welche an der Pflanze abgebrüht worden war. Der Inhalt war auch hier vor der Gerinnung in Strömung versetzt worden, wie die schwachen Schlauchköpfchen anzeigen. Die Siebröhre stand im Anfange der Obliteration, ungefähr auf demselben Stadium wie in der bei Fig. 44 besprochenen Frucht. Schwefelsäureglycerinpräparat. (675.)

Fig. 46. Ecballium Elaterium. Obliterirende Siebröhren mit Schleimstrang aus dem Mittelnerv eines gelblichen, am 21. October untersuchten Blattes; lebendes Material. Nicht alle Siebplatten sind stark callös. (200.)

Fig. 47. Ecballium Elaterium. Obliterirende, schleimerfüllte Siebröhre aus dem oberen Siebtheil eines feinsten Maschenbündels. Von demselben Blatt wie Fig. 46. (570.)

Fig. 48. Cucurbita. Active Siebröhre mit Geleitzelle nach Behandlung mit concentrirter Schwefelsäure und Anilinblau. Das Gerinnsel des Siebröhrensaftes ist in zahlreiche gegen die Geleitzelle gerichtete Fortsätze ausgezogen. Kochmaterial. (675.)

Fig. 49. Cucurbita. Kochmaterial, nach Anwendung der Russow'schen Quellungsmethode. Zwei benachbarte Siebröhren (*sb*) mit zahlreichen Siebfeldern in der sie trennenden Wand (*w*). Diese von feinen Verbindungsfäden durchsetzt. (675.)

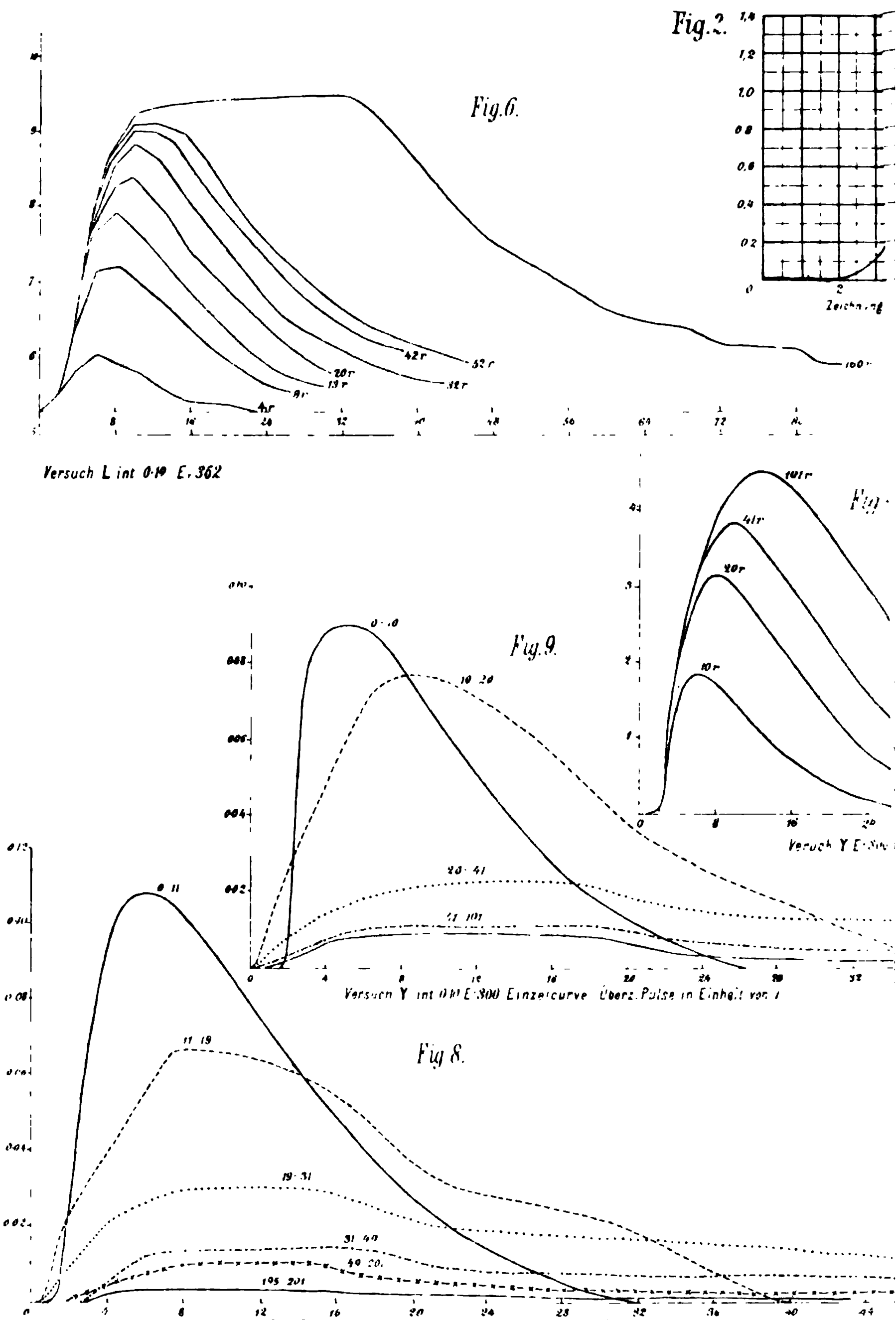
Fig. 50. Cucurbita. Kochmaterial. Dicker Querschnitt durch einen Siebtheil, mit concentrirter Schwefelsäure behandelt. Alle Cambiformzellen stehen durch feine Protoplasmafäden in Communication, sind aber weder mit den Siebröhren (*sb*) noch mit den Geleitzellen (*ge*) verbunden. (675.)

Fig. 51. Cucurbita. Kochmaterial nach Anwendung der Russow'schen Quellungsmethode. Das Gerinnsel des Siebröhreninhaltes zeigt zahlreiche haarfeine Fortsätze nach der Geleitzelle zu, bei einigen derselben war deutlich zu sehen, dass sie mit dem Protoplasma

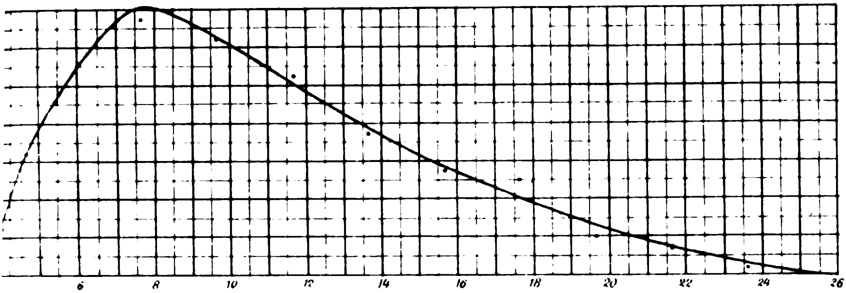
der Geleitzelle zusammenhängen. Unterhalb derselben grenzte die Siebröhre an Cambiform, die Verbindungsfäden fehlen diesem gegenüber. Die Zeichnung stellt gleichzeitig einen Schlauchkopf aus Kochmaterial vor und zeigt, dass auch in der lebenden Pflanze solche Bildungen gelegentlich entstehen, wie sich aus dem Verhalten bei der Verletzung schon ergiebt. (800.)

Fig. 52. Cucurbita (Kochmaterial). Querschnitt durch eine noch geschlossene Siebplatte, die Callusplättchen *ca* zeigend, welche durch Resorption der sie trennenden Tüpfelwand bereits einander sehr nahe gerückt sind. (1200.)

Fig. 53. Cucurbita (Kochmaterial). Junge Querwand (zukünftige Siebplatte) vor dem Sichtbarwerden des Callus. Eine sehr schwache, unregelmässige Tüpfelung ist angedeutet. (1200.)

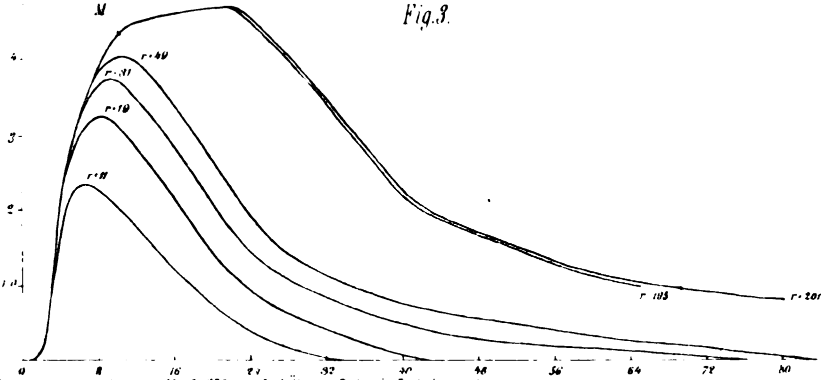


Berichte d. K. S. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 1886.
Zur Abhandlung von Erwin Voit.

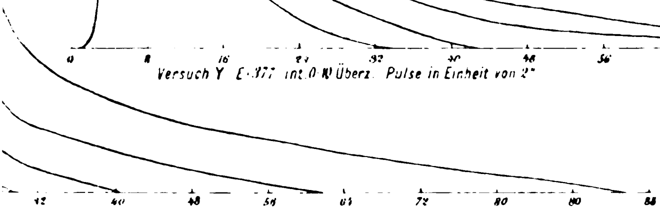


…spiel für die Correctur (Originalcurve).

Fig. 3.



Versuch Y E=377 int. 0.40 Überz. Pulse in Einheit von 2"



… 0.40 Überz. Pulse in Einheit von 2"

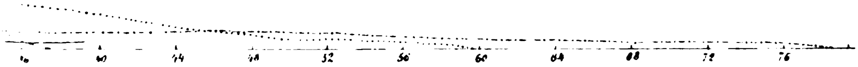
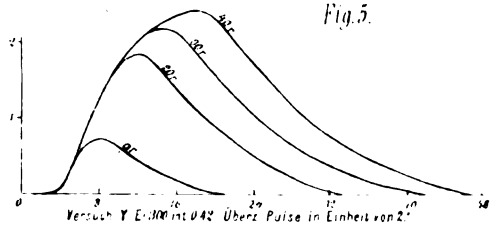
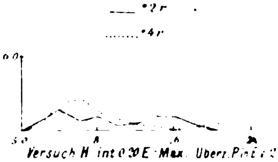


Fig. 5.

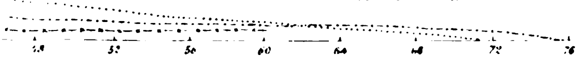


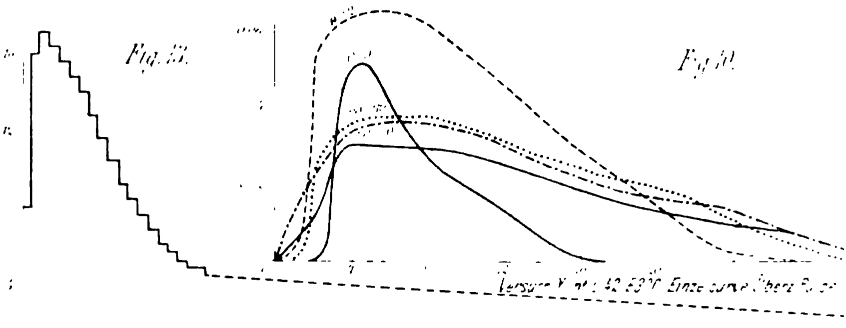
Versuch Y E=300 int 0.42 Überz. Pulse in Einheit von 2"

Fig. 7.

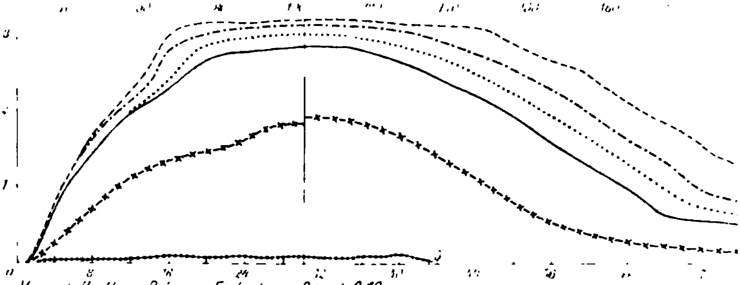


Versuch H int 0.20 E Max. Überz. Pin E 2"

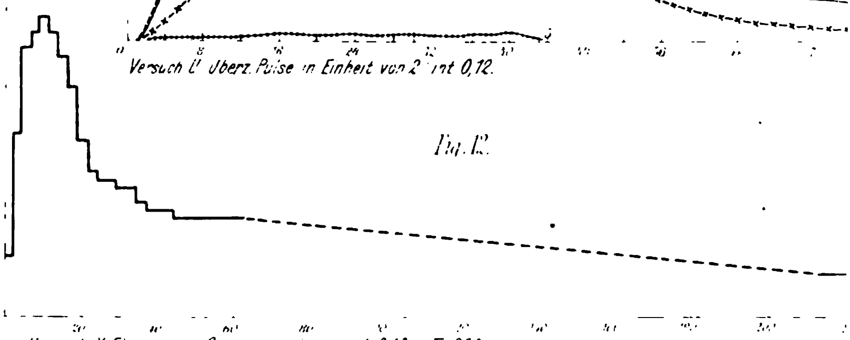




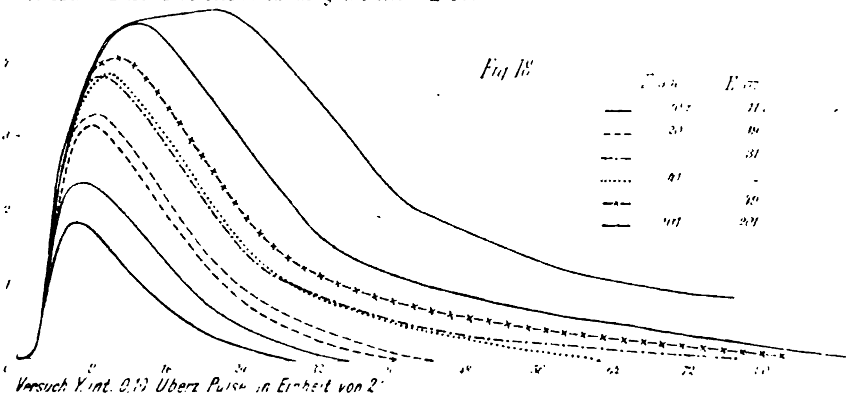
Versuch Y. Einzelcurve Gesammtwirkung int 0.10. E 377



Versuch U. Überz. Pulse in Einheit von 2' int 0,12.



Versuch Y. Einzelcurve Gesammtwirkung int 0.10 E 300.



Versuch Y. int. 0.10 Überz. Pulse in Einheit von 2'

Berichte d. K. S. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl.
Zur Abhandlung von Erwin Veit.

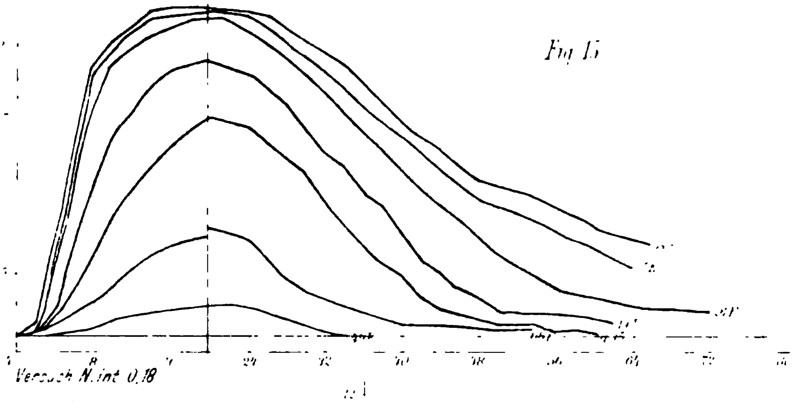
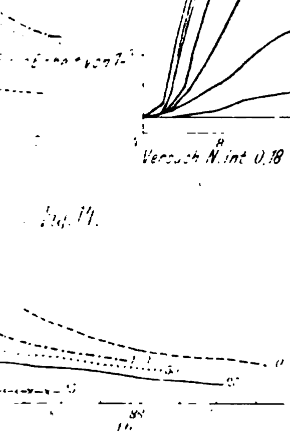


Fig. 15.

Fig. 14.



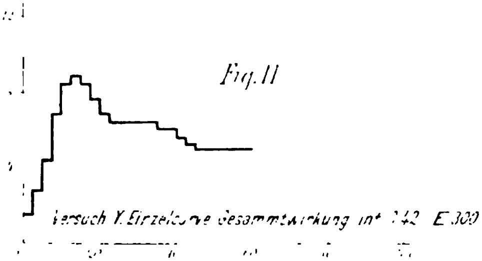


Fig. 11

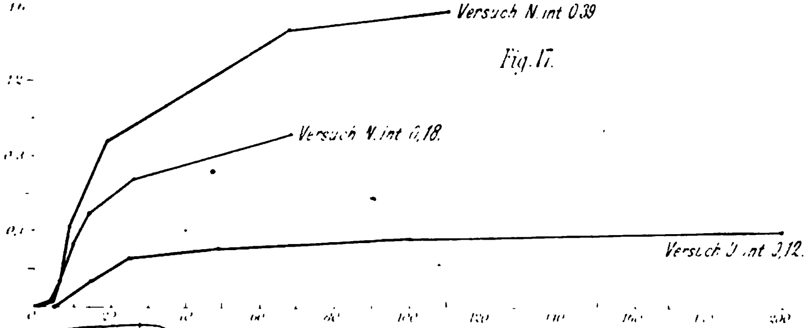


Fig. 17.

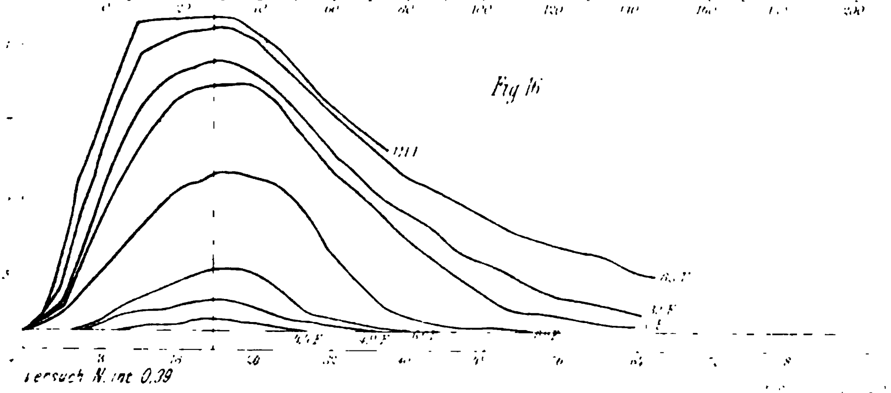
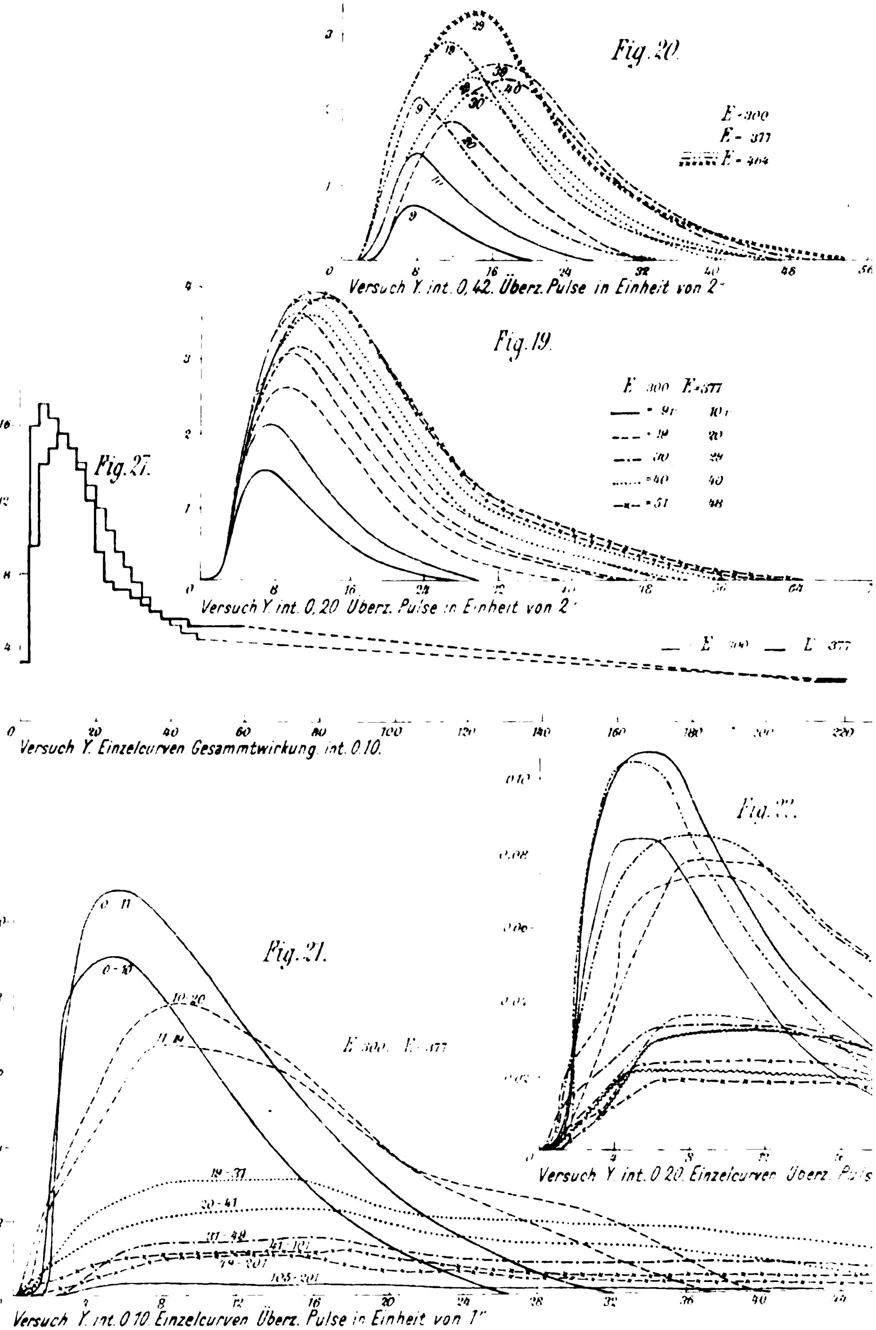


Fig. 16



hte d. K. S. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 1886
bhandlung von Erwin Voit

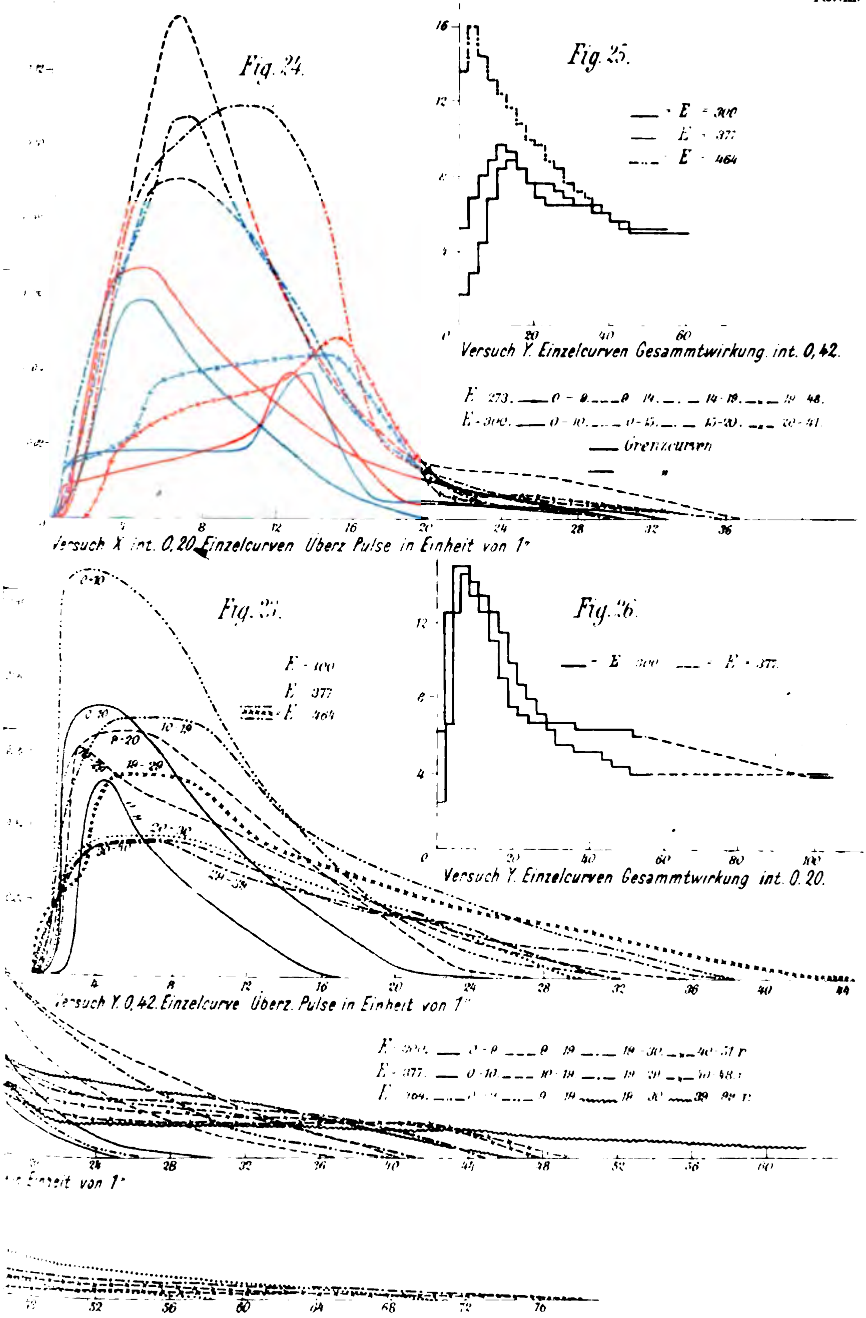


Fig. 24.
Fig. 25.
E = 300
E = 377
E = 464
Versuch Y. Einzelcurven Gesammtwirkung. int. 0,42.
Grenzcurven
Versuch X int. 0,20 Einzelcurven Überz. Pulse in Einheit von 1"
Fig. 27.
Fig. 26.
E = 300
E = 377
Versuch Y. Einzelcurven Gesammtwirkung int. 0,20.
Versuch Y. 0,42. Einzelcurve Überz. Pulse in Einheit von 1"
Einheit von 1"

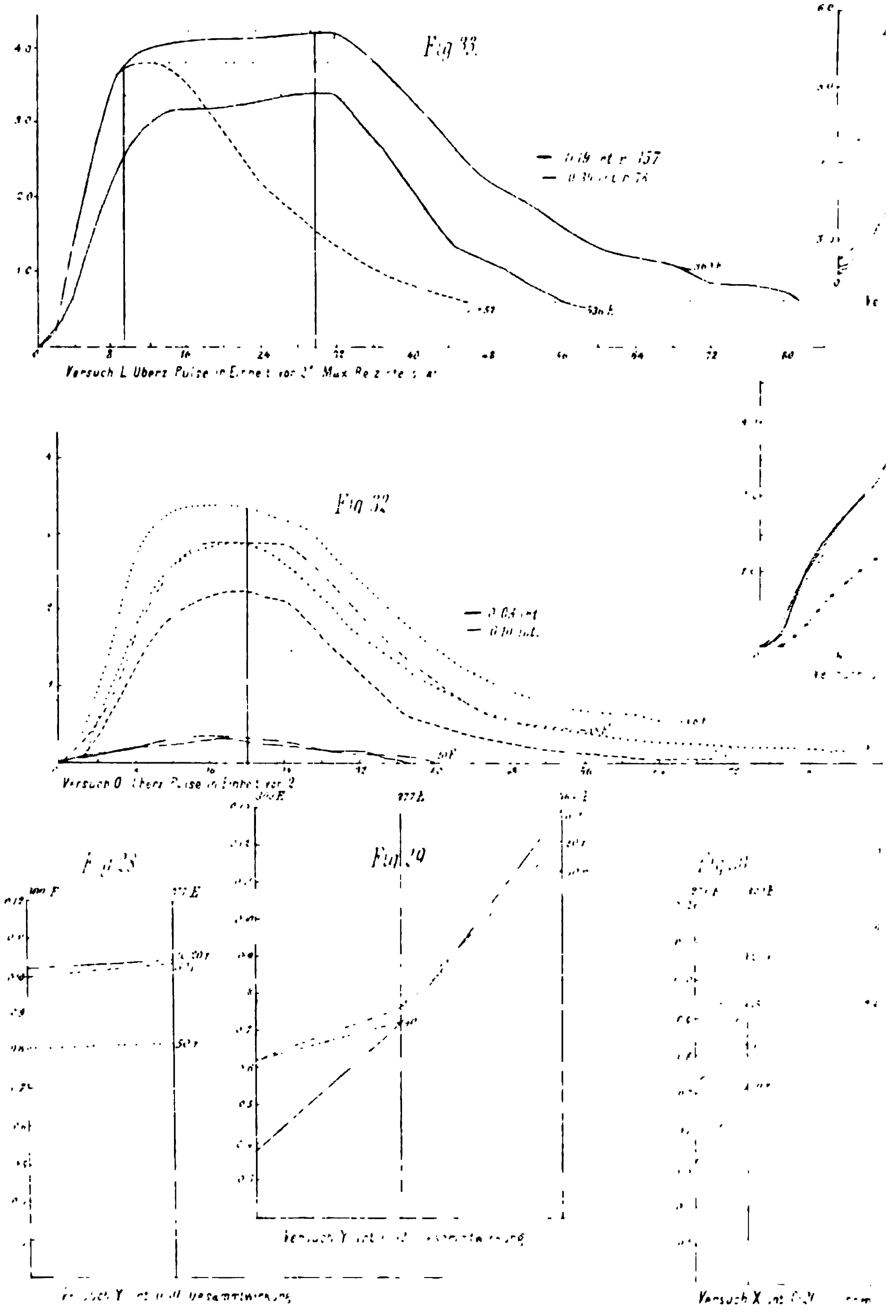


Fig 33
Fig 32
Fig 29
Versuch L
Versuch O
Versuch Y
Versuch X

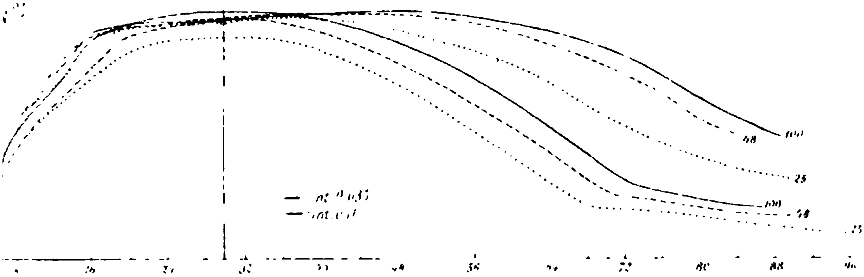
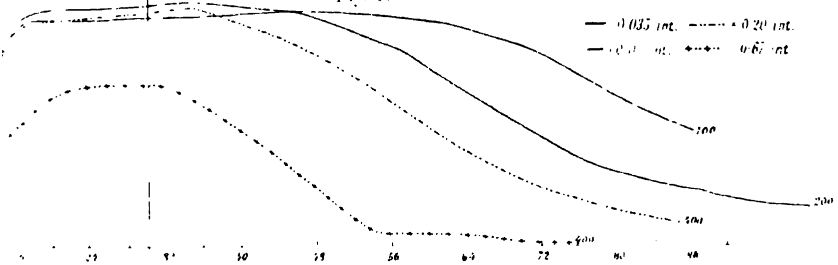
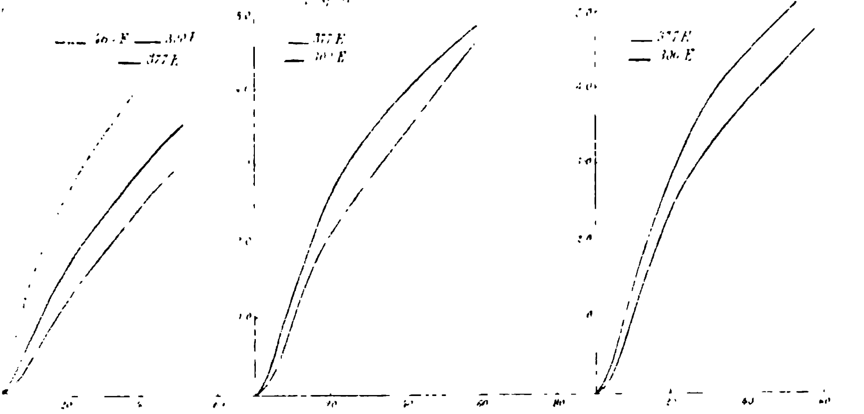


Fig. 35.





Versuch Y Gesammtwirkung d. überz. Pulse int. 0.20

überz. Pulse

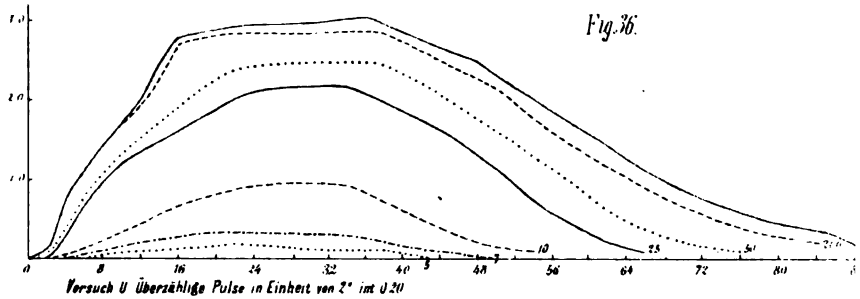


Fig. 36.
Versuch U Überzählige Pulse in Einheit von 2" int 0.20

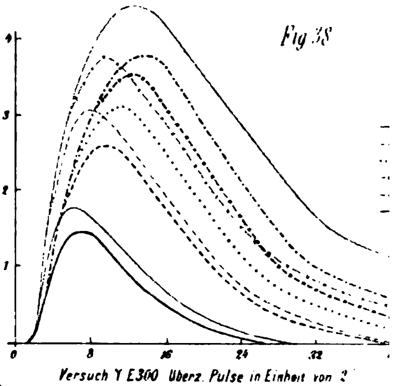


Fig. 38.
Versuch Y E300 Überz. Pulse in Einheit von 2"

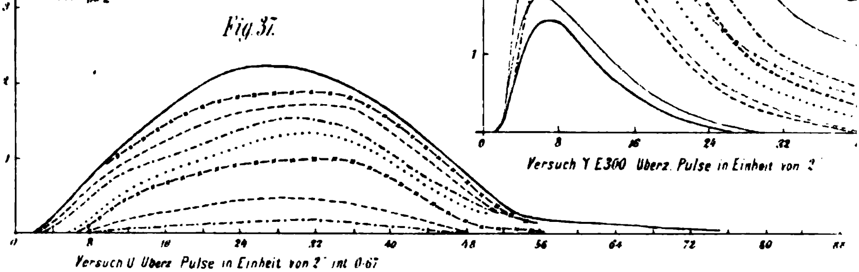


Fig. 37.
400 E u. —
300 E · 16 E
200 E · 10 E
100 E · 7 E
50 E · —
Versuch U Überz. Pulse in Einheit von 2" int 0.67

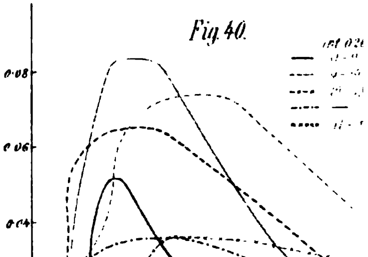


Fig. 40.

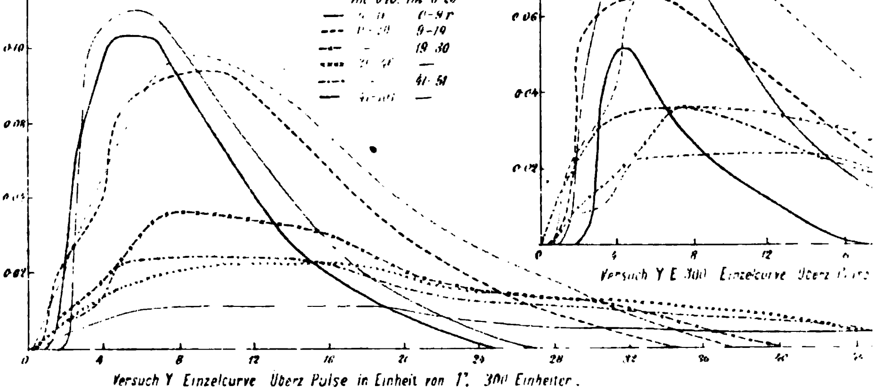
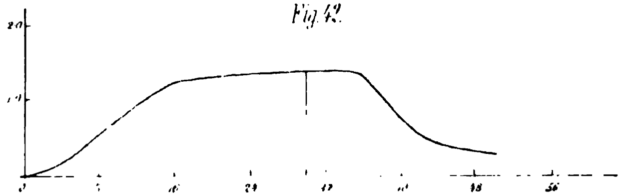


Fig. 41.
int 0.10. int 0.20
Versuch Y Einzelcurve Überz. Pulse in Einheit von 1". 300 Einheiten.

Fig. 42.



Ü Versuch X int. 1.0 E 336 Überz. Pulse in Einheit von 2

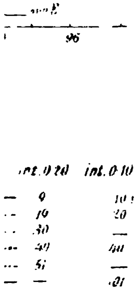
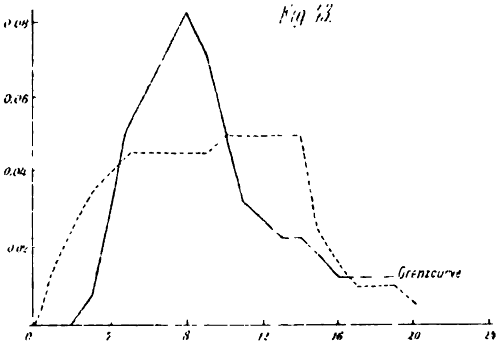
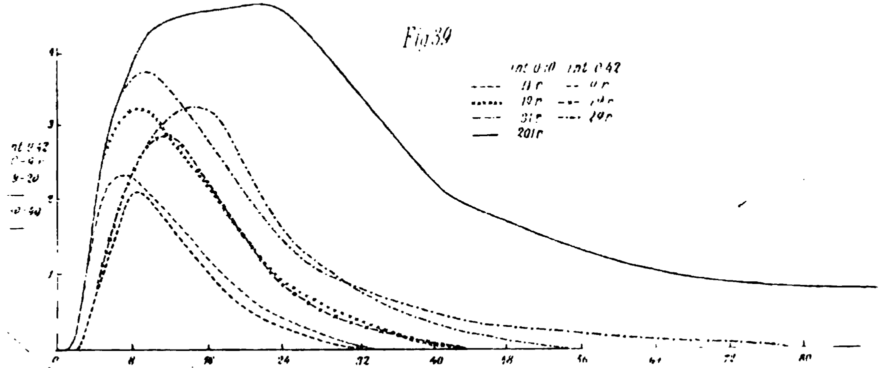


Fig. 43.

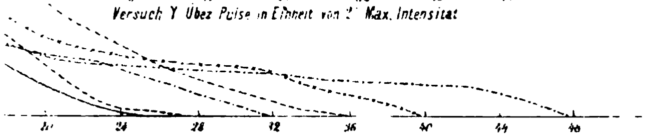


Veruch X E.300 int. 0.10 Einzelcurve Überz. Pulse in Einheit von 1"

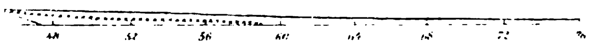
Fig. 39.

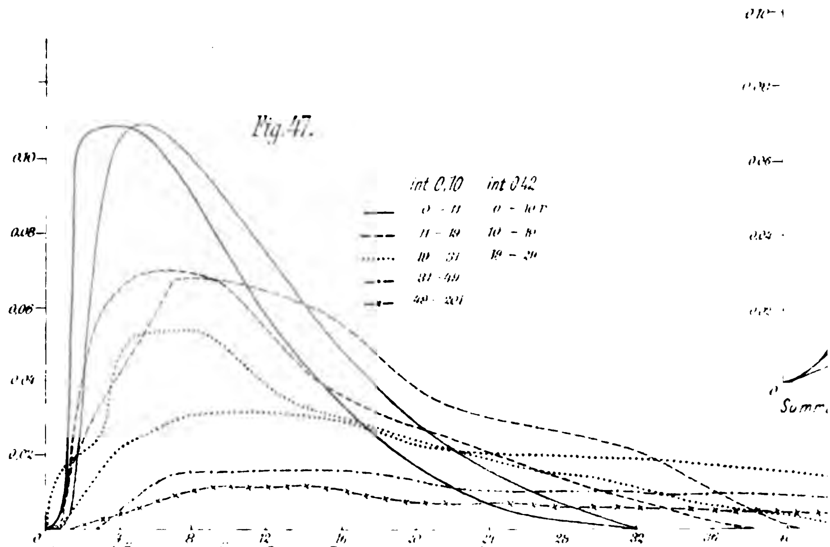


Versuch Y Überz. Pulse in Einheit von 2" Max. Intensität

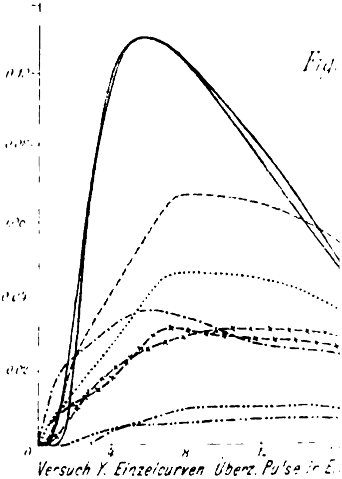


... Einheit von 1

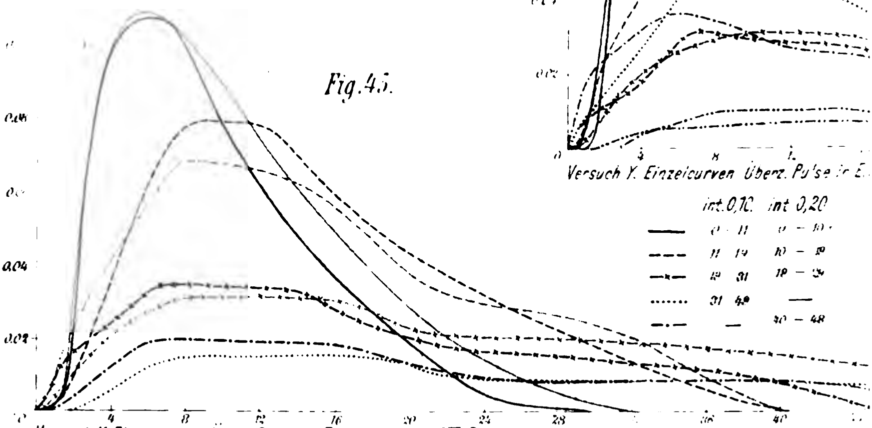




Versuch Y. Einzelcurven. Überz. Pulse in Einheit von 1° Max. intensität



Versuch Y. Einzelcurven. Überz. Pulse in E…

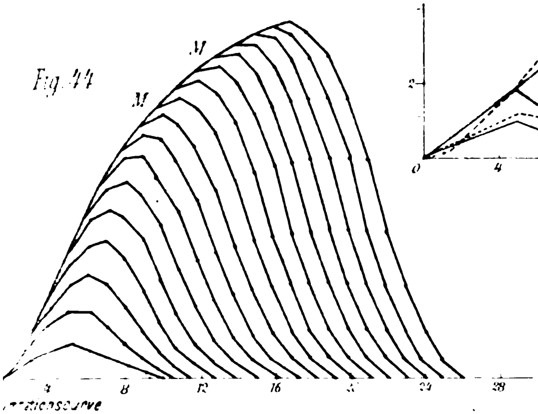


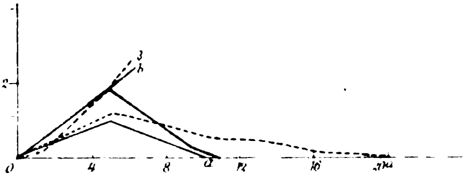
Versuch Y. Einzelcurven. Überz. Pulse in Einheit von 1° 377 Einheiten.

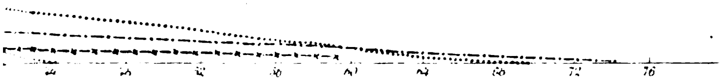
Berichte d. K. S. Ges. d. Wiss. math.-phys. Cl. 1898.

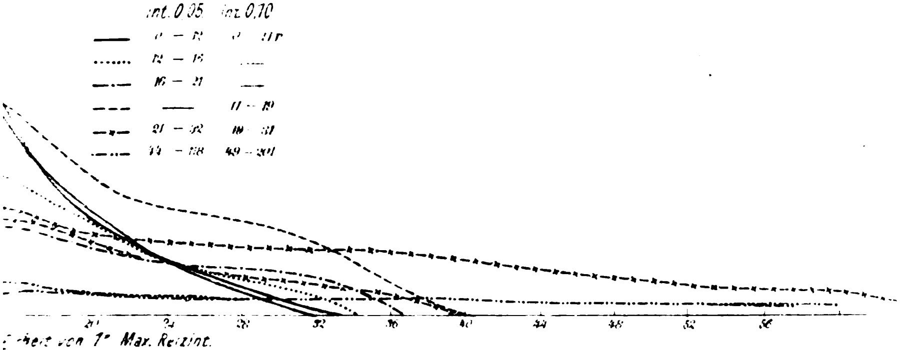
Zur Abhandlung von Erwin Voit.

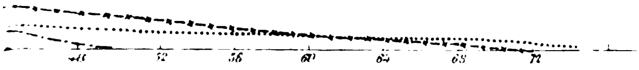
Fig. 44

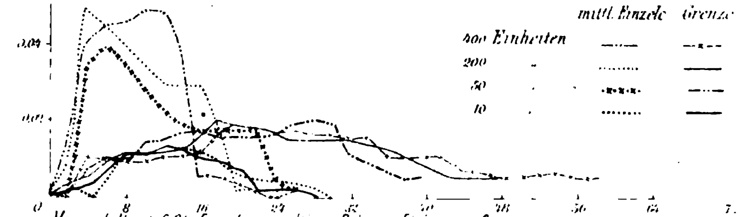

M
M
4
8
12
16
24
28


2
0
4
8
12
16
3
b
a

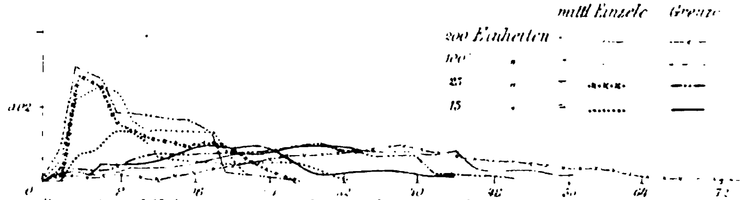

72
76


Int. 0.05
Int. 0,10
24
28
32
36
40
44
48
52
56
Max. Reizint.


52
56
60
64
72

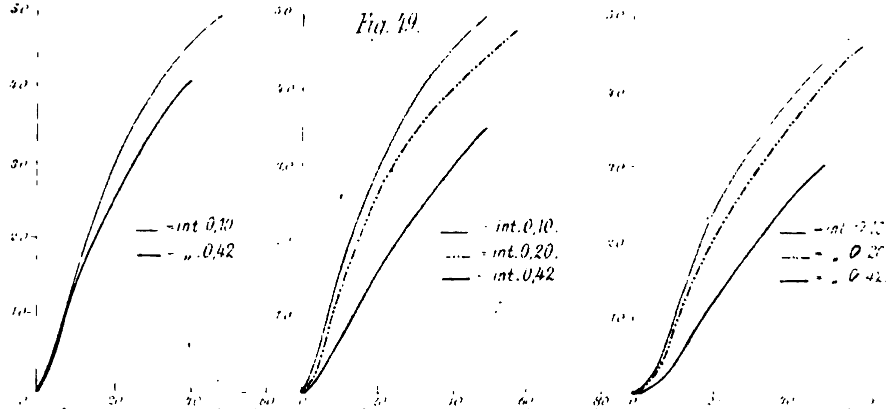


Versuch U. int 0,20 Einzelcurven über z Pulse in Einheit von 2''



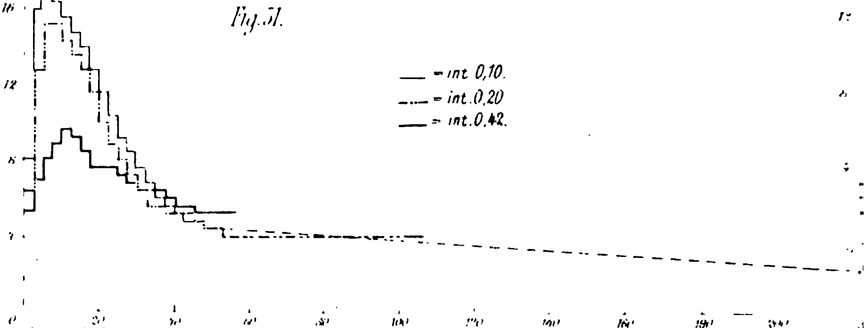
Versuch U int 0,10 Einzelcurven über z Pulse in Einheit von 2''

Fig. 49.



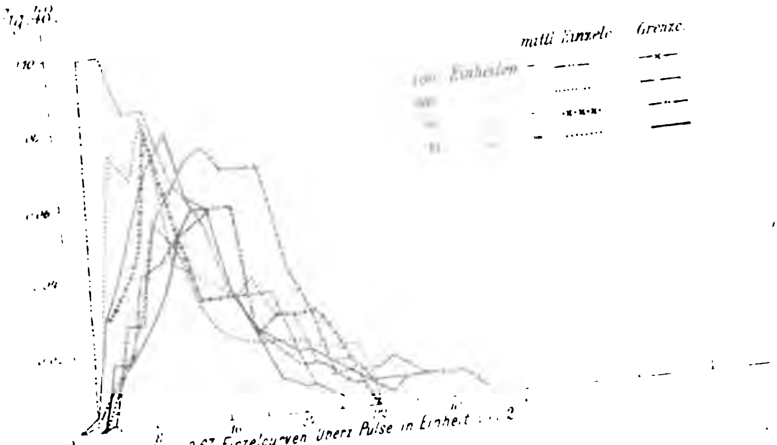
Versuch Y Gesammtwirkung über z Pulse Max int. Versuch Y Gesammtwirkung über z Pulse E- 377 Versuch Y Gesammtwirkung über z Pulse

Fig. 51.



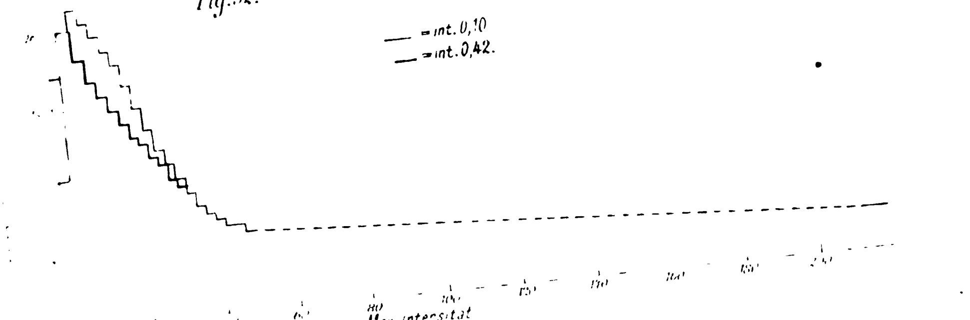
Versuch Y Gesammtwirkung Einzelcurven E- 377

Fig. 48.



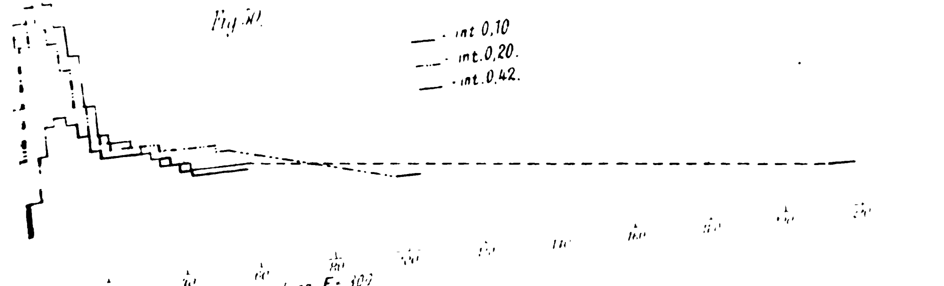
Versuch U. int. 0,67. Einzelcurven. Unerz. Pulse in Einheit ... 2

Fig. 52.



Versuch I. Einzelcurven. Gesammtwirkung. Max. intensität.

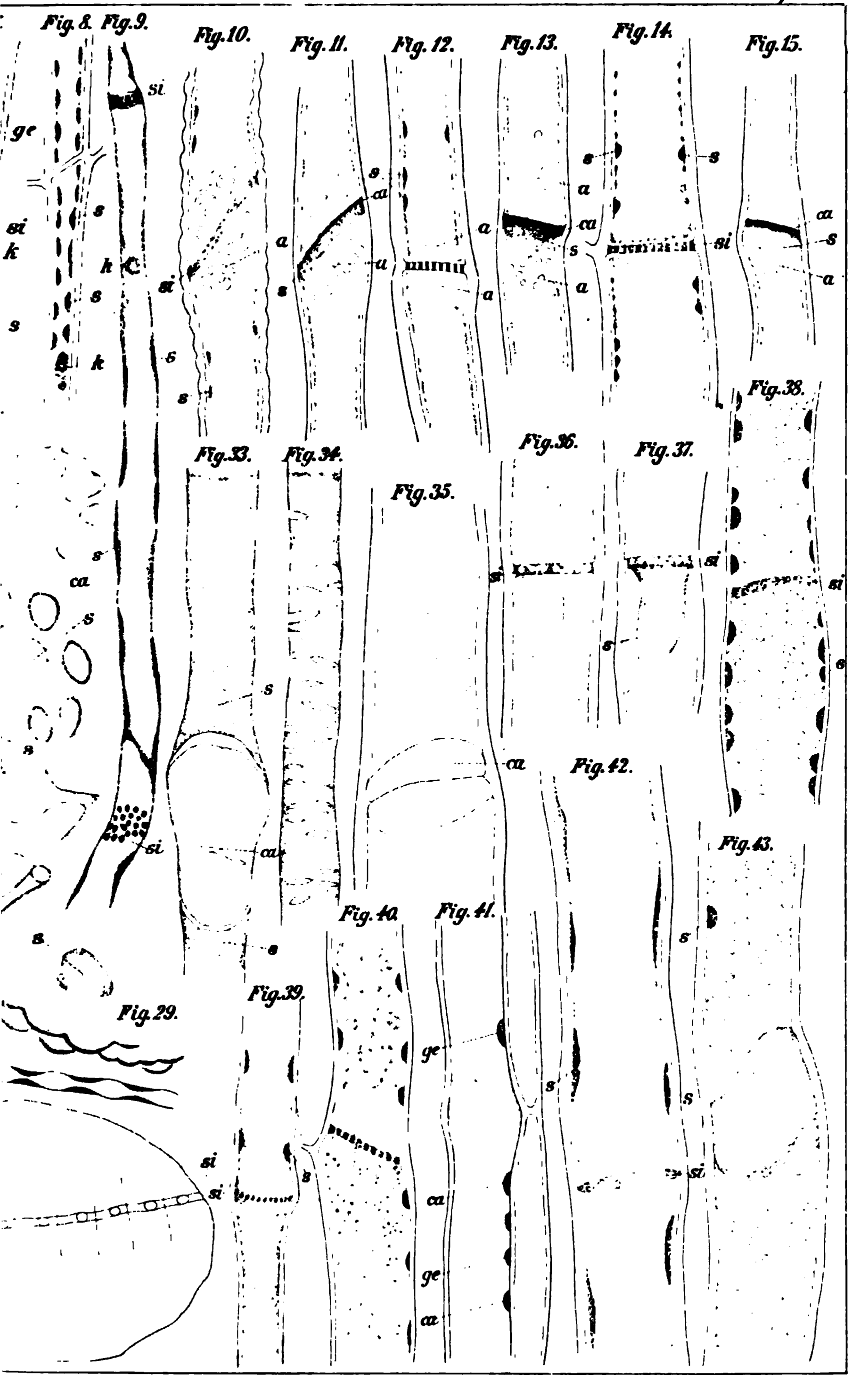
Fig. 50.



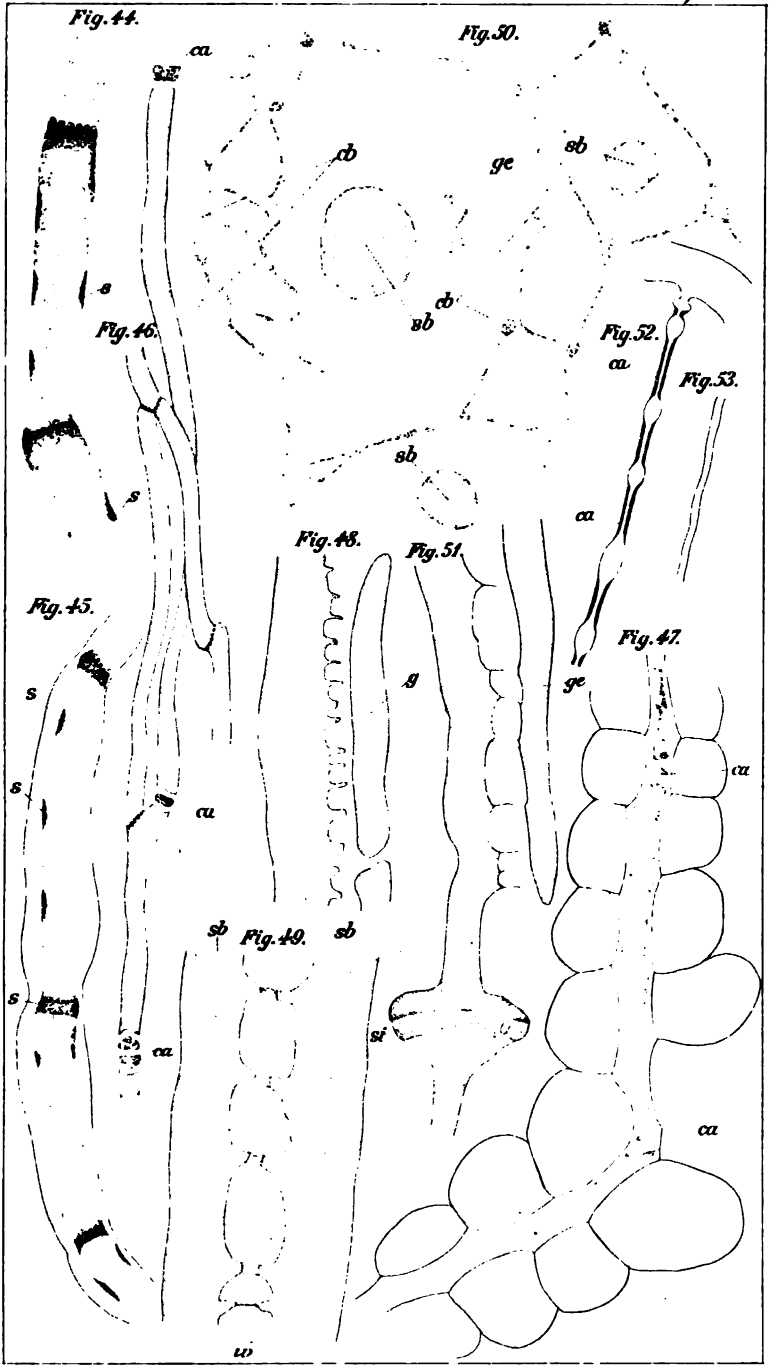
Einzelcurven. Gesammtwirkung. E = 300

A. Fischer gez.

Tafel I.



Lith. v. Breitkopf & Härtel.



A. Fischer gez. Lith. v. Breitkopf & Härtel.

INHALT.

Seite

Erwin Voit, Die Schlagzahl des Herzens in ihrer Abhängigkeit von der Reizung des Nervus accelerans. (Aus dem physiologischen Institut zu Leipzig.) Mit 7 Tafeln und 2 Holzschnitten 207

W. His, Ueber embryonale Ganglienzellen. 290

Alfred Fischer, Neue Beiträge zur Kenntniss der Siebröhren. (Vorgelegt v. d. w. Mitgliede Schenk Mit 2 Tafeln.) . 291

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1886.

SUPPLEMENT.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

SITZUNG AM 25. OCTOBER 1886.

Sophus Lie, *Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.*

Helmholtz' berühmte Arbeit »über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen« behandelt ein Problem, welches mit der neueren Theorie der Transformationsgruppen im engsten Zusammenhange steht. Von Klein aufgefordert habe ich daher versucht, auf dieses wichtige, wenn auch specielle Problem die Methoden meiner Transformationstheorie anzuwenden. Dabei bin ich zu der Ueberzeugung gekommen, dass die bahnbrechenden Untersuchungen von v. Helmholtz doch noch nicht als das letzte Wort über diesen Gegenstand zu betrachten sind.

Einmal nämlich enthält die Helmholtz'sche Deduction eine Lücke, welche allerdings, jedenfalls für drei Dimensionen, auf das Endergebniss keinen Einfluss ausübt; es hat mir jedoch nicht gelingen wollen, diese Lücke mit denselben einfachen analytischen Mitteln auszufüllen, mit denen v. Helmholtz in seiner Arbeit auskommt.

Andererseits glaube ich bewiesen zu haben, dass in Räumen von drei Dimensionen das Monodromieaxiom, welches bei v. Helmholtz eine so grosse Rolle spielt, entbehrlich ist, wenn man sein Axiom der freien Beweglichkeit in naturgemässer Weise deutet.

Endlich halte ich es für zweckmässig, die Helmholtz'schen Axiome durch andere zu ersetzen, welche mir einfacher erscheinen.

Allerdings sind die Untersuchungen, die mich zu diesen Resultaten geführt haben, in Vergleich mit den v. Helmholtz'schen weitläufig und erfordern längere Rechnungen. Ich werde mich daher hier darauf beschränken, meine vorhin angedeuteten Resultate etwas ausführlicher auseinanderzusetzen, um ihren Sinn möglichst klar zu stellen. Dabei halte ich mich ebenfalls in Raume von drei Dimensionen.

Alle Bewegungen des dreifach ausgedehnten Euclidischen

oder Nichteuclidischen Raumes werden dargestellt durch drei Transformationsgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = f(x\,y\,z\,a_1\,a_2\,\ldots) \\ y_1 = \varphi(\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;\ldots) \\ z_1 = \psi(\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;\ldots), \end{cases}$$

in denen $a_1\,a_2\ldots$ Parameter sind. Giebt man diesen Parametern bestimmte Werthe, so erhält man eine bestimmte Bewegung, bei welcher jeder Punkt $x\,y\,z$ die neue Lage $x_1\,y_1\,z_1$ annimmt. Befinden wir uns z. B. im Euclidischen Raume, und betrachten $x\,y\,z$ als Cartesische Coordinaten, so sind die drei Functionen f, φ und ψ linear in $x\;y\;z$. Bedient man sich dagegen anderer Coordinatensysteme, so erhält der analytische Ausdruck für die Bewegungen des Euclidischen Raumes im Allgemeinen eine nicht-lineare Form.

Das Problem, welches sich v. Helmholtz in der citirten Arbeit gestellt hat, ist nun im Wesentlichen folgendes. Er sucht solche Eigenschaften des analytischen Ausdruckes der Bewegungen, welche von der Coordinatenwahl unabhängig sind und welche diese Schaar von Transformationen des Raumes in möglichst einfacher Weise charakterisiren. Die von v. Helmholtz gewählten Eigenschaften, welche sowohl den Euclidischen wie den Nichteuclidischen Bewegungen zukommen, lassen sich, soviel ich sehe, folgendermassen resumiren.

Erstens: Die Functionen f, φ und ψ, welche in den betreffenden Transformationsgleichungen auftreten, sind analytische Functionen ihrer Argumente.

Zweitens: Zwei Punkte $x_1\,y_1\,z_1$ und $x_2\,y_2\,z_2$ haben jeder Bewegung gegenüber eine Invariante

$$\Omega\,(x_1\,y_1\,z_1\,x_2\,y_2\,z_2)\,,$$

ihre Entfernung in der gewöhnlichen Sprachweise. Im Euclidischen Raume bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten hat diese Invariante bekanntlich die Form

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,.$$

Als *dritte* Eigenschaft wählt v. Helmholtz die freie Beweglichkeit des betreffenden Raumes, welche er folgendermassen definirt. Ein jeder Punkt des Raumes kann in jeden anderen übergehen. Wird ein Punkt $x_1\,y_1\,z_1$ festgehalten, so kann jeder

andere Punkt $x_2\, y_2\, z_2$ noch alle Lagen $x\, y\, z$ annehmen, welche *eine* Gleichung befriedigen, nämlich die Gleichung:

$$\Omega(x\, y\, z\, x_1\, y_1\, z_1) = \Omega(x_2\, y_2\, z_2\, x_1\, y_1\, z_1)\,.$$

Werden zwei Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ und $x_2\, y_2\, z_2$ festgehalten, so kann jeder dritte Punkt $x_3\, y_3\, z_3$ noch alle Lagen annehmen, welche durch die beiden Gleichungen

$$\Omega(x\, y\, z\, x_1\, y_1\, z_1) = \Omega(x_3\, y_3\, z_3\, x_1\, y_1\, z_1)$$
$$\Omega(x\, y\, z\, x_2\, y_2\, z_2) = \Omega(x_3\, y_3\, z_3\, x_2\, y_2\, z_2)$$

definirt werden. Werden endlich drei Punkte festgehalten, so sind die möglichen Lagen eines vierten Punktes durch drei analoge Gleichungen bestimmt. In diesem Falle bleiben alle Punkte des Raumes fest, ausgenommen wenn der Punkt $x_3\, y_3\, z_3$ den beiden ersten Punkten gegenüber eine specielle Lage hat.

Endlich *viertens* legt v. Helmholtz dem Raume noch die folgende Eigenschaft ausdrücklich bei: Wenn ein fester Körper sich ohne Umkehr um zwei in Ruhe befindliche Punkte dreht, so führt diese Drehung schliesslich in die Anfangslage zurück.

v. Helmholtz behauptet ausdrücklich, dass diese letzte Eigenschaft — die Monodromie des n-fach ausgedehnten Raumes — keine Consequenz der drei zuerst genannten ist; doch bringt er, ausgenommen für $n = 2$, keinen Beweis für die Richtigkeit seiner Behauptung.

Um nun nachzuweisen, dass die vier von ihm aufgestellten Eigenschaften für die Euclidischen und Nichteuclidischen Bewegungen charakteristisch sind, sucht v. Helmholtz überhaupt alle Systeme von Transformationsgleichungen zu bestimmen, welche diese Eigenschaften besitzen. Wie ich schon oben gesagt habe, scheint es mir, dass seine Durchführung dieser Bestimmung eine Lücke enthält. Wird nämlich ein Punkt von allgemeiner Lage festgehalten, so sind, wie v. Helmholtz zeigt, noch unendlich viele unendlich kleine Bewegungen, d. h. Transformationen, möglich. Jede solche Bewegung lässt sich, wenn man den festen Punkt zum Coordinatenanfange wählt, durch Gleichungen von der folgenden Form definiren:

$$\frac{dx}{d\eta} = a_0\, x + b_0\, y + c_0\, z + \dots$$
$$\frac{dy}{d\eta} = a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z + \dots$$
$$\frac{dz}{d\eta} = a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z + \dots$$

Die rechten Seiten sind dabei unendliche Potenzreihen nach $x\ y\ z$. Es ist nun a priori sehr gut denkbar, dass es unter den hierdurch dargestellten unendlich kleinen Bewegungen solche giebt, in deren Reihenentwickelungen die Glieder erster Ordnung sämmtlich fehlen, und insbesondere ist es denkbar, dass dies bei allen Bewegungen um den festen Punkt eintritt, die auch noch einen benachbarten Punkt invariant lassen. Bei solchen unendlich kleinen Bewegungen würden dann alle dem Coordinatenanfange unendlich benachbarten Punkte in Ruhe bleiben, wenn man von infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung absieht. Diese Möglichkeit wird, soviel ich sehe, von v. Helmholtz jedenfalls nicht hinlänglich berücksichtigt. Ich möchte daher fragen: Ist es wirklich so selbstverständlich, dass die Coefficienten $a_i\ b_i\ c_i$ nicht gleichzeitig verschwinden können, wenn unsere Transformationsgleichungen die betreffenden oben verlangten Eigenschaften besitzen?

Meine zweite Bemerkung bezieht sich auf das Axiom der Monodromie. Hier muss ich vor allen Dingen hervorheben, dass solche Transformationsgleichungen, welche v. Helmholtz' drei erste Axiome befriedigen, nothwendig eine continuirliche Gruppe bilden. Der Begriff Gruppe kommt aber bei v. Helmholtz nicht explicite vor, und doch ist gerade die Gruppeneigenschaft der Transformationsgleichungen von der grössten Tragweite; sie ist an und für sich schon eine gewaltige Beschränkung der möglichen Fälle.

Um nun zu unterscheiden, ob die Monodromie eine Consequenz von den drei ersten Eigenschaften ist, muss man zunächst die Eigenschaft der freien Beweglichkeit genauer *präcisiren*. Man kann sich nämlich entweder damit begnügen zu verlangen, dass die freie Beweglichkeit für Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage bestehen soll; man kann dagegen auch die weitergehende Forderung stellen, dass die freie Beweglichkeit innerhalb eines gewissen Bereiches ausnahmslos gilt.

v. Helmholtz hat nun zwar, nach dem Wortlaute seiner Auseinandersetzungen zu urtheilen, wahrscheinlicherweise gewollt, dass seine Forderung der freien Beweglichkeit innerhalb eines gewissen Bereiches ausnahmslos erfüllt sein sollte. Gleichwohl schien es mir zweckmässig, auch einmal die Voraussetzung zu Grunde zu legen, dass die freie Beweglichkeit nur für Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage stattfindet. Unter dieser

Annahme habe ich daher alle Gruppen von Transformationsgleichungen bestimmt, welche die drei ersten der früher aufgestellten Forderungen befriedigen.

Ausser den Gruppen der Euclidischen und der Nichteuclidischen Bewegungen ergaben sich da noch mehrere verschiedene Gruppen, unter denen zwei[1]) sogar je einen wesentlichen Parameter enthalten. Diese hinzutretenden Gruppen genügen aber der Forderung freier Beweglichkeit nicht, wenn man diese Forderung auf alle Punkte eines beliebig kleinen Bereiches erstreckt. Bei jeder dieser Gruppen wird nämlich der Raum in eine Schaar von ∞^2 Curven zerlegt, deren Inbegriff jedesmal bei der Gruppe invariant bleibt, während die einzelnen Curven der Schaar untereinander vertauscht werden. Aber noch mehr. *Hält man einen Punkt des Raumes fest, so bleibt nicht allein die hindurchgehende Curve dieser Schaar, sondern auch jeder einzelne Punkt der betreffenden Curve bleibt in Ruhe.* An einer anderen Stelle werde ich hierauf genauer eingehen. Man kann vielleicht darüber streiten, ob die Monodromie eine Consequenz der drei ersten Axiome ist oder nicht. Sie ist jedenfalls eine Consequenz, wenn man in das Axiom der freien Beweglichkeit ausdrücklich hineinlegt, dass die ∞^3 Punkte des Raumes sich nicht derart in ∞^2 Schaaren vertheilen lassen, dass alle ∞^1 Punkte einer solchen Schaar stets gleichzeitig in Ruhe bleiben.

Ich komme jetzt zu meiner *dritten Bemerkung, auf welche ich das Hauptgewicht legen möchte.* Es ist mir gelungen und zwar durch ziemlich einfache Betrachtungen zu beweisen, dass die Transformationsgleichungen der Euclidischen und Nichteuclidischen Bewegungen des dreifach ausgedehnten Raumes sich in der folgenden einfachen Weise charakterisiren lassen:

Erstens. Sie bestimmen eine continuirliche Transformationsgruppe eines dreifach ausgedehnten Raumes.

Zweitens. Bei dieser Gruppe findet freie Beweglichkeit in dem folgenden Sinne statt: Hält man innerhalb eines gewissen Bereiches einen beliebigen Punkt und gleichzeitig ein beliebiges hindurchgehendes Linienelement fest, so ist immer noch continuirliche Bewegung möglich. Hält man dagegen nicht allein einen Punkt und ein hindurchgehendes Linienelement, sondern

1) Die beiden im Texte besprochen Gruppen sind übrigens mit einander durch eine imaginäre Transformation ähnlich.

zugleich ein Flächenelement fest, welches sowohl durch den Punkt als durch das Linienelement geht, so ist keine continuirliche Bewegung mehr möglich.

Es ist mir ferner durch, soviel ich sehe, strenge wenn auch nicht gerade kurze Entwickelungen gelungen, auch für Räume von mehr als drei Dimensionen zu beweisen, dass die Schaar der Euclidischen bez. Nichteuclidischen Bewegungen sich in ganz analoger Weise charakterisiren lässt.

Bei den vorhergehenden Entwickelungen habe ich angenommen, dass die Transformationsgleichungen (1) in den vorkommenden Variabeln analytisch sind. Lässt man diese Voraussetzung fallen und setzt nur voraus, dass die betreffenden Functionen continuirlich sind und eine gewisse endliche Anzahl Differentialquotienten besitzen, so bleibt die Methode, welche ich bei meiner Discussion der v. Helmholtz'schen Axiome angewandt habe, nicht mehr gültig. In diesem Falle wage ich daher nicht zu behaupten, dass die besprochene Lücke in v. Helmholtz's Deduction ohne Einfluss auf das Resultat ist, noch weniger, dass sein Monodromieaxiom eine Consequenz seiner anderen Axiome ist.

Lege ich meine beiden Axiome zu Grunde, so kann ich, wie ich glaube, streng beweisen, dass die betreffende Gruppe auch in diesem Falle einen quadratischen Ausdruck

$$\sum_{1}^{3}{}_{ik} f_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

invariant lässt, dass also fortwährend ein Bogenelement im Riemann'schen Sinne existirt.

SITZUNG AM 14. NOVEMBER 1886.

A. Mayer, *Die beiden allgemeinen Sätze der Variationsrechnung, welche den beiden Formen des Princips der kleinsten Action in der Dynamik entsprechen.*

Bekanntlich ist die Fassung, welche Lagrange dem Princip der kleinsten Action gegeben hat, ungenau und auch aus seinem Beweise des Satzes geht nicht unmittelbar hervor, wie er dasselbe verstanden habe. Jedenfalls aber hängt in Zweck und Form sein Princip aufs Engste zusammen mit dem von Hamilton. In meiner Antrittsvorlesung[1]) war ich daher zu der Vermuthung gelangt, dass der Satz, den Lagrange im Sinne gehabt, kein anderer sein dürfte, als eben das Hamilton'sche Princip[2]). Ich hatte aber damals eine Note von Olinde Rodrigues über die Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegungen aus dem Princip der kleinsten Action[3]) übersehen, auf die allerdings schon der Herausgeber der dritten Auflage der Mécanique analytique verweist, aber ohne Angabe des Titels und an einer Stelle[4]), die ich nicht mehr auf den eigentlichen Beweis des Princips bezog. In diesem bemerkenswerthen Aufsatze wird zum ersten Male bestimmt gesagt, dass man beim Lagrange-schen Princip nothwendig auch die Zeit selbst mit variiren müsse. Das ist nun vom Standpunkte der Dynamik aus, in der man ja immer nur Variationen aus der augenblicklichen Lage

1) Geschichte des Princips der kleinsten Action. Leipzig, Veit & Co. 1877.

2) Uebrigens hat, wie ich erst nachträglich aus Todhunter's History of the Calculus of Variations p. 351 und p. 482 erfahren habe, bereits Ostrogradsky im Wesentlichen dieselbe Ansicht vertreten, indem er die Lagrange'sche Schlussweise für ungenau erklärt und behauptet, das Princip der kleinsten Action müsse durch die Bedingung

$$\delta\int(T + U)\,dt = 0$$

wiedergegeben werden.

3) Correspondance sur l'École Polytechnique t. III p. 159.

4) t. I p. 281.

des betrachteten Punktsystems zulässt, etwas so Ungewohntes, dass ich früher an diese Möglichkeit gar nicht gedacht hatte. Sobald man aber, unter Verzicht auf eine rein dynamische Deutung, nicht bloss die Coordinaten der Punkte, sondern zugleich auch die Zeit variirt, wird sofort auch der Punkt verständlich, der in der Lagrange'schen Ableitung stets das grösste Bedenken verursachte, erklärt es sich nämlich, wie die Gleichung der lebendigen Kraft, wenn man sie als Bedingungsgleichung vorschreibt, doch die Variationen der Coordinaten ganz unbeschränkt lassen kann, und man erkennt dann, was zuerst wohl von Herrn Th. Sloudsky ausdrücklich, jedoch ohne Beweis hervorgehoben worden ist[1]), dass die Jacobi'sche Behauptung,[2]) nach welcher man im Princip der kleinsten Action nothwendig aus dem Actionsintegrale die Zeit mittelst des Satzes der lebendigen Kraft eliminiren müsse, nicht zutreffend ist, dass vielmehr neben und mit der Jacobi'schen Form gleichzeitig noch eine zweite, gleichberechtigte Form des Princips der kleinsten Action existirt, und dass es eben diese zweite Form und nicht das Hamilton'sche Princip ist, welche Lagrange nur ungenau formulirt, aber richtig, wenn auch entschieden nicht mit der gewohnten Klarheit, beweist[3]).

Ich habe nun im zweiten Bande der Mathem. Annalen (p. 143) den allgemeinen Satz der Variationsrechnung angegeben, der als speciellen Fall das Jacobi'sche Princip der kleinsten Action umfasst. Um frühere Irrthümer zu berichtigen, und weil ich

---

1) Nouvelles Annales de mathématiques (2) XVIII p. 198.

2) Vorlesungen über Dynamik, p. 44.

3) Damit werden zugleich auch die Einwürfe hinfällig, die ich im Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik Bd. III p. 174 gegen die Serret'sche Ableitung des Princips der kleinsten Action (Mémoire sur le principe de la moindre action, Bulletin des sciences mathém. 1871) erhoben habe. Dagegen ist seine Umformung der zweiten Variation nicht richtig, oder zum Mindesten nicht richtig bewiesen. Denn Serret bestimmt die Unbekannten dieser Transformation nur aus einem Theile der dafür erhaltenen Differentialgleichungen und nimmt (l. c. p. 110) ohne Weiteres an, dass es, um die übrigen Differentialgleichungen zu befriedigen, genüge, dieselben nur für $t = t_0$ zu erfüllen, was doch nur dann richtig ist, wenn diese übrigen Gleichungen particuläre Integrale der ersteren wären. Dass er trotzdem später bei seinen Anwendungen auf den Fall $n = 2$ nicht zu falschen Resultaten gelangt, rührt einfach davon her, dass jene nicht erfüllten Differentialgleichungen sich überhaupt nur dann einstellen, wenn $n > 2$ ist.

glaube, dass die Hauptpunkte viel besser hervortreten, wenn man alle dynamischen Betrachtungen ganz bei Seite lässt, sei es mir gestattet zu zeigen, wie auch dieser allgemeine Satz selbst zweier verschiedener Formen fähig ist und damit sowohl die Jacobi'sche, als auch die Lagrange'sche Form des Princips der kleinsten Action in sich einschliesst. Was dagegen das Werthverhältniss dieser beiden Formen anbetrifft, so muss ich meine frühere Behauptung vollständig aufrecht erhalten, dass nämlich nur die Jacobi'sche Form wirklichen Nutzen gewährt, insofern sie lehrt, dass sich auch die Bestimmung der Bahnen eines jeden Punktsystems, dessen Bewegung dem Satze der lebendigen Kraft gehorcht, direct auf ein Problem der Variationsrechnung zurückführen lässt, wogegen die Lagrange'sche Form, welche sich auf die Bewegung des Punktsystems selbst bezieht, nur im beschränktem Maasse das leistet, was das Hamilton'sche Princip weitaus klarer, einfacher und naturgemässer erreicht[1].

Es handelt sich im Folgenden hauptsächlich darum, den gegenseitigen Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen Problemen der Variationsrechnung aufzudecken, in denen f stets ein und dieselbe gegebene, *von t freie* Function der n unbekannten Functionen $q_1, \ldots q_n$ von t und ihrer ersten Differentialquotienten $q'_1, \ldots q'_n$ bezeichnet. Die erste dieser beiden Aufgaben ist das folgende

Problem I. Unter allen Functionen $q_1, \ldots q_n$ von t, die in den beiden gegebenen Grenzen $t = 0$ und $t = t_1$ gegebene Werthe

---

1) In der ersten seiner beiden fundamentalen Arbeiten über eine allgemeine Methode in der Dynamik (Philosoph. Transact. 1834, Part II p. 247—308) hält sich Hamilton noch an das Lagrange'sche Princip der kleinsten Action (vgl. l. c. p. 252) und das Actionsintegral liefert ihm unmittelbar seine *charakteristische Function V.* Von dieser aus gelangt er erst am Schlusse (p. 307) durch Transformation zu seiner *Principalfunction*

$$S = \int_0^t (T + U)\, dt,$$

welche er dann seiner zweiten Abhandlung (Philos. Transact. 1835 P. I p. 95—144) zu Grunde legt. In dieser spricht er sein Princip $\delta S = 0$ nur ganz kurz am Schlusse von Nr. 4 aus, ohne ihm einen besonderen Namen zu geben, noch auch hervorzuheben, dass dasselbe wesentlich verschieden von dem Lagrange'schen Principe ist. Dies ist jedenfalls der Grund, weshalb man nicht selten (so z. B. Crelle J. 100 p. 188) den Namen Princip der kleinsten Wirkung geradezu für das Hamilton'sche Princip selbst gebraucht findet.

$a_1, \ldots a_n$ und $b_1, \ldots b_n$ besitzen, diejenigen zufinden, für welche

$$\delta \int_0^{t_1} f dt = 0$$

wird.

Seine Differentialgleichungen sind:

(1) $$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i'} .$$

Das Problem ist also möglich und bestimmt, *so oft die Determinante*

(2) $$\Delta \equiv \sum \pm \frac{\partial^2 f}{\partial q_1' \partial q_1'} \frac{\partial^2 f}{\partial q_2' \partial q_2'} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial q_n' \partial q_n'} \mp 0$$

ist; die vollständigen Lösungen der n Differentialgleichungen (1) enthalten dann gerade $2n$ willkürliche Constanten und diese lassen sich (wenigstens solange man, wie im Folgenden immer vorausgesetzt wird, von besonderen Ausnahmswerthen der Grössen $t_1, a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n$ absieht) so bestimmen, dass die Lösungen $q_1, \ldots q_n$ die gegebenen Grenzwerthe erhalten. Ueberdies ist dann stets

(3) $$F \equiv \sum_1^n {}_i\, q_i' \frac{\partial f}{\partial q_i'} - f = \text{const.} = h$$

ein Integral der Differentialgleichungen (1). Denn es ist einerseits:

$$\frac{dF}{dt} \equiv \sum_1^n {}_i\, q_i' \left(\frac{d \frac{\partial f}{\partial q_i'}}{dt} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)$$

und andererseits

$$\frac{\partial F}{\partial q_k'} \equiv \sum_1^n {}_i\, q'_i \frac{\partial^2 f}{\partial q'_i \partial q'_k} ,$$

also können wegen der Annahme (2) die ersten partiellen Differentialquotienten von F nach den q' nicht sämmtlich Null sein, oder F muss wenigstens eine dieser Grössen enthalten. Durch Substitution der Lösungen des Problems geht daher die Gleichung (3) über in eine Gleichung von der Form

(4) $$\Phi(t_1, a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n) = h. —$$

Der Voraussetzung (2) füge ich nunmehr noch die weitere Vor-

aussetzung hinzu, dass der durch (3) definirte Ausdruck F die Differentialquotienten $q'_1, \dots q'_n$ nicht bloss in ihren Verhältnissen enthalte, *dass also auch*:

$$(5)\qquad \sum_1^n{}_k\, q'_k \frac{\partial F}{\partial q'_k} \equiv \sum_1^n{}_i \sum{}_k\, q'_i q'_k \frac{\partial^2 f}{\partial q'_i \partial q'_k} \not\equiv 0$$

sei. Diese Annahme sagt nichts Anderes aus, als dass die Function f *nicht* die Form haben darf:

$$f = F_0 + F_1,$$

wo F_0 und F_1 irgend welche homogene Functionen 0ter und 1ter Ordnung von $q'_1, \dots q'_n$ sind, welche die Variabeln $q_1, \dots q_n$ selbst in beliebiger Weise enthalten können. In der That, ist

$$(\alpha)\qquad \sum_1^n{}_k\, q'_k \frac{\partial F}{\partial q'_k} \equiv 0,$$

so ist $f = -F$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(\beta)\qquad \sum_1^n{}_i\, q'_i \frac{\partial f}{\partial q'_i} - f = F$$

und diese Gleichung geht daher durch die Substitution

$$f = F_1 - F$$

über in

$$\sum_1^n{}_i\, q'_i \frac{\partial F_1}{d q'_i} - F_1 = 0,$$

sodass, bei der Annahme (α), $f = -F$ plus einer willkürlichen homogenen Function erster Ordnung von $q'_1, \dots q'_n$ die allgemeine Lösung der Gleichung (β) ist.

Die neue Voraussetzung (5) ist ganz unabhängig von der früheren (2), d. h. es kann jede dieser beiden Voraussetzungen ohne die andere erfüllt sein. Man braucht, um dies zu erkennen, z. B. nur $n = 2$ und einmal

$$f = (q'_1 + q'_2)^2,$$

das andere Mal

$$f = \frac{q_2}{q'_1} + q'_1 + q'_2$$

zu nehmen. Im ersteren Falle wird $\varDelta \equiv 0$ und $F = (q'_1 + q'_2)^2$, im zweiten $F \equiv 0$ und $\varDelta = -\left(\frac{1}{q'_1}\right)^4$.

Dies vorausgeschickt betrachte ich jetzt unter den beiden Voraussetzungen (2) und (5) das folgende neue

Problem II. Zwischen den n unbekannten Functionen $q_1, \ldots q_n$ von t ist vorgeschrieben die Differentialgleichung

$$(3) \qquad F \equiv \sum_1^n q'_i \frac{\partial f}{\partial q'_i} - f = h,$$

in der h jetzt eine gegebene Constante bezeichnet. Ueberdies sollen diese Functionen in den beiden Grenzen $t = 0$ und $t = t_1$ dieselben gegebenen Werthe $a_1, \ldots a_n$ und $b_1, \ldots b_n$ annehmen, wie im Probleme I. Nunmehr ist aber t_1 nicht gegeben, sondern ganz beliebig und es handelt sich darum, unter allen Functionen $q_1, \ldots q_n$ von der genannten Beschaffenheit diejenigen nebst dem zugehörigen Werthe von t_1 zu finden, für welche die erste Variation des Integrales

$$\int_0^{t_1} dt \sum_1^n q'_i \frac{\partial f}{\partial q'_i} = \int_0^{t_1} (f + h)\, dt \text{ [1]}$$

verschwindet.

Setzt man:

$$(6) \qquad f + h + \lambda (F - h) \equiv \Omega,$$

so sind nach der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode die Differentialgleichungen dieser neuen Aufgabe:

$$(7) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_k}.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten in den vollständigen Lösungen der $n + 1$ Differentialgleichungen (7) und (3) erhält man aber nunmehr neben den $2n$ Gleichungen, welche den Variabeln $q_1, \ldots q_n$ die gegebenen Grenzwerthe vorschreiben,

1) Das Integral linker Hand kommt bereits in Ostrogradsky's Mémoire sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres (Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, 6° sér. Sc. math. et phys. t. IV p. 385—517) vor, der überhaupt dort p. 419—480 ganz ähnliche Zwecke wie die vorliegende Note verfolgt, dabei aber, wie schon erwähnt, zu einem anderen Resultate gelangt.

wegen der Willkürlichkeit von δt_1 bekanntlich noch die weitere Bedingung:

$$(8)\qquad \left[\Omega - \sum_1^n {}_k\, q'_k \frac{\partial \Omega}{\partial q'_k}\right]_{t=t_1} = 0.$$

Nun ist:

$$\frac{d}{dt}\left[\Omega - \sum_1^n {}_k\, q'_k \frac{\partial\Omega}{\partial q'_k}\right] \equiv \sum_1^n {}_k\, q'_k \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_k} - \frac{d\frac{\partial\Omega}{\partial q'_k}}{dt}\right) + \frac{d\lambda}{dt}(F - h),$$

also:

$$\Omega - \sum_1^n {}_k\, q'_k \frac{\partial\Omega}{\partial q'_k} = \text{const.} = c$$

ein Integral der Differentialgleichungen (7) und (3), und in Folge der Gleichung (3) wird:

$$\Omega - \sum_1^n {}_k\, q'_k \frac{\partial\Omega}{\partial q'_k} = -\lambda \overline{\overline{\sum_1^n {}_i \sum {}_k}}\, q'_i q'_k \frac{\partial^2 f}{\partial q'_i \partial q'_k}.$$

Nach (8) müssen daher die Lösungen des Problems II noch der Bedingung:

$$\lambda \overline{\overline{\sum_1^n {}_i \sum {}_k}}\, q'_i q'_k \frac{\partial^2 f}{\partial q'_i \partial q'_k} = 0$$

genügen, und dies verlangt in Folge der Voraussetzung (5), dass

$$\lambda \equiv 0$$

sei. Nach (6) reduciren sich aber hierdurch die Differentialgleichungen (7) auf die Differentialgleichungen (1), die von selbst die Gleichung (3) nach sich ziehen. Man erhält somit den

Satz A. Ist f eine von t freie Function von $q_1, \ldots q_n, q'_1, \ldots q'_n$, die den beiden Voraussetzungen (2) und (5) genügt, so fallen die Lösungen der beiden Probleme I und II zusammen, sobald man zwischen t_1 und h die Gleichung:

$$(4)\qquad \Phi(t_1, a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n) = h$$

herstellt, die aus der Gleichung (3) durch Substitution der Lösungen des Problems I entsteht, und die im Probleme II die Unbekannte t_1 bestimmt.

Dieser Satz lässt sich aber auch ganz unabhängig von der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode beweisen. Indem man

nämlich, was immer frei steht, eine neue unabhängige Variable einführt, kann man das Problem II auch so aussprechen:

Problem II_a. *Zwischen den* $n+1$ *unbekannten Functionen* $q_1, \dots q_n$ *und* t *der unabhängigen Variabeln* Θ *ist die Gleichung* (3) *mit einem gegebenen Werthe der Constanten* h *vorgeschrieben, wobei die Grössen* $q'_1, \dots q'_n$ *durch die Formeln:*

$$\frac{dq_i}{d\Theta} = q'_i \frac{dt}{d\Theta}$$

definirt sind. Ueberdies sollen die Functionen $q_1, \dots q_n$ *in den beiden gegebenen Grenzen* $\Theta = 0$ *und* $\Theta = \Theta_1$ *die gegebenen Werthe* $a_1, \dots a_n$ *und* $b_1, \dots b_n$ *erhalten und die Function* t *für* $\Theta = 0$ *verschwinden, während ihr Werth* t_1 *für* $\Theta = \Theta_1$ *keinerlei Beschränkung unterliegt. Man soll unter diesen Festsetzungen der Forderung*

$$\delta \int_0^{\Theta_1} (f+h) \frac{dt}{d\Theta} \, d\Theta = 0$$

genügen.

Nach der Voraussetzung (5) enthält in dieser neuen Auffassung die Gleichung (3) jetzt sicher $\frac{dt}{d\Theta}$ und bestimmt also nur diesen Differentialquotienten als Function der q_i und $\frac{dq_i}{d\Theta}$, *während sie diese Grössen selbst ganz willkürlich lässt.* Dies würde dagegen nicht mehr der Fall sein, wenn in der Gleichung (3) die q' nur in ihren Verhältnissen vorkämen. Es würde aber auch dann nicht mehr gelten, wenn man t_1 ebenfalls als fest gegeben vorschreiben wollte. Denn dann würde, wenn man durch

$$\frac{dt}{d\Theta} = W\left(q_1, \dots q_n, \frac{dq_1}{d\Theta}, \dots \frac{dq_n}{d\Theta}, h\right)$$

die Auflösung der Gleichung (3) nach $\frac{dt}{d\Theta}$ bezeichnet, aus dieser Gleichung für die Functionen q die isoperimetrische Bedingung

$$\int_0^{\Theta_1} W d\Theta = t_1$$

entspringen. —

Variirt man nun die Functionen $t, q_1, \dots q_n$, so wird:

$$\delta \left[(f+h) \frac{dt}{d\Theta}\right] \equiv \frac{dt}{d\Theta} \delta f + (f+h) \frac{d\delta t}{d\Theta},$$

worin:

$$\delta f \equiv \sum_1^n i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta q'_i \right).$$

Aus den Definitionsgleichungen

$$\frac{dq_i}{d\Theta} \equiv q'_i \frac{dt}{d\Theta}$$

aber folgt:

$$\frac{d\delta q_i}{d\Theta} \equiv \frac{dt}{d\Theta} \delta q'_i + q'_i \frac{d\delta t}{d\Theta},$$

also ergiebt sich:

$$\frac{dt}{d\Theta} \delta f \equiv \frac{dt}{d\Theta} \sum_1^n i \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_1^n i \frac{\partial f}{\partial q'_i} \frac{d\delta q_i}{d\Theta} - \frac{d\delta t}{d\Theta} \sum_1^n i \frac{\partial f}{\partial q'_i} q'_i.$$

Weiter ist:

$$\sum_1^n i \frac{\partial f}{\partial q'_i} \frac{d\delta q_i}{d\Theta} \equiv \frac{d}{d\Theta} \left(\sum_1^n i \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta q_i \right) - \sum_1^n i \frac{d \frac{\partial f}{\partial q'_i}}{d\Theta} \delta q_i$$

$$\equiv \frac{d}{d\Theta} \left(\sum_1^n i \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta q_i \right) - \frac{dt}{d\Theta} \sum_1^n i \frac{d \frac{\partial f}{\partial q'_i}}{dt} \delta q_i,$$

sodass man schliesslich erhält:

$$\delta \left[(f+h) \frac{dt}{d\Theta} \right] \equiv \frac{d}{d\Theta} \left(\sum_1^n i \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta q_i \right) + \frac{dt}{d\Theta} \sum_1^n i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d \frac{\partial f}{\partial q'_i}}{dt} \right) \delta q_i$$

$$+ \frac{d\delta t}{d\Theta} \left[f + h - \sum_1^n i\, q'_i \frac{\partial f}{\partial q'_i} \right].$$

Durch die vorgeschriebene Bedingungsgleichung (3) fällt aber hieraus $\frac{d\delta t}{d\Theta}$ von selbst weg. Ueberdies müssen die Variationen $\delta q_1, \ldots \delta q_n$ für $\Theta = 0$ und $\Theta = \Theta_1$ verschwinden. Integrirt man also zwischen diesen beiden Grenzen, so folgt:

$$\delta \int_0^{\Theta_1} (f+h) \frac{dt}{d\Theta} \delta\Theta = \int_0^{\Theta_1} \frac{dt}{d\Theta} \sum_1^n i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d \frac{\partial f}{\partial q'_i}}{dt} \right) \delta q_i \, d\Theta.$$

Hierin sind nun nach der vorhin über die Gleichung (3) gemachten Bemerkung die δq ganz willkürlich. Also führt, was eben zu

beweisen war, das Problem IIa auf dieselben Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d\frac{\partial f}{\partial q'_i}}{dt} = 0,$$

welche auch das Problem I lösen.

Aus dem Probleme II kann man nun aber t ganz eliminiren. Betrachtet man nämlich etwa $q_2, \dots q_n$ zunächst als Functionen von q_1 und erst dieses als Function von t und setzt dem zu Folge:

$$q'_i = \frac{dq_i}{dq_1} q'_1,$$

so geht die Bedingungsgleichung (3) über in eine Gleichung zwischen

$$q_1, \dots q_n, \frac{dq_2}{dq_1}, \dots \frac{dq_n}{dq_1} \text{ und } q'_1,$$

und zwar in eine Gleichung, die wegen der Voraussetzung (5) nothwendig q'_1 enthält. Ist also

$$q'_1 = \omega(q_1, \dots q_n, \frac{dq_2}{dq_1}, \dots \frac{dq_n}{dq_1}, h)$$

ihre Auflösung, so erfüllen die Substitutionen:

(9) $$q'_1 = \omega, \quad q'_i = \frac{dq_i}{dq_1}\omega$$

identisch die Bedingungsgleichung (3) und ergeben:

$$\frac{dt}{dq_1} = \frac{1}{\omega}.$$

Daher geht, wenn man in dieser Weise q_1 an Stelle von t als unabhängige Variable einführt und mit φ den Werth bezeichnet, den die Function f durch die Substitutionen (9) erhält, das Problem II seinerseits über in das folgende

Problem III. Unter allen Functionen $q_2, \dots q_n$ der unabhängigen Variabeln q_1, welche in den gegebenen Grenzen a_1 und b_1 die gegebenen Werthe $a_2, \dots a_n$ und $b_2, \dots b_n$ besitzen, diejenigen zu finden, für welche die erste Variation des Integrales:

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{\varphi + h}{\omega} dq_1$$

verschwindet, das aus dem Integrale

$$\int_0^{t_1} dt \sum_1^n {}_i\, q'_i \frac{\partial f}{\partial q'_i}$$

entsteht, wenn man t mittelst der Bedingungsgleichung (3) *eliminirt.*

Daher kann man den Satze A auch die folgende, im zweiten Bande der Mathem. Annalen direct bewiesene Form geben:

Satz B. *Unter den Voraussetzungen des Satzes A erhält man die Lösungen des Problems III aus denen des Problems I, indem man aus den letzteren t, sowie mit Hülfe der Gleichung* (4) *auch* t_1 *eliminirt. Umgekehrt braucht man nach vollständiger Integration der Differentialgleichungen des Problems III nur noch die Quadratur:*

$$\int_{a_1}^{q_1} \frac{dq_1}{\omega} = t$$

auszuführen, um die vollständigen Integralgleichungen der Differentialgleichungen des Problems I zu erhalten.

Es ist unmittelbar klar, dass von diesen beiden äquivalenten Sätzen A und B *für das Problem I selbst* nur der zweite Nutzen gewährt. Denn der Satz A lehrt im Wesentlichen nur, dass die Differentialgleichungen des Problems II sich auf die des Problems I reduciren, während der zweite Theil des Satzes B eine wirkliche Transformation und Reduction der Differentialgleichungen des Problems I angiebt.

Um nun zu erkennen, wie aus den beiden Sätzen A und B die beiden Formen des Princips der kleinsten Action hervorgehen, braucht man nur anzunehmen, dass die Variabeln $q_1, \ldots q_n$ irgend welche unabhängige Bestimmungsstücke eines Systems materieller Punkte seien, das unveränderlichen Verbindungen unterworfen ist und sich unter dem Einflusse einer von der Zeit t freien Kräftefunction U bewegt. Dann erfüllt nämlich die Annahme

$$f = T + U,$$

wo T die lebendige Kraft des betrachteten Punktsystems bezeichnet, unsere beiden Voraussetzungen (2) und (5) und führt zugleich nach dem Hamilton'schen Principe das Problem I in die Aufgabe über, die Bewegung des Punktsystems zu bestimmen, wenn seine Positionen zu einer gegebenen Anfangszeit $t = 0$ und zu einer gegebenen Endzeit $t = t_1$ bekannt sind. Weiter wird

$$\sum_1^n {}^i q'_i \frac{\partial f}{\partial q'_i} = 2T,$$

die Gleichung (3) verwandelt sich also in die Gleichung der lebendigen Kraft

$$T - U = h$$

und das Integral des Problemes II geht über in das Actionsintegral

$$\int_0^{t_1} 2T\,dt = \int_0^{t_1} (U + h)\,dt\;,$$

während das Integral des Problemes III aus diesem erhalten wird, wenn man die Zeit t mit Hülfe der Gleichung der lebendigen Kraft eliminirt.

Bei dieser Anwendung auf die Dynamik ergiebt sich demnach aus Satz B die Jacobi'sche Form des Princips der kleinsten Action, aus Satz A aber die Lagrange'sche Form dieses Princips, die hiernach in der That sich im Wesentlichen so aussprechen lässt, wie es in der Anmerkung zu Bd. I p. 277 der Mécanique analytique geschieht, deren präciser Sinn aber wohl noch bestimmter in der folgenden Fassung hervortreten dürfte:

Gehorcht die Bewegung eines Systems materieller Punkte dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft

$$(10) \qquad T = U + h$$

und sind überdies die Positionen des Systems zur Anfangszeit $t = 0$ *und zu einer unbekannten Endzeit* $t = t_1$, *sowie die anfängliche lebendige Kraft des Systems* (oder der Werth der Constanten h) *gegeben, so fällt die Aufgabe, die Bewegung des Systems zu bestimmen, zusammen mit der folgenden Aufgabe der Variationsrechnung:*

Unter allen Functionen von t, *die, für die Coordinaten der Punkte eingesetzt, nicht nur den endlichen Bedingungsgleichungen des Systems, sondern auch der Differentialgleichung* (10) *genügen, und überdies für* $t = 0$ *und* $t = t_1$ *die den beiden gegebenen Positionen des Systems zukommenden Werthe annehmen, diejenigen nebst dem zugehörigen Werthe von* t_1 *zu finden, welche die erste Variation des Actionsintegrales*

$$\int_0^{t_1} 2T\,dt$$

zum Verschwinden bringen. —

Der erste Beweis, den ich im Vorhergehenden vom Satze A gegeben habe, entspricht der Art, in welcher Rodrigues die

Differentialgleichungen der Bewegung aus dem Lagrange'schen Principe ableitet, der zweite dagegen schliesst sich in der Hauptsache dem Mathieu'schen Beweise dieses Princips[1]) an. Die Lagrange'sche Ableitung habe ich absichtlich nicht zum Vorbilde genommen, weil sie das Auftreten von δt ganz vermeidet und eben dadurch es ungewiss lässt, wie die Variationen zu verstehen sind.

1) *Émile Mathieu*, Dynamique analytique, Paris 1877, p. 42, no. 25.

SITZUNG VOM 6. DECEMBER 1886.

Rud. Leuckart, *Asconema gibbosum, ein Sphaerularia-artiger neuer Nematode.*

Wenn die Ansichten, die A. Schneider im Jahre 1864 über die Natur der sonderbaren *Sphaerularia* ausgesprochen hat (Monographie der Nematoden S. 322), zwei Decennien hindurch unbeachtet blieben und erst dann die ihnen gebührende Anerkennung fanden, als es gelang, ihre Richtigkeit durch directe Beobachtung ausser Zweifel zu setzen (Leuckart, Zoologischer Anzeiger 1885, S. 273), so erklärt sich das zumeist durch den Umstand, dass dieselben weit aus dem Rahmen des damals Bekannten hinaustraten. Ein Thier, das seinen Geschlechtsapparat ausstülpt und in Form eines immer mehr sich vergrössernden Anhangs zur Reife bringt, während der Träger an diesen Vorgängen nicht nur keinerlei Antheil nimmt, sondern seine Lebensthätigkeit einstellt und meist vollständig zu Grunde geht — ein solches Geschöpf war auch als Eingeweidewurm so aussergewöhnlicher Art, dass Zweifel und Unglauben durchaus am Platze schien. Hätte man Fälle gekannt, die zu einem derartigen Verhalten den Uebergang machten, die dasselbe in irgend einer Weise vorbereiteten, dann würde das Urtheil vermuthlich von vornherein anders gelautet haben.

Ich freue mich, in Nachfolgendem über einen solchen Fall berichten zu können. Wie bei *Sphaerularia*, betrifft derselbe einen Schmarotzer-Nematoden, einen Parasiten, der die Larven von *Cecidomyia pini* bewohnt, aus diesen aber auch in die späteren Zustände, in Puppe und Geschlechtsthier, übergeht.

Die betreffenden Larven wurden in den Herbstmonaten dieses Jahres häufig in den für die Zucht von *Allantonema* — ich verweise für diesen gleichfalls sehr merkwürdigen heterogenen Wurm auf meine Mittheilungen in der zoologischen Section

der Magdeburger Naturforscher-Versammlung 1884 — von mir hergerichteten Gefässen vorgefunden und zuerst von Herrn Stud. STRUBELL, den ich nach Allantonemen darin zu suchen gebeten hatte, als inficirt erkannt.

Der Wurm schliesst sich in einem weit höheren Grade, als *Sphaerularia*, an die Gruppe der *Rhabditiden* an und mag, da er neu ist, fortan als *Asconema*[1]) *gibbosum* bezeichnet werden.

Im ausgewachsenen Zustande besitzt derselbe eine Grösse von etwa 0,6 mm. Seine Form ist in hohem Grade auffallend, denn der schon an sich gedrungene, plumpe Leib trägt hinter der Mitte einen buckelförmigen Anhang von gewaltiger Grösse (0,25 mm), der bruchsackartig der Bauchfläche aufsitzt und den Körperdurchmesser (0,09 mm) um reichlich das Doppelte vergrössert. Die Schwere des Buckels ist so gross, dass der Wurm nicht schlängelnd, wie die übrigen Nematoden, sich fortbewegt, sondern festliegt und nur mit seinen Enden, besonders dem an Länge überwiegenden Vorderende, schwingende Pendelbewegungen ausübt.

Das über den Buckel frei hervorragende Schwanzende ist in Form eines conischen Zapfens von 0,09 mm nach dem Rücken zu emporgehoben und am Ende mit einer schlanken Papille versehen, während der mehr allmälig sich verjüngende Vorderleib eine nahezu cylindrische Gestalt hat. Nur die Kopfspitze macht eine Ausnahme, indem sie scharf gegen den weit dickeren Leib sich absetzt und einen fast selbständigen schlanken Anhang darstellt, der sich mehr oder minder weit in letzteren hinein zurückziehen kann.

Die ihrer äusseren Form nach hier beschriebenen Thiere ergeben sich bei näherer Untersuchung sämmtlich als ausgebildete Weibchen. Sie besitzen eine im Innern des Vorderkörpers mehrfach in Schlingen zusammengelegte einfache Geschlechtsröhre, die mit ihrem fast zwiebelartig gebildeten Endstücke den vorderen mehr oder minder vorspringenden Theil des Buckels durchsetzt und auf demselben ausmündet, so dass die bei weitem grössere Masse des Anhangs hinter der Genitalöffnung gelegen ist. Die Wand dieses Endstückes besteht aus ziemlich grossen

1) Dass der Genusname *Asconema* von den Botanikern bereits (an einen Pilz) vergeben ist, thut der Verwendung für zoologische Zwecke um so weniger Eintrag, als die früher in dieser Hinsicht geübte Abstinenz allmälig ausser Gebrauch gekommen ist.

hellen Zellen mit einem bläschenförmigen Kern und grossem Kernkörperchen. Ganz ähnliche, wenngleich meist grössere Zellen sind es, die das Parenchym oder richtiger vielmehr die Wand des Buckels bilden. Der letztere ist nämlich keineswegs solid, sondern von einem scharf begrenzten weiten Hohlraum durchzogen, der fast in ganzer Länge mit der Leibeshöhle des Wurms zusammenhängt, so dass sich auch in dieser Beziehung der oben gebrauchte Vergleich mit einem Bruchsacke vollständig rechtfertigt. Die Zellen liegen mehrfach geschichtet über einander und sind in Gruppen angeordnet, welche nach aussen vorspringen und der Oberfläche des Buckels ein höckriges Aussehen geben. Die Cuticula, welche die Zellenwand überzieht und an der ringförmig eingeschnürten Basis des Buckels mit der äusseren Bedeckung des Wurmkörpers zusammenhängt, besitzt eine ansehnliche Dicke und zeigt — im Gegensatze zu letzterer — eine vermuthlich von Porenkanälen herrührende radiäre Streifung. Durch die Geschlechtsöffnung setzt sich diese Cuticula direct in die innere Auskleidung des anliegenden Bulbus fort, so dass letzterer auch hierdurch seine Zusammengehörigkeit mit dem Buckel kundgiebt.

Der Bulbus ist übrigens nicht das einzige Organ, welches aus der Leibeshöhle des Wurmes in den Innenraum des Genitalwulstes übertritt. In seinem hinteren Abschnitte umschliesst derselbe gewöhnlich auch einen mehr oder minder grossen Theil des Darmes, der bei unserem *Asconema* freilich kaum minder eigenthümlich entwickelt ist, als der Genitalschlauch. Sonst bei den Nematoden ein deutlich röhriges Gebilde, erscheint derselbe nämlich als ein solider Strang, aus einer bald — und so besonders in der hinteren Körperhälfte — einfachen, bald auch doppelten Reihe ansehnlicher Zellen (bis 0,08 mm) zusammengesetzt, die eine mehr oder minder gestreckte Form besitzen und in ihrer sonst körnigen Inhaltsmasse je einen bläschenförmigen hellen Kern enthalten. Durch diesen Bau erinnert der Strang so lebhaft an den von MEISSNER einst beschriebenen Zellenkörper von *Mermis albicans*, dass beide Gebilde schon ohne weiteres dadurch als homolog sich ergeben [1]). Das vordere

1) Durch Untersuchung einer in den Larven von *Culex pipiens* schmarotzenden jungen Mermis habe ich übrigens auch direct, wie bei unserm *Asconema*, die Abstammung dieses Zellenschlauches von einem Anfangs ganz normal entwickelten Darme constatiren können.

Ende ist durch eine Art Ligament, die Fortsetzung der die Zellen zusammenhaltenden zarten Haut, an der Basis der Kopfspitze befestigt, die ihrerseits eine durchaus solide, wenn auch nicht völlig homogene Beschaffenheit hat, da sie in ihrer Axe von einem deutlich begrenzten Strange durchzogen wird, der sich durch seine Lage als ein Rudiment des früher vorhandenen Pharynx zu erkennen giebt. In ähnlicher Weise ist das hintere Ende des Zellenkörpers an die Bauchwand des Schwanzzapfens, da, wo man den After des Wurmes vermuthen könnte, angeheftet. Der After selbst aber fehlt, und ebenso auch eine distincte Mundöffnung.

Von den Enden abgesehen ist der Zellenkörper völlig frei, wie sonst der Darm, im Innern der Leibeshöhle gelegen. Sein Verlauf aber ist vielfach unregelmässig und wechselnd, je nach dem Füllungszustande des Genitalschlauches, der bald hier, bald dort auf ihn drückt und ihn zum Ausweichen zwingt. Dass dabei ein kleinerer oder auch grösserer Theil desselben in den Buckel übertritt, ist schon oben erwähnt worden. Mit zunehmendem Alter werden diese Unregelmässigkeiten noch auffallender, da die Würmer mit der Zeit immer mehr sich verkürzen und das mitunter — man trifft solche Exemplare vornehmlich in den ausgebildeten Fliegen — in einem solchen Grade, dass der Körper den Buckel nur um ein Geringes überragt. In solchen Fällen ist dann auch begreiflicher Weise der bei weitem ansehnlichste Theil der gesammten Eingeweide in den Anhang eingetreten. Trotz der starken Verschrumpfung sind die Würmer übrigens in diesem Zustande noch lebend; sie bewegen sich, wenngleich nur matt, und enthalten auch gewöhnlich noch eine Anzahl reifer Eier.

Was die Bildung des Genitalschlauches betrifft, so mag hier weiter noch erwähnt sein, dass auf den schon oben beschriebenen Bulbus zunächst ein dünnwandiger langer Uterus folgt, der die schalentragenden Eier enthält. An diesen schliesst sich sodann ein mit Sperma gefülltes längliches Receptaculum und das eigentliche Ovarium, das den ansehnlichsten Theil des ganzen Apparates ausmacht, nach der Beschaffenheit seines Inhaltes aber wieder in Abschnitte sich auflösen lässt. Die Rhachis ist nur wenig entwickelt und kurz, wie denn auch die Fruchtbarkeit unserer Würmer im Ganzen nur beschränkt ist.

Die Eier, die eine längliche Form besitzen und je 0,07 mm

messen, werden in der Regel vor Beginn der Klüftung abgelegt, so dass die ganze embryonale Entwickelung in der Leibeshöhle des Wirthes durchlaufen wird. Schon einige Tage nach dem Eierlegen schlüpfen die jungen Würmchen aus. Sie besitzen bei einer Länge von Anfangs nur 0,23 mm ganz die gewöhnliche Form und Bildung eines jungen Nematoden, und bewegen sich wie diese schlängelnd im Innern der sie beherbergenden Larven, besonders im hintern Theile der Leibeshöhle. Wo mehrere *Asconemen* vorhanden sind — und ich habe deren in den Larven meiner Zuchtgefässe schliesslich bis zu 40 und 50 Stück gefunden, — da wächst die Zahl der jungen Würmchen oftmals zu einer grossen Menge heran, ohne dass die Träger darunter, dem Anschein nach, besonders zu leiden haben.

Nach ihrem Aussehen würde man die jungen Nematoden für Rhabditiden halten können, wenn sie nicht durch die gleichmässige Bildung und die fast mangelnde Muskulatur ihres zahnlosen Pharynx davon verschieden wären. Ihre Darmzellen sind, wie bei den genannten Thieren, in zwei Längsreihen angeordnet, umschliessen aber ein nur enges und schwach begrenztes Lumen. Die Genitalanlage überschreitet Anfangs kaum die gewöhnlichen Dimensionen, lässt aber schon frühe eine Zusammensetzung aus mehreren Zellen erkennen.

Mit zunehmender Körpergrösse beginnt nun aber in dieser Anlage sehr bald ein beträchtliches Wachsthum, so dass sie bereits bei Würmchen von nur 0,3 mm als ein Zellenstrang von fast 0,1 mm erscheint. In der Regel verweilen die jungen Thiere übrigens eine noch längere Zeit im Innern ihrer Wirthe, bis sie gegen 0,35 mm messen, und dann kann man an der Beschaffenheit der Genitalanlage schon das spätere Geschlecht unterscheiden, indem dieselbe bei den Weibchen in ihrer Axe bereits ein schwach gezeichnetes Lumen erkennen lässt.

Obwohl sich mir gleich bei der ersten Untersuchung unseres *Asconema* die Ueberzeugung aufgedrängt hatte, dass der Buckel, dessen Anwesenheit unseren Wurm in so auffallender Weise auszeichnet, nur durch einen Vorfall der Scheide entstanden sei, unser Parasit also ähnlich sich verhalte, wie *Sphaerularia*, so fehlte einstweilen doch der Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme. Um diesen zu erbringen, musste unser Wurm, der zunächst nur in legereifen weiblichen Individuen und in Jugend-

formen aufgefunden wurde, in seinen Zwischenzuständen zur Beobachtung gebracht worden.

Da nun aber die Entwicklung der Parasiten im Innern ihrer Wirthe über das oben beschriebene Stadium nicht hinausging, auch niemals männliche Thiere daselbst angetroffen wurden, lag die Vermuthung nahe, dass die Würmer vor ihrer Legereife ein freies Leben führten und während dieser Zeit auch ihre geschlechtliche Ausbildung erreichten.

Die Vermuthung erwies sich als durchaus richtig. Man braucht die inficirten Larven nur zu zerreissen und den Insassen dadurch Gelegenheit zur Auswanderung zu geben, um zu sehen, wie diese bereits nach drei Tagen zur Geschlechtsreife gekommen sind und zum Theil sogar sich schon begattet haben. Form und Grösse der geschlechtsreifen Würmer sind gegen früher freilich nur wenig verändert.

Was zunächst die Männchen betrifft, so messen diese nur selten mehr als 0,36 mm. Sie sind schlanker und auch meist etwas kleiner als die Weibchen, sonst diesen aber ausserordentlich ähnlich, gleich ihnen auch mit einer bursalosen langgetreckten Schwanzspitze versehen. Was sie auszeichnet, ist die Bildung des Genitalschlauches und die Anwesenheit eines Spicularapparates. Der letztere besteht aus zwei bogenförmig gekrümmten äusserst kleinen Hornnadeln von 0,003 mm, die mit ihrer Convexität einem noch kleineren Stützplättchen anliegen. Die frühere indifferente Geschlechtsanlage hat sich zu einem ansehnlichen Ductus ejaculatorius entwickelt, der mit winzigen Spermazellen gefüllt ist und sich vorn in einen Hodenschlauch mit hornförmig umgebogenem Endstücke fortsetzt.

Der Geschlechtsapparat der Weibchen zeigt eine ähnliche Configuration. Er besteht zunächst aus einer mächtigen Vagina mit dicker Zellenwand und derber Cuticula, die fast die halbe Länge des Wurmkörpers durchzieht und auch nach hinten über die Vulva hinaus in Form eines kurzen Blindkanals sich fortsetzt. An diesen schliesst sich sodann ein Ovarialschlauch, dessen oberes Ende hornförmig, wie es für den Hodenschlauch beschrieben wurde, sich umbiegt, während das untere ein Receptaculum bildet, das nach vollzogener Begattung durch die massenhaft darin angesammelten Samenzellen die Form eines länglich-ovalen Säckchens angenommen hat. Das blinde Ende des Schlauches enthält dotterlose, äusserst kleine Eier.

Die Geschlechtsthiere leben nun eine Zeit lang im Freien, ohne sich irgend wie zu verändern. Die Männchen existiren überhaupt nur als freilebende Würmer. Sie sind auch kurzlebiger als die Weibchen, die nach der Begattung wie die Weibchen von *Sphaerularia*, das freie Leben, falls sich dazu Gelegenheit bietet, mit einem parasitischen vertauschen, und erst dann zur vollen Entwickelung und zur Legereife heranwachsen.

Die Art der Einwanderung habe ich eben so wenig feststellen können, wie die Auswanderungsweise. Nur so viel darf ich mit Bestimmtheit behaupten, dass die Einwanderung ausschliesslich in die Larven der *Cecidomyia* stattfindet, an einen bestimmten Zeitabschnitt aber nicht gebunden ist. Ausgewachsene Larven lassen sich kaum minder sicher inficiren, wie jüngere. Vielleicht, dass die Würmer durch den After einwandern, wie das bei andern Insecten-Nematoden beobachtet wird. Andererseits ist freilich auch die Möglichkeit einer Einwanderung durch den Mund, wie solche wahrscheinlicher Weise bei *Sphaerularia* geschieht, nicht ausgeschlossen. Gleich dunkel ist, wie gesagt, die Auswanderung der jungen Würmer. Ich weiss nicht einmal, ob die Auswanderung eine active ist, oder ob dieselbe erst nach dem Tode des Wirthes stattfindet, wie mir fast wahrscheinlich dünkt. Jedenfalls verweilen die Würmer nach Verlassen der Eihüllen eine ungewöhnlich lange Zeit im Innern ihrer Träger, wie die oben erwähnten Unterschiede der Körpergrösse und des Entwicklungszustandes ihrer Genitalanlage zur Genüge anzeigt. Im Darme der Wirthe und im entleerten Kothe habe ich niemals ein Würmchen auffinden können.

Ist die Einwanderung nun aber einmal geschehen, dann beginnt der Wurm alsbald sich weiter zu verändern. Es wächst die Körpergrösse und gleichzeitig, ja noch mehr, die Grösse der Scheide. Sie wächst nicht blos in Länge, sondern auch in Dicke, so dass der früher schlanke Körper besonders nach hinten zu merklich aufgetrieben wird. Bei Würmern von 0,15 mm beträgt diese Dicke über 0,045 mm und die Länge der Vagina reichlich 0,18 mm. Auf der Höhe der Geschlechtsöffnung nimmt letztere dann nahezu den ganzen Innenraum des Leibes in Anspruch, so dass der Darm hart an die Rückenwand angedrängt wird und die früher paarweise einander gegenüberliegenden Zellen in eine einfache Reihe sich anordnen.

Wir greifen wohl nicht fehl, wenn wir diese Veränderungen im Wesentlichen auf das Wachsthum der Scheide zurückführen, auf einen Vorgang, der seinerseits wieder durch eine beträchtliche Grössenzunahme der einzelnen Wandzellen bedingt ist. Und diese Grössenzunahme ist es nun auch, die alsbald zu der Bildung des oben beschriebenen Buckels hinführt.

Die ersten Anzeichen derselben bemerkt man bereits bei Thieren, die nur wenig über die oben angegebene Grösse hinaus gewachsen sind. Man sieht die Zellen in einer grössern Zahl aus der Geschlechtsöffnung hervorquellen und gewinnt sehr bald die Ueberzeugung, dass der Buckel in der That nichts anderes als die fast in ganzer Ausdehnung nach aussen vorgefallene Vagina ist. Den Process dieser Umstülpung hat man jedoch nicht so zu denken, dass der Scheidenkanal dabei mit seinen Lippenrändern immer weiter hervortritt, wie solches bei *Sphaerularia* der Fall ist. Wäre dem so, dann würde der Vorfall vermuthlich, wie bei letzterer, die Form eines Schlauches haben. In Wirklichkeit verhält es sich insofern anders, als es an Stelle der Lippenrandzellen die der Geschlechtsöffnung gegenüberliegenden Zellen der Rückenwand sind, welche die Ausstülpung einleiten. Unter gleichzeitiger Einbiegung der betreffenden Wandfläche treten diese Zellen zunächst zur Bildung eines conischen Zapfens zusammen, der pfropfartig gegen die Genitalöffnung andrängt und dieselbe dann der Art ausweitet, dass die Spitze des Zapfens nach Aussen hervortritt. Es ist Anfangs ein nur kleines Höckerchen, das aus der Geschlechtsöffnung hervorsieht, dieselbe aber so vollständig ausfüllt, dass der Innenraum sowohl des hintern, wie auch des vordern Vaginalschenkels an den Rändern derselben selbständig ausmündet. Die cuticulare Auskleidung dieses Innenraumes ist jetzt von beträchtlicher Dicke und zeigt eine unregelmässige Faltung. Auch der Genitalschlauch hat sich in einiger Hinsicht verändert, indem das dem Receptaculum anhängende Endstück, das Ovarium, an Länge zugenommen hat, und am Grunde des erstern die Bildung des spätern Uterus sich vorbereitet. Die volle Entwicklung freilich erreicht der Genitalschlauch erst in einer spätern Periode, wenn die Umstülpung der Scheide nahezu vollendet ist. Doch dazu bedarf es nur eines Zeitraums von wenigen Tagen.

So lange es nur die der Genitalöffnung gegenüberliegende Rückenfläche der Scheide ist, die nach aussen hervortritt, hat

der Anhang, obwohl an Grösse allmälig gewachsen, eine einfache Kugelform. Er streckt sich erst in die Länge, wenn die Umstülpung, wie es zunächst geschieht, auf den hintern blindsackartigen Schenkel der Scheide übergeht. Aber auch hier sind es anfangs nur die Zellen der Rückenwand, die aus der immer mehr sich erweiternden Genitalöffnung hervorquellen. Die cuticulare Auskleidung des Innenraums wird dabei in immer grösserer Ausdehnung nach aussen verlegt, bis die Ausstülpung durch das Vortreten der den Lippenrand bildenden Zellen ihr Ende erreicht hat. Da die neu austretenden Zellen der Reihe nach den früheren sich anfügen, so nehmen die letzten natürlich an dem in gleichem Maasse sich vergrössenden Buckel die hinterste Stelle ein. Sie bilden einen abgerundeten Vorsprung, der die frühere Geschlechtsöffnung überragt und den bis dahin gestreckten Schwanztheil des Wurmes nach dem Rücken zu emporhebt.

Der vordere längere Schenkel der Vagina hat bis dahin an diesem Vorgang kaum einen merklichen Antheil genommen. Doch das ändert sich, sobald die Umstülpung des hintern Abschnittes vollendet ist. Die Zellen desselben beginnen dann gleichfalls nach aussen hervorzuquellen und zwar zunächst im ganzen Umfange des Lippenrandes, so dass dieser in Form eines kurzen röhrigen Aufsatzes an den Vorderrand des frühern Buckels sich anfügt. Das Ende des Aufsatzes trägt natürlich eine Oeffnung, die sich in den Innenraum der Scheide hinein fortsetzt. Doch die Umstülpung nimmt insofern alsbald einen unregelmässigen Verlauf, als die Zellen des Scheidenkanals beim Hervortreten in grössester Menge wiederum nach hinten sich wenden und dem frühern Buckel sich anschliessen, anstatt ringförmig um die Scheidenöffnung herumzugreifen. Auf diese Weise geschieht es dann, dass letztere immer mehr nach vorn gedrängt wird und schliesslich, wenn die Ausstülpung vollendet, mit den sie umgebenden Zellen zapfenartig nach dem Kopfe zu vorspringt. Mit dem Austreten einer immerfort sich vergrössernden Menge von Zellen wird die Vagina selbst natürlich immer kürzer, bis schliesslich nur noch das letzte Ende derselben seine frühere Beschaffenheit beibehält. Es bildet in diesem Zustande das oben beschriebene zwiebelförmige Endstück des Geschlechtsapparates, das schon durch seinen Bau die Zugehörigkeit zum Genitalbuckel hinreichend kundthut. Dass dasselbe seine ursprüngliche Lage

verändert hat, aus der Leibeshöhle in den Innenraum des Buckels übergetreten ist, erklärt sich aus den inzwischen veränderten Druckverhältnissen, die durch die allmälig zur vollen Entwicklung gekommenen Geschlechtsorgane, die keimbereitenden Theile (Ovarium) so gut, wie auch die Leitungswege (Uterus), bedingt werden. Dier gesteigerte Druck ist es auch, der sowohl den Genitalbuckel, wie den gesammten Körper, so weit er von dem Geschlechtsapparat durchsetzt wird, immer stärker ausweitet und dadurch dann die eigenthümliche Gestaltung unseres *Asconema* zur Folge hat. Der Kopfzapfen und das hinterste Schwanzende sind die einzigen Körpertheile, die ihre früheren Formverhältnisse beibehalten. Dass ersterer in anderer Hinsicht sich verändert, indem der Pharynx, der denselben durchsetzt, seine Selbständigkeit aufgiebt und mit der anliegenden Leibeswand verwächst, erscheint als der Ausdruck derselben rückschreitenden Metamorphose, die wir an dem Darme schon früher kennen gelernt haben.

Dass die Lebensgeschichte unseres *Asconema* ein Abbild jener Verhältnisse und Zustände bietet, die wir durch Schneider und mich bei *Sphaerularia* kennen gelernt haben, bedarf nach dem Voranstehenden kaum noch der ausdrücklichen Betonung. Beide Würmer gleichen einander nicht blos dadurch, dass sie ihre Vagina nach aussen umstülpen und zu einem eigenthümlichen Anhange entwickeln, sondern weiter auch insofern, als bei ihnen die männliche Geschlechtsreife und die Begattung in die Zeit des freien Lebens verlegt ist, und nur die Weibchen es sind, die zu Eingeweidewürmern werden. Der Unterschied, der zwischen ihnen obwaltet, reducirt sich darauf, dass der Genitalanhang von *Asconema* weit weniger selbständig sich entwickelt, und die ganze Lebensgeschichte in einen weit engern Zeitraum sich zusammendrängt.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

INHALT.

Seite

Sophus Lie, Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen . . . 337

A. Mayer, Die beiden allgemeinen Sätze der Variationsrechnung, welche den beiden Formen des Princips der kleinsten Action in der Dynamik entsprechen 343

Rud. Leuckart, Asconema gibbosum, ein Sphaerularia-artiger neuer Nematode 356

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

NEUNUNDDREISSIGSTER BAND.

1887.

MIT ZWEI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

INHALT.

Seite

H. Bruns, Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems. I. Mittheilung 1

Walther Dyck, Beiträge zur Analysis situs. III. Mittheilung. Vorgelegt von A. Mayer. (Mit einer lithogr. Tafel.) 40

O. Schlömilch, Ueber eine Entwickelung des Logarithmus . . . 53

H. Bruns, Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems. II. Mittheilung 55

Sophus Lie, Die Begriffe Gruppe und Invariante 83

Friedrich Engel, Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. Vorgelegt von S. Lie 89

J. Thomae, Bemerkung über Thetafunktionen vom Geschlecht 3 100

David Hilbert, Ueber die Büschel von binären Formen mit der nämlichen Funktionaldeterminante. Vorgelegt von A. Mayer . 112

A. Mayer, Ueber ein Bewegungsproblem 123

Johannes Walther, Die Entstehung von Kantengeröllen in der Galalawüste. Vorgelegt von H. Credner. (Mit einer Tafel.) . . 133

Ed. Study, Ueber den Begriff der Invariante algebraischer Formen. Vorgelegt von A. Mayer 137

C. Neumann, Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper 153

Axel Harnack, Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function durch die Fourier-Bessel'schen Functionen. 191

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts *Carl Friedrich von Gerber*.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Friedrich Zarncke* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1888.
Professor *Adolf Ebert* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1888.
Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Professor *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *Georg Ebers* in Leipzig.
—— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
Geheimer Rath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig.
Professor *Hans Georg Conon von der Gabelentz* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Gustav Hartenstein* in Jena.

Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.
Professor *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden.
Oberbibliothekar *Reinhold Köhler* in Weimar.
Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
Professor *August Leskien* in Leipzig.
—— *Hermann Lipsius* in Leipzig.
—— *Wilhelm Maurenbrecher* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
Professor *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Anton Springer* in Leipzig.
—— —— *Georg Voigt* in Leipzig.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig.
Professor *Ernst Windisch* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Professor *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Erwin Rohde* in Heidelberg.
Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Ludwig* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1889.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1889.
Professor *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Christian Wilhelm Braune* in Leipzig.
Professor *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Oberbergrath *Hermann Credner* in Leipzig.
Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.

Geheimer Hofrath *Hans Bruno Geinitz* in Dresden.
Professor *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
Professor *Axel Harnack* in Dresden.
Geheimer Medicinalrath *Wilhelm His* in Leipzig.
Professor *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
Professor *Sophus Lie* in Leipzig.
—— *Carl Neumann* in Leipzig.
—— *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
—— *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
—— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
Hofrath *Rudolf Wilhelm Schmitt* in Dresden.
Professor *Johannes Thomae* in Jena.
Geheimer Hofrath *August Töpler* in Dresden.
—— —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
Professor *Johannes Wislicenus* in Leipzig.
—— *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Edmund Drechsel* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Professor *Felix Klein* in Göttingen.
—— *Adalbert Krüger* in Kiel.
—— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Archivar:

Oberbibliothekar *Joseph Heinrich Gustav Ernst Förstemann* in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Johann Paul von Falkenstein 1882.
Karl August Wilhelm Eduard von Wietersheim 1865.

Philologisch-historische Classe.

Eduard Albrecht 1876.
Christoph Friedrich von Ammon 1850.
Wilhelm Adolf Becker 1846.
Hermann Brockhaus 1877.
Conrad Bursian 1883.
Georg Curtius 1885.
Johann Gustav Droysen 1884.
Gustav Flügel 1870.
Friedrich Franke 1871.
Hans Conon von der Gabelentz 1874.
Ernst Gotthelf Gersdorf 1874.
Carl Göttling 1869.
Hermann Alfred von Gutschmid 1887.
Gustav Hänel 1878.
Ferdinand Hand 1851.
Friedrich Christian August Hasse 1848.
Moritz Haupt 1874.
Gottfried Hermann 1848.
Friedrich Jacobs 1847.
Otto Jahn 1869.
Ludwig Lange 1885.
Carl Joachim Marquardt 1882.
Andreas Ludwig Jacob Michelsen 1881.
Carl Nipperdey 1875.
Carl von Noorden 1883.
Oscar Ferdinand Peschel 1875.
Ludwig Preller 1861.
Friedrich Wilhelm Ritschl 1876.
August Schleicher 1868.
August Seidler 1851.
Gustav Seyffarth 1885.
Carl Bernhard Stark 1879.
Johann Ernst Otto Stobbe 1887.
Friedrich Tuch 1867.
Friedrich August Ukert 1851.
Wilhelm Wachsmuth 1866.
Carl Georg von Wächter 1880.
Anton Westermann 1869.

Mathematisch-physische Classe.

Heinrich d'Arrest 1875.
Heinrich Richard Baltzer 1887.
Ludwig Albert Wilhelm von Bezold 1868.

Carl Bruhns 1881.
Carl Gustav Carus 1869.
Julius Cohnheim 1884.
Johann Wolfgang Döbereiner 1849.
Otto Linné Erdmann 1869.
Gustav Theodor Fechner 1887.
Otto Funke 1879.
Peter Andreas Hansen 1874.
Wilhelm Hofmeister 1877.
Emil Huschke 1858.
Hermann Kolbe 1884.
Gustav Kunze 1851.
Carl Gotthelf Lehmann 1863.
Bernhard August von Lindenau 1854.
Richard Felix Marchand 1850.
Georg Mettenius 1866.
August Ferdinand Möbius 1868.
Carl Friedrich Naumann 1873.
Eduard Pöppig 1868.
Ferdinand Reich 1882.
Theodor Scheerer 1875.
Matthias Jacob Schleiden 1881.
Christian Friedrich Schwägrichen 1853.
Ludwig Friedrich Wilhelm August Seebeck 1849.
Samuel Friedrich Nathanael von Stein 1885.
Alfred Wilhelm Volkmann 1877.
Eduard Friedrich Weber 1871.
Ernst Heinrich Weber 1878.
Johann Carl Friedrich Zöllner 1882.

Leipzig, am 31. December 1887.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1887 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1886. Berlin 1887.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1886, No. 40—53. 1887, No. 1—39. Berlin 1887.

Die Venus-Durchgänge 1874 und 1882. Bericht über die deutschen Beobachtungen. Im Auftrage der Commission für die Beobachtung des Venus-Durchgangs hsg. v. *A. Auwers*. Bd. 4. Berlin 1887.

Puchstein, Otto, Das ionische Capitell. 47. Progr. z. Winckelmannsfeste der Archaeologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1887.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XIX, No. 18. 19. Jahrg. XX, No. 1—17. Berlin 1886. 87.

Rüdorff, Frdr., Die Fortschritte der Chemie in den letzten fünfundzwanzig Jahren. Rede in der Aula der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin am 21. März 1887 gehalten. Berlin 1887.

Die Fortschritte der Physik im J. 1879 (Jahrg. 35), Abth. 1—3. Dargestellt von d. Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Im J. 1881 (Jahrg. 37), Abth. 1—3. Berlin 1885—87.

Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin im Jahre 1886 (Jahrg. 5). Berlin 1887.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 1 (1887), No. 1—20. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 1886/87, No. 1—18. Jahrg. 1887/88, Nr. 1—3. Berlin 1887.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geologischen Landesanstalt und Bergakademie zu Berlin f. d. J. 1885. Berlin 1886.

Abhandlungen zur geolog. Specialkarte von Preussen und den Thüringischen Staaten. Bd. VII, H. 3. 4. VIII, H. 2. Nebst Atlas zu VII, 4. VIII, 2. Berlin 1887.

Societatum Litterae. Verzeichniss der in den Publicationen der Akademien u. Vereine aller Länder erscheinenden Einzelarbeiten auf d. Gebiete der Naturwissenschaften. Hsg. v. E. Huth. Jahrg. 1887 u. 1887, No. 1. Berlin 1887.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 82. 83. Bonn 1886. 87.

3. Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaften zu Braunschweig f. d. Vereinsjahre 1881/82 u. 1882/83. 4. Jahresbericht f. d. Vereinsjahre 1883/84 bis 1885/86. Braunschweig 1883. 87.

Vierundsechzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1886. Breslau 1887. Nebst Ergänzungsheft: *Zach. Allerts* Tagebuch aus dem J. 1627. Herausg. v. Jul. Krebs. Breslau 1887.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Institutes. Jahrg. 3 (1885). Jahrg. 4 (1886), Lief. 1, Abth. 1. 2. Chemnitz 1886. 87.

Resultate der meteorolog. Beobachtungen angestellt auf der Sternwarte Leipzig im J. 1884. Veröffentlicht von der Direktion des Kgl. Sächs. meteorolog. Institutes in Chemnitz (Sep.-A.). Im J. 1885 (Sep.-A.).

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N.F. Bd. 6, H. 4. Danzig 1887.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. 32 (1886), H. 1—4. Jahrg. 33 (1887), Supplementheft. Dresden 1886. 87.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1886—87. Dresden 1887.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1886, Juli—Dec. Jahrg. 1887, Jan.—Juni. Dresden 1887.

Kgl. Sächsisches Polytechnikum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr 1886/87, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1887. — Programm f. d. Studienjahr, bez. Wintersem. 1887/88.

Mittheilungen des Vereins f. d. Geschichte u. Alterthumskunde zu Erfurt. H. 13. Erfurt 1887.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. H. 18. Erlangen 1886.

Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a/M. f. d. Rechnungsjahr 1885—86. Frankfurt a/M. 1887.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1887. Th. 1. 2. Freiberg 1887.

25. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1887.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 62, H. 1. 2. Bd. 63, H. 1. Görlitz 1886. 87.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 33, aus d. J. 1886. Göttingen 1886.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1886. Göttingen 1886.

Bericht über die im Jahr 1886 den Herzogl. Sammlungen zugegangenen Geschenke. Gotha 1887.

Leopoldina. Amtl. Organ d. kais. Leopoldinisch-Carolinisch-deutschen Akad. der Naturforscher. H. XXII, No. 21—24. XXIII, No. 3—20. Halle 1887.

Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. 16, H. 4. Halle 1886.

Bericht über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle im J. 1885. 86. Halle 1885. 86.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 4. Folge Bd. 5, 1886 (d. ganzen Reihe 59. Bd.), H. 4—6. Bd. 6, 1887 (d. ganzen Reihe 60. Bd.), H. 1—4. Halle 1886. 87.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 4, H. 1. Heidelberg 1887.

Chronik der Universität zu Kiel f. d. J. 1886/87; Verzeichniss d. Vorles. Winter 1886/87, Sommer 1887; *Blass, Frdr.*, Naturalismus u. Materialismus in Griechenland zu Platons Zeit. *Hensen, Vict.*, Die Naturwissenschaft im Universitätsverband. *Eudoxi* ars astronomica qualis in charta aegyptiaca superest denuo edita a Frdr. Blass. *Volbehr, Frdr.*, Professoren und Docenten der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1665—1887 (Beilage zur Chronik). — 43 Dissertationen vom J. 1886/87.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1886, H. 1—12. Berlin 1887.

Fünfter Bericht der Commission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel f. d. Jahre 1882—86. Jahrg. 12—16. Berlin 1887.

Schriften der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 27 (1886). Königsberg 1887.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. 22, H. 1—3. Leipzig 1887.

Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte u. Alterthumskunde. Bd. 5, H. 1. 2. Lübeck 1886. 87.

Jahresbericht u. Abhandlungen des Naturwissenschaftl. Vereins in Magdeburg. 1886. Magdeburg 1887.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1886 — Juli 1887. Meissen 1887.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 15 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 53. Bd.), Abth. 3. Bd. 16 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 56. Bd.), Abth. 1. München 1886. 87.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1886, H. 2. 3. Jahrg. 1887, H. 1. 2. München 1886. 87.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1886, H. 3. 4. Jahrg. 1887, Bd. I, H. 1—3. Bd. II, H. 1. 2. München 1886. 87.

Hertwig, R., Gedächtnisrede auf Carl Theodor v. Siebold, gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wiss. zur Feier ihres 127. Stiftungstages am 29. März 1886. München 1886.

Bauernfeind, C. M. v., Gedächtnisrede auf Joseph v. Fraunhofer zur Feier seines 100. Geburtstages. München 1887.

Giesebrecht, W. v., Gedächtnisrede auf Leopold v. Ranke, gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wiss. zur Feier ihres 128. Stiftungstages am 28. März 1887. München 1887.

Achtundzwanzigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1887.

Sitzungsberichte der Gesellschaft f. Morphologie u. Physiologie in München. Jahrg. 2 (1886), H. 1—3. München 1886. 87.

14. Jahresbericht des Westfälischen Prozinzial-Vereins f. Wissenschaft u. Kunst für 1885. Münster 1886.

Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1886 (nebst Abhandlungen, Bd. 8, Bogen 4. 5). Nürnberg 1887.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Bd. 1, H. 3 (Jahrg. 1886). — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Bd. 1, H. 3 (Jahrg. 1886). — Katalog der im Germanischen Museum befindlichen Kartenspiele u. Spielkarten. Nürnberg 1886.

Zeitschrift der historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 2, H. 3. 4. Posen 1886. 87.

Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Stettin. 1886. Stettin 1887.

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. Hsg. v. d. Kgl. Statist. Landesamt. Jahrg. 9 (1886), H. 1—4. Stuttgart 1886. 87.

Zuwachs der Grossherzogl. Bibliothek zu Weimar i. d. J. 1885 u. 1886. Weimar 1887.

Jahrbücher des Nassauschen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 40. Wiesbaden 1887.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Jahrg. 1886. Würzburg 1886.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. 20. Würzburg 1887.

Oesterreich-Ungarn.

Rad Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti [Agram]. Knjiga 82—84. U Zagrebu 1886. 87.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. Godina IX, Br. 1—4. U Zagrebu 1887.

Magyar tudom. Akadémiai Almanach, 1886-ra. 1887-re. Budapest 1885. 86.

A Magyar tudom. Akadémia Emlékbeszédek. Köt. 3, Sz. 3—10. 4, 1—5. Budapest 1885—87.

A Magyar tudom. Akadémia Értésitöje. Évfoly. 19 (1885), Sz. 3—6. 20 (1886), 1—7. 21 (1887), 1—3. Budapest 1885—87.

A Magyar tudom. Akadémia Évkönyvei. Köt. 17, D. 3. 4. Budapest 1885. 86.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausgeg. Bd. 3. 4. Budapest 1885. 86.

Ethnologische Mittheilungen aus Ungarn. Hsg. v. A. Herrmann. Jahrg. 1 (1887), H. 1. Budapest 1887.

Ungarische Revue. Mit Unterst. d. Ungar. Akad. d. Wiss. herausgeg. 1885, H. 8—10. 1886 (Jahrg. 6), H. 1—10. 1887, 1—7. Budapest d. J.

Irodalomtörténeti Emlékek. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Kötet 1. Budapest 1886.

Értekezések a mathematikai tudományok köréböl. Köt. 11, Sz. 10. Köt. 12, Sz. 1—11. Köt. 13, Sz. 1. 2. Budapest 1885—87.

Értekezések a nyelv- és széptudomanyok köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akadémia. Köt. 12, Sz. 6—12. Köt. 13, Sz. 1—12. Budapest 1885. 86.

Értekezések a természettudományok köréből. Köt. 14, Sz. 9. Köt. 15, Sz. 1—19. Köt. 16, Sz. 1—6. Köt. 17, Sz. 1. Budapest 1885—87.

Archaeologiai Értesitö. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Uj folyam, Köt. 5, 3—5. Köt. 6, 1—5. Köt. 7, 1. 2. Budapest 1885. 86.

Mathematikai és természettudományi Értesitö. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 3, 6—9. 4, 1—9. 5, 1—5. Budapest 1885—87.

Archaeologiai Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 14 (Uj folyam Köt. 11). 15. Budapest 1886.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 20. 21, 1—5. Budapest 1885.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 19, 2. 3. 20, 1. 2. Budapest 1885. 86.

Codex diplomaticus Hungaricus Andegavensis. T. 5. Budapest 1887.

Historiae Hungaricae Fontes domestici. Vol. 4. Chronica minora. Auspiciis et sumptibus Acad. scient. Hung. Budapest 1885.

Monumenta comitialia regni Hungariae. T. 9 (1598—1601). Budapest 1885.

Monumenta comitialia regni Transsylvaniae. T. 11. Budapest 1886.

Nyelvemléktár. Régi magyar codexek. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 13. Budapest 1886.

Régi magyar költök Tára. Kötet 5 (XVI. századbeli magyar költök müvei. Kötet 4). Budapest 1886.

Balassa, József, A phonetica elemei, különös tekintettel a magyar nyelvre. Budapest 1886.

Csoma, Sandor Körösi, Dolgozatai. Összegyüjtötte Duka Tivadar. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Budapest 1885.

Dankó, Jozsef, A Franczia könyvdisz a renaissance korban. Budapest 1886.

Fejérpataky, L., A királyi kanczellária az Arpádok korában. Budapest 1885.

——, Magyarországi városok régi számadaskönyvei. Budapest 1885.

Hellebrant, Árpád, Catalogus librorum saeculo XV impressorum quotquot in bibliotheca Acad. litt. Hungar. asservantur. Budapestini 1886.

Ipolyi, Arnold, Rimay János államiratai és levelezése. A Magyar tudom. Akad. történelmi bizottságának megbizásából. Budapest 1887.

König, Gyula, A másodrendii és kétfüggetlen változót tartalmazó parcziális differencziálegyenletek elmélete. Budapest 1885.

Majláth, Béla, A Szönyi béke okmánytára. Budapest 1885.

Mihalkovics, Géza, A gerinczes állatok kiválasztó és ivarszerveinek fejlédöse. Budapest 1885.

Munkácsi, Bern., Votják nepköltészeti hagyományok. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Budapest 1887.

Nyáry, Alb. Báró, A heraldika vezérfonala. Budapest 1886.

Óváry, L., Diplomatarium relationum Gabrielis Bethlen cum Venetorum republica. Budapest 1886.

Szádeczky, L., Báthory István lengyel királylyá választása. 1574—76. A Magyar tudom. Akad. történelmi bizottsága megbizásából. Budapest 1887.

Szentkláray, J., A Dunai hajóhadak története. Budapest 1886.

Szilágyi, Sándor, A Linzi béke okirattára. Budapest 1885.

Thaly, K., A székesi Gróf Bercsényi család. 1525—1835. Kötet 1. 2. Budapest 1885. 87.

Velics, A., Magyarországi török kincstári defterek. Kötet 1. Budapest 1886.

Wlassics, Gyula, A bünkisérlet és bevégzett büncselekmény. Kötet 1. 2. Budapest 1885. 87.

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1887, Winter-Sem. 1887/88. — Uebersicht der akad. Behörden, Winter-Sem. 1887/88.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Herausgeg. vom histor. Vereine für Steiermark. Jahrg. 22. Graz 1887.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. Heft 35. Graz 1887.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. Heft 30. Innsbruck 1886.

Berichte des naturwiss.-medizinischen Vereines in Innsbruck. Jahrg. 15 (1884/85 u. 1885/86). Innsbruck 1886.

Revue aus dem Inhalte der Medicin. Abtheilung des »Orvos-természettudományi Értesitö« (Medicin.-naturwiss. Mittheilungen). Organ der medicin.-naturwiss. Section des Siebenbürgischen Museumvereins. Bd. 9 (1887), H. 1. 2. Klausenburg 1887. — Revue aus d. Inhalte der Naturwiss. Abtheilung. Bd. 9 (1887), H. 1. 2. Klausenburg 1887.

Abhandlungen der mathem.-naturwiss. Cl. der k. böhmischen Gesellschaft d. Wissenschaften. 7. Folge, Bd. 1. Prag 1886. — Abhandlungen der Classe f. Philos., Geschichte u. Philologie. 7. Folge, Bd. 1. Prag 1886.

Jahresbericht der k. böhmischen Gesellschaft d. Wissenschaften, erstattet am 16. Jan. 1886; 15. Jan. 1887. Prag 1886. 87.

Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. Jahrg. 1885. 86. Prag 1886. 87. — Philos.-hist.-philol. Cl. Jahrg. 1885. 86. Prag 1886. 87.

Regesta diplomatica nec non epistolaria Bohemiae et Moraviae. Opera Jos. Emler. P. III (1311—33), Vol. 1—5. P. IV (1333—46), Vol. 1—5 (Sumptibus R. scientiarum Societatis Bohemiae). Pragae 1884—86.

Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag. Vereinsj. 1886/87 (38. Jahrg.). Prag 1887.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1886. Jahrg. 47. Prag 1887.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1887—88.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 25, No. 1—4. Prag 1886. 87.

Lotos. Jahrbuch f. Naturwissenschaft. Im Auftrag des Vereines »Lotos« herausg. N. F. Bd. 7. 8 (der ganzen Reihe Bd. 35. 36). Prag 1887. 88.

Verhandlungen des Vereins f. Natur- u. Heilkunde zu Presburg. N. F. Heft 5 (Jahrg. 1881—83). 6 (Jahrg. 1884—86). Presburg 1884. 87.

Bulletino di archeologia e storia dalmata. Anno 9 (1886), No. 12. Anno 10 (1887), No. 1—9. 11. Spalato 1886. 87.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 23 (1886), No. 25—27. Jahrg. 24 (1887), No. 1—25.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 68, 2. Hälfte. Bd. 69, 1. u. 2. Hälfte. Bd. 70. Wien 1887.

Denkschriften der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 51. 52. Wien 1886. 87.

Denkschriften der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Register (II) zu den Bänden 15—35. Wien 1886.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 93 (1886), Abth. I, Heft 4. 5. Abth. II, Heft 3—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 94 (1886), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 95 (1887), Abth. II, Heft 1. 2. Wien 1886. 87.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 112 (1886), Heft 1. 2. Bd. 113 (1886), Heft 1. 2. Bd. 114 (1887), Heft 1. Wien 1886. 87.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1886. Bd. 29 (N. F. Bd. 19). Wien 1886.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. 1886, III. u. IV. Quartal. 1887, I. u. II. Quartal. Wien 1886. 87.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums. Bd. 2, No. 1—4. Wien 1887.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 12, No. 4. Wien 1886.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1886 (Bd. 36), H. 4. Wien 1886.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1886, No. 13—18. Jahrg. 1887, No. 1.

Belgien.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. T. 41 (IV. Sér. T. 1). Anvers 1885. — Bulletin (IV. Sér. des Annales), No. 8. 9. Anvers 1886.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1886 (Année 52). 1887 (Année 53). Bruxelles d. J.

Bulletins de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année 55 (1885), III. Sér. T. 9. 10. Année 56 (1886), III. Sér. T. 11. 12. Année 57 (1887), III. Sér. T. 13. Bruxelles d. J.

Catalogue des livres de la bibliothèque de l'Acad. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. P. I. II, 1. 2. Bruxelles 1881. 83. 87.

Mémoires couronnés et autres Mémoires p. p. l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in-8°. T. 37—39. Bruxelles 1886.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers p. p. l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 47. 48. Bruxelles 1886.

Mémoires de l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 46. Bruxelles 1886.

Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Notices biographiques et bibliographiques. 1886. Bruxelles 1887.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 30. Bruxelles 1886.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1886, No. 3. 1887, No. 1. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturvid. og mathemat. Afd. 6. Række. Bd. 4, No. 8. Kjøbenhavn 1887.

Regesta diplomatica historiae Danicae, cura Societatis Reg. scient. Danicae. Ser. II. T. 1, Fasc. 5. Kjøbenhavn 1886.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 5, P. 6. Vol. 6, P. 1. 2. Cambridge 1886. 87.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 14, P. 2. Cambridge 1887.

Royal Irish Academy. Cunningham Memoirs. No. 2. 3. Dublin 1886.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. II. Vol. 2 (Polite literature and antiquities), Nr. 6. 7. Vol. 4 (Science), No. 1—5. Dublin 1884—86.

R. Irish Academy. Todd Lecture Series. Vol. 2, P. 1. Dublin 1885.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 27 (Polite literature and antiquities), P. 6—8. Vol. 28 (Science), P. 14—25. Dublin 1883—86.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. N. Ser. Vol. 5, P. 3—6. Dublin 1886. 87.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Ser. II. Vol. 3, No. 11—13. Dublin 1886. 87.

Journal of the R. Geological Society of Ireland. Vol. 18 (N. Ser. Vol. 8), P. 1. 2. Dublin 1886. 87.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. XI, P. 8 (No. 80). XII, P. 1 (No. 81). London 1887. — List of the members, 1886. 1887. London d. J.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XLI, No. 248—250. Vol. XLII, No. 251—257. Vol. XLIII, No. 258. 259. London 1886. 87.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1886. Vol. 177, P. 1. 2. London 1886. 87. — The R. Society, 30. Nov. 1886 (List of the members).

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 17, No. 272—279. Vol. 18, Nr. 280—300. London 1887.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Ser. II. Vol. 6 (1886), P. 6a. 1887, P. 1—6. London 1887.

Report on the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger, 1873—76. Zoology, Vol. 17. 18, P. I. II and Plates. 19. 20. 21, Text and Plates. 22. — Botany Vol. 2. London 1886. 87.

Frankreich.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des lettres. Vol. 23. Paris, Lyon 1885—86.

Guigue, M.-C., Cartulaire Lyonnais. T. 1. Documents antérieurs à l'année 1255 (Collection de documents inédits pour servir à l'histoire du Lyonnais, p. p. les soins de l'Acad. des sciences, belles-lettres et arts de Lyon). Lyon 1885.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. Nouv. Sér. T. 29, Fasc. 8, Planches 1—4. T. 30. 31. Lyon 1884. 85.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. T. 7, Fasc. 3 (Année 1885/86). — Mémoires de la section de médécine. T. 6, Fasc. 1 (Année 1885/86). Montpellier 1886.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg). Sér. II. T. 8, Fasc. 19. Année 19 (1886). Paris 1886.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1886. Paris 1887.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 56. Paris 1886.

Mission scientifique du Cap Horn, 1882—83. T. 3. Magnétisme terrestre. Paris 1886.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 14, No. 5. T. 15, No. 1—6. Paris 1886. 87.

Holland und Luxemburg.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1885.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Natuurkunde. Deel XXV. Amsterdam 1887.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. III. Reeks, Deel 3. Amsterdam 1887. — Afdeel. Natuurkunde. III. Reeks, Deel 2. Amsterdam 1886.

Judas Machabaeus. Nupta ad amicam. Carmina in certamine poet. indicto ab Acad. Reg. disciplinarum Neerlandica praemio et laude ornata. Amstelod. 1886.

Bijdragen tot de Dierkunde, uitg. door het Genootschap »Natura artis magistra« te Amsterdam. Aflev. 13. Amsterdam 1886.

Annales de l'École Polytechnique de Delft. T. 2, Livr. 3. 4. T. 3, Livr. 1—3. Leide 1886. 87.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 21, Livr. 2—5. T. 22, Livr. 1—3. Harlem 1886. 87.

Programma van de Hollandsche Maatschappij der wetenschappen te Haarlem voor het jaar 1884. 85. — Naamlijst van directeuren en leden van de Holl. Maatsch. d. wetenschappen te Haarlem. 21. mei 1885.

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der wetenschappen. III. Verzameling. Deel 4, St. 3. 4. Deel 5, St. 1. Haarlem 1883. 87.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 3, P. 1. Harlem 1887.

Fondation Teyler. Catalogue de la bibliothèque, dressé p. C. Ekama. Livr. 5. 6. Harlem 1886.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1886. Leiden 1886.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1886. Leiden 1886.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging. Ser. II. Deel 5, St. 1. Nijmegen 1887.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetenschappen, ter gelegenheid van de algem. vergaderingen gehouden d. 28. Sept. 1886. Utrecht 1886.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1887.

Verslag van het verhandelde in de algem. vergader. van het Provinc. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 28. Sept. 1886. Utrecht 1886.

Fränkel, Sigm., Die aramäischen Fremdwörter im Arabischen. Eine von »het Provinz. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetenschappen« gekrönte Preisschrift. Leiden 1886.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 10. Utrecht 1887.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N. Ser. 43—45. Utrecht 1886. 87.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Uitgeg. door Donders en Engelmann. III. Reeks. Deel X, St. 2. Utrecht 1887.

Publications de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles. T. 20. Luxembourg 1886.

Oservations météorologiques, faites à Luxembourg p. F. Reuter. Vol. 3. 4. Luxembourg 1887.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1886, No. 24 e Indici S. 1—155. 1887, No. 25—47. Firenze 1886. 87.

Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Vol. 1 (1886), No. 5. 6 e Indice. Vol. 2 (1887), No. 1—3. Roma 1886. 87.

Novi Commentarii Academiae scientiarium Instituti Bononiensis. T. 1—10. Bononiae 1834—49, und Indices generales in Nov. Comment. Bononiae 1855. — Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. T. 1—12. Bologna 1850—61, und Indici generali. Bologna 1864. — Serie II. T. 1—10. Bologna 1862—70 und Indici generali. Bologna 1871. — Serie III. T. 1—10. Bologna 1871—79, und Indici generali. Bologna 1880. — Ser. IV. T. 1—7. Bologna 1880—86.

Galvani, Luigi, Opere edite e inedite. Raccolte e pubbl. p. cura dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Bologna 1841. Nebst Aggiunta. Bologna 1842.

Giudice, Franc. del, Universalità dei mezzi di previdenza, difesa, e salvezza per le calamità degl' incendi. Opera premiata dall'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Bologna 1848.

—— Della instituzione de' pompieri per grandi città e terre minori. Opera premiata dall'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Bologna 1852.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia. *Rondoni, G.*, I più antichi frammenti del Costituto Fiorentino. Firenze 1882. *Del Vecchio, A.*, Le seconde nozze del conjuge superstite. Studio storico. Firenze 1885. — Sezione di medicina e chirurgia e Scuola di farmacia. Archivio della Scuola d'anatomia patologica, diretto da G. Pellizari. Vol. II. Firenze 1883. *Filippi, A.*, Esegesi medico legale sul Methodus testificandi di G. B. Codronchi. Firenze 1883. — Sezione di scienze fisiche e naturali. *Luciani, L.*, Linee generali della fisiologia del cervelletto. Prima memoria. Firenze 1884. *Ròiti, A.*, Osservazioni continue della elettricità atmosferica. Firenze 1884.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 19. Milano 1886.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Ser. I. T. 20, P. 3. Ser. II. Vol. 4. Modena 1882. 86.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Della Serie Vol. 8 (Scienze fisiche e naturali, Vol. 4). Pisa 1887.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie, Vol. 8, Fasc. 1. 2. Pisa 1886. 87.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 5, adunanza del 14. Nov. 1886, 9. Genn., 13. Marzo, 8. Maggio, 3. Luglio 1887.

Atti della R. Accademia de' Lincei. Serie IV. Memorie della Classe di scienze fisiche, matemat. e naturali. Vol. 1. Roma 1885. — Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 1. 2, P. 2 (Notizie degli scavi, 1886, Genn. — Dicembre e Indice topografico). Roma 1885. 86. — Rendiconti. Vol. 2, II. Sem., Fasc. 10—12. Vol. 3, I. Sem., Fasc. 1—13. II. Sem., Fasc. 1—5. Roma 1886. 87.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bullettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 1, H. 4. Bd. 2. H. 1—3. Rom 1886. 87.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXII, Disp. 1—15. Torino 1887.

Bollettino meteorologico ed astronomico dell' Osservatorio della R. Università di Torino. Anno 21 (1886). Parte meteorologica. Torino 1887.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. T. 3, Disp. 10. T. 4, Disp. 1—10 e Appendice. T. 5, Disp. 1. Venezia 1884/85—1886/87.

Russland.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat. Bd. 5, S. 1—64 (Dorpat 1886. 87).

Weihrauch, K., Zwanzigjährige Mittelwerthe aus den meteorologischen Beobachtungen 1866—1885 für Dorpat. Ergänzungsheft zum 4. Bande der Dorpater meteorolog. Beobachtungen. Dorpat 1887.

Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen der Kaiserlichen livländ. gemeinnützigen u. ökonom. Societät f. d. J. 1885. Dorpat 1886.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societ. Häftet 44. Helsingfors 1887.

Observations publiées par l'Institut météorologique central de la Société des sciences de Finlande. Vol. 1, Livr. 1 (Observations météorol. faites à Helsingfors en 1882). Vol. 2, Livr. 1 (Observat. météorol. faites à Helsingfors en 1883). Helsingfors 1886.

Exploration internationale des régions polaires, 1882/83 et 1883/84. Expédition polaire finlandaise. T. II. Observations faites aux stations de Sodankylä et de Kultala p. S. Lemström et E. Biese. Helsingfors 1887.

Universitetskija Izvěstija. God 26 (1886), No. 10—12. God 27 (1887), No. 1—9. Kiev 1886. 87.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. 62 (Année 1886), No. 4. T. 63 (Année 1887), No. 1—3. Moscou 1887.

Meteorologische Beobachtungen, ausgeführt am Meteorol. Observatorium d. Landwirthschaftlichen Akademie zu Moskau von A: A. Fadéiéff. 1886, 2. Hälfte (Beilage z. Bulletin de la Soc. Imp. des Natural. de Moscou, T. 62). Moscou 1887.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXXI, No. 3. 4. T. XXXII, No. 1. St.-Pétersbourg 1886. 87.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. 34, No. 7—13. T. 35, No. 1—7. St.-Pétersbourg 1886. 87.

Repertorium für Meteorologie, hsg. v. d. kais. Akademie d. Wissensch., redig. v. H. Wild. Bd. 10. St. Petersburg 1887. — Supplementband 2 (*Rykatschew, M.*, Über den Aufgang und Zugang der Gewässer des Russischen Reichs). 3 (*Wahlén, E.*, Wahre Tagesmittel u. tägliche Variation d. Temperatur an 18 Stationen des Russischen Reichs). 4 (*Leyst, E.*, Katalog d. meteorolog. Beobachtungen in Russland und Finnland). St. Petersburg 1887.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums; herausg. von H. Wild. Jahrg. 1885, Th. 1. 2. Jahrg. 1886, Th. 1. St. Petersburg 1886. 87.

Acta Horti Petropolitani. T. 9, Fasc. 2. Petropoli 1886.

Trudy S.-Peterburgskago Obščestva estestvoispytatelej. T. 17, 1. St. Peterburg 1886.

Juridičeskaja Bibliografija izdav. Jurid. Fakultetom Imp. S. Peterburgskago Universiteta. God 3 (1886), No. 7—9. S. Peterburg 1886. 87.

Protokoly zasědanij sověta Imperat. S.-Peterburgskago Universiteta. No. 33—35. S. Peterburg 1886. 87.

Wedenski, N., Über die Beziehungen zwischen Reizung und Erregung im Tetanus. S. Peterburg 1886.

Sazonović, Pěsni o děvuškě-voině i byliny o stavrě Godinoviče. Varšava 1886.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 30. Riga 1887.

Magnetische Beobachtungen des Tifliser Physikal. Observatoriums in den Jahren 1884—85, hsg. v. J. Mielberg. Tiflis 1887.

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser Physikal. Observatoriums im J. 1885, hsg. v. J. Mielberg. Tiflis 1886.

Schweden und Norwegen.

Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund. Accessions-Katalog. 1 (1886). Stockholm 1887.

Forhandlinger ved de Skandinaviske Naturforskeres 13de Möde i Christiania 7.—12. Juli 1886. Christiania 1887.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1886. Christiania 1887.

Caspari, C. P., Eine Augustin fälschlich beigelegte Homilia de sacrilegiis (Hsg. von der Gesellschaft d. Wissensch. zu Christiania). Christiania 1886.

Lieblein, J., Handel und Schiffahrt auf dem Rothen Meere in alten Zeiten. Nach ägyptischen Quellen (Hsg. von der Gesellschaft d. Wissensch. zu Christiania). Christiania 1886.

Publication der Norweg. Commission d. Europäischen Gradmessung. Geodätische Arbeiten H. 5. Christiania 1887.

Udgivet af den Norske Gradmaalingskommission. Vandstandsobservationer Hefte 4. Christiania 1887.

Schübeler, F. C., Viridarium Norvegicum. Norges Vaextrige. Bd. 1, H. 2 og Bd. 2, H. 1. Udgivet som Univ.-Progr. for andet Semester 1886. Christiania 1886.

Agricola, Joann., Apophthegmata nonnulla. Nunc primum edid. Lud. Daae (Programma academ. quo inclytae Universitati Heidelbergensi inter saecularia sollemnia gratulatur Univ. Reg. Christianensis). Christianiae 1886.

Drachmann, A. B., Catuls digtning belyst i forhold til den tidligere græske og latinske litteratur. Kjøbenhavn 1887. Guderne hos Vergil. Kjøbenhavn 1887.

Stenersen, L. B., Catuls digtning oplyst i dens sammenhæng med den tidligere græske og latinske literatur. Kristiania 1887. Udsigt over den romerske Satires forskjellige arter. Kristiania 1887.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. XVII. Zoologi. *Danielssen, D. C.*, Alcyonida. XVIII. A. B. *Mohn, H.*, Nordhavets dybder, temperatur og strømninger. Christiania 1887.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 22 (1885—86), I. II. Lund 1886. 87.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. Årg. 15 (1886). Stockholm 1886—87.

Antiquarisk Tidskrift för Sverige utg. af Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademien genom Bror Emil Hildebrand. Delen 9, 1. 2. 10, 1. 2. Stockholm 1887.

Entomologisk Tidskrift, på föranstaltende af Entomologiska Föreningen i Stockholm utg. af Jac. Spångberg. Årg. 7 (1886), H. 1—4. Stockholm 1886.

Tromsø Museums Aarshefter. 10. Tromsø 1887. — Tromsø Museums Aarsberetning for 1886. Tromsø 1887.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. XIII, Fasc. 2. Upsaliae 1887.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 18 (1886). Upsal 1886—87.

Schweiz.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Locle 11.—13. Aug. 1885. 68. Jahresversammlung. Jahresbericht 1884/85. Neuenburg 1886. — Verhandlungen in Genf 10.—12. Aug. 1886. 69. Jahresversammlung. Jahresbericht 1885/86. Genf 1886.

Compte-rendu des travaux présentés à la 68. session de la Société Helv. des sciences naturelles réunie à Locle 11.—13. août 1885 (Archives des sciences phys. et naturelles, Sept. 1885). Genève 1885. — Compte-rendu des travaux prés. à la 69. session à Genève 10.—12. août 1886 (Arch. d. sc. phys. et nat., Sept.-Oct. 1886). Genève 1886.

Basler Chroniken. Herausgeg. von der Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft in Basel. Bd. 3. Hsg. durch W. Vischer. Leipzig 1887.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Th. 8, H. 2. Basel 1887.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1885, H. 3 (No. 1133—42). Aus d. J. 1886 (No. 1143—68). Bern 1886. 87.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrg. 30 (Vereinsjahr 1885/86). Chur 1887.

Vierteljahrsschrift d. naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 32, H. 1. Zürich 1887.

Spanien.

Discursos leidos ante la Real Academia de ciencias morales y políticas en la recepcion pública de Franc. Silvela 1887. Eug. Montero Rios 1887. Madrid 1887.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Año de 1887. Madrid 1887.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Programa para los concursos ordinarios de 1888 y 1889. Madrid 1887.

Danvila y Collado, M., El poder civil en España. Memoria premiada por la R. Acad. de cienc. mor. y pol. T. 6. Madrid 1887. — *Soler y Arqués, Carlos*, Ideal de la familia. Memoria premiada por la R. Acad. de cienc. mor. y pol. Madrid 1887.

Nordamerika.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 17 (1886). Boston 1887.

Proceedings of the American Oriental Society, at New Haven, Oct. 1886; at Boston, May 1887.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. 6, No. 54—59. Baltimore 1886. 87.

Eleventh Annual Report of the President of the Johns Hopkins University, 1886. Baltimore 1886.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. IX, No. 2—4. Vol. X, No. 1. Baltimore 1887.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. V. Ser., 1—4. 7—11. Baltimore 1887.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences [Boston]. Vol. 2, P. 4, No. 5. Vol. 11 (Centennial Volume), P. 4, N. 5. Boston 1877. 86.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. S. Vol. XIV (Whole Ser. Vol. XXII), P. 1. 2. From May 1886 to May 1887. Selected from the Records. Boston 1887.

Bulletin of the Buffalo Society of Natural History. Vol. V, No. 2. Buffalo 1886.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. XIII, No. 2—5. Cambridge, Mass. 1886. 87.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. XVI, No. 1. 2. Cambridge, Mass. 1887.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1886/87. Cambridge, Mass. 1887.

Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College. Vol. 17. Cambridge, Mass. 1887.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 5. Madison 1887..

Memorias de la Sociedad científica »Antonio Alzate«. T. 1, Cuad. 1—4. México 1887.

The geological and natural history Survey of Minnesota. The 13. 14. annual Report, for the year 1884. 1885. Minneapolis (St. Paul) 1885. 86.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada for the year 1885. Vol. 3. Montreal 1886. For the year 1886. Vol. 4. Montreal 1887.

The Canadian Record of science, including the Proceedings of the Natural history Society of Montreal and replacing the Canadian Naturalist. Vol. 2, No. 5. 6. Montreal 1887.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. 7, P. 1. New Haven 1886.

Transactions of the Astronomical Observatory of Yale University. Vol. 1, P. 1. New Haven 1887.

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. III, No. 11. 12. Vol. IV, No. 1. 2. New York 1885. 87.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. IV. V, No. 1. 7. 8. New York 1885—87.

Bulletin of the American Geographical Society. 1885, No. 4. 5. 1886, No. 2—5. Vol. 19 (1887), No. 1—3. New York 1886. 87.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1886, P. 3 (Oct.—Dec.). 1887, P. 1 (Jan.—April). 2 (April—Aug.). Philadelphia 1887.

Transactions of the Wagner Free Institute of science of Philadelphia. Vol. 1. Philadelphia 1887.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XXIII, No. 124. Vol. XXIV, No. 125. Philadelphia 1886. 87.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 4, No. 4. St. Louis 1886.

Peabody Academy of science. 19th Report of the Trustees. Salem, Mass. 1887.

Bulletin of the California Academy of sciences. Vol. 2, No. 5—7. San Francisco 1886. 87.

Kosmos. An eclectic monthly Journal of nature, science and art. Vol. 1, No. 1. 2. San Francisco 1887.

Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya, para el año de 1888 (Año VIII). México 1887.

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto, being a continuation of the Canadian Journal of science, literature and history. III. Ser. Vol. 4, Fasc. 2. Vol. 5, Fasc. 1. Toronto 1887.

Memoirs of the National Academy of sciences. Vol. 3, P. 2. Washington 1886.

Circulars of information and Bulletins of the Bureau of Education for 1885. 1887, No. 1. 2. Washington 1886. 87.

Fourth Annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 1882—83. By J. W. Powell. Washington 1886.

Report of the Commissioner of Agriculture for the year 1885. Washington 1885.

Report of the Commissioner of Education for the year 1884—85. Washington 1886.

Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 28—30. Washington 1887.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1884, P. II. For the year 1885, P. I. Washington 1885. 86.

Annual Report of the Chief Signal-Officer to the Secretary of war for the year 1885, P. I. II. Washington 1885.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work during the fiscal year ending with June 1885. P. I (Text). II (Sketches). Washington 1886.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 30—39. Washington 1886. 87.

Monographs of the U. S. Geological Survey. Vol. X. XI. Washington 1885. 86.

Sixth Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior 1884—85, by J. W. Powell. Washington 1885.

U. S. Geological Survey. Mineral Resources of the United States. Calendar year 1885. Washington 1886.

Südamerika.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. T. 22, Entrega 5. 6. T. 23, Entr. 1—6. T. 24, Entr. 1. Buenos Aires 1887.

Actas de la Academia nacional de ciencias en Córdoba. T. V, Entrega 3. Buenos Aires 1886.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. T. IX, Entrega 1—4. Buenos Aires 1886.

Archivos do Museu Nacional do Rio de Janeiro. Vol. 6. Rio de Janeiro 1885.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. H. 4. Valparaiso 1886.

Asien.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 24 (1886), No. 2—4. Deel 25 (1887), No. 1—3. Batavia 1886. 87.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 31, Afl. 2 (Vervolg). 3—6. Deel 32, Afl. 1. Batavia 1886. 87.

Chijs, J. A. van der, Catalogus der Numismatische Verzameling van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Derde druk. Batavia, 's Hage 1886.

—— De vestiging van het nederlandsch gezag over de Banda-Eilanden 1599—1621. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Batavia 1886.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India anno 1640—41. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch., met medewerking van de Nederlandsch-Indische Regeering en onder toezicht van J. A. van der Chijs. Batavia, 's Hage 1887.

Groeneveldt, W. P., Catalogus der Archaeologische Verzameling van het Batav. Genootsch. van kunsten en wetenschappen. Batavia 1887.

Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811, door J. H. van der Chijs. Uitgeg. d. het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 4. Batavia, 's Hage 1887.

Realia. Register op de generale resolutiën van het Kasteel Batavia 1632—1805. Uitgeg. d. het Batav. Genootsch. van kunsten en wetenschappen. Deel 3. 's Hage, Batavia 1886.

Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 6, Suppl. Vol. 7. Batavia 1886.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgeg. d. de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 46 (VIII. Ser., D. 7). Batavia 1887.

Photographie du Volcan Krakatau. Avec texte par *R. D. M. Verbeek*. Buitenzorg 1886.

Cotes, E. C. and *C. Swinhoe*, A Catalogue of the Moths of India. P. I. Sphinges. Calcutta (India Museum) 1887.

Journal of the China Branch of the R. Asiatic Society. N. Ser. Vol. 21, (1886), No. 3—6. Shanghai 1887.

Imperial University of Japan (Teikoku Daigaku). The Calendar for the year 1886/87. Tōkyō 1886.

Journal of the College of science, Imperial University, Japan. Vol. 1, P. 1—4. Tōkyō 1886. 87.

Mittheilungen aus der Medicinischen Facultät der Kais. Japanischen Universität. Bd. 1, No. 1. Tokyo 1887.

Australien.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 19 (1885). Sydney 1886.

Technological, industrial and sanitary Museum, Sydney. Report of the Committee of management for 1886. Sydney o. J.

2. Einzelne Schriften.

Ashburner, C. A., The geologic distribution of natural gas in the United States. o. O. 1886.

—— The geologic relations of the Nanticoke disaster. o. O. 1887.

Culin, Stewart, China in America. A study in the life of the Chinese in the Eastern cities of the United States. Philadelphia 1887.

Engelhardt, B. d', Observations astronomiques faites dans son observatoire à Dresde. P. 1. Dresde 1886.

Esperanto, Internationale Sprache. Vorrede u. vollständiges Lehrbuch. Warschau 1887.

Löwenberg, B., Contribution au traitement du Coryza. Paris 1881.

—— Travaux originaux communiqués au troisième Congrès otologique international (Bâle, Sept. 1884). Bâle 1885.

Loomis, Elias, Contributions to meteorology. Chapter II. Revised edition. New Haven 1887.

Saint-Lager, Histoire des Herbiers. Paris 1885.

—— Recherches historiques sur les mots »Plantes mâles« et »Plantes femelles«. Paris 1884.

Seydler, A., Untersuchungen über verschiedene mögliche Formen des Kraftgesetzes zwischen Massentheilchen (S. A.). Prag 1887.

Teige, Jos., Blätter aus der altböhmischen Genealogie. Wien 1887.

Weihrauch, K., Einfluss des Widerstandes auf die Pendelbewegung bei ablenkenden Kräften, mit Anwendung auf das Foucault'sche Pendel (S. A.). 1887.

Wernicke, Alex., Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Maasses (Prgr.). Braunschweig 1887.

Winkler, Clem., Mittheilungen über das Germanium (S. A.). Leipzig 1887.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1887.

I. II.

MIT ZWEI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1888.

SITZUNG AM 17. JANUAR 1887.

H. Bruns, *Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems.*

§ 1.

Die bis jetzt bekannten Integrale des Vielkörper-Problems, nämlich die Schwerpunkts- und Flächen-Sätze und der Satz von der lebendigen Kraft, besitzen die gemeinsame Eigenschaft, dass sie die Coordinaten und die Geschwindigkeits-Componenten nur in algebraischen Verbindungen enthalten. Dieser Umstand, sowie die Vergeblichkeit der bisherigen Bemühungen zur Auffindung weiterer Integrale legen die Vermuthung nahe, dass der Kreis der algebraischen Integrale mit den genannten abgeschlossen sei. Es soll deshalb hier die Aufgabe behandelt werden, alle algebraischen, die Zeit nicht explicite enthaltenden Integrale aufzusuchen. Das Ergebniss ist, wie hier gleich bemerkt werden soll, negativer Art, d. h. die noch fehlenden Integrale sind sämmtlich transcendent.

Es seien m_α, x_α, y_α, z_α $(\alpha = 1, 2 \ldots n)$ die Massen und die Coordinaten der materiellen Punkte, $r_{\alpha\beta}$ die Distanz der Massen m_α m_β,

$$U = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

die Kräftefunction für den Fall des Newton'schen Gravitationsgesetzes, dann können wir die Bewegungsgleichungen in der Form

$$(1) \qquad \frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha, \quad \frac{dX_\alpha}{dt} = \frac{1}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad \text{etc.}$$

schreiben. Wir beschränken uns, wie bereits angedeutet, auf die von t freien Integrale und bezeichnen, wie üblich, als Integral einen aus den x, $X \ldots$ gebildeten Ausdruck φ, dessen Ab-

leitung nach t unter Berücksichtigung der Differentalgleichungen (1) identisch verschwindet, der also der Bedingung

$$(2) \qquad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} X_\alpha + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + \cdots$$

genügt. Ausserdem werden wir mit Ausdrücken φ zu thun haben, welche die Bedingung (2) zwar nicht identisch befriedigen, wohl aber in Folge der Bedingung $\varphi = 0$. Derartige Ausdrücke wollen wir, in Ermangelung einer anderen Bezeichnungsweise, kurz »Integralgleichungen« nennen. Solche Ausdrücke entstehen z. B. durch Verbindung und Umformung von Gleichungen, welche Bestandtheile einer allgemeinen, particulären oder singulären Lösung der vorgelegten Differentialgleichungen sind. Im vorliegenden Falle haben wir diese verschiedenen Möglichkeiten nicht näher zu untersuchen; wir können deshalb auch davon absehen, dass das vorgelegte Problem überhaupt keine singulären Lösungen besitzt.

Zur Abkürzung des Ausdruckes wollen wir noch festsetzen, dass die Zeichen G und R benutzt werden sollen, wenn es sich nur darum handelt, anzuzeigen, dass eine Grösse eine ganze Function oder eine rationale Function ist, ohne dass es dabei auf die besondere Form derselben weiter ankommt.

§ 2.

Bei der Aufsuchung der algebraischen Integrale des Systems (1) wollen wir zunächst ein etwas allgemeineres System von Differentialgleichungen zu Grunde legen, und erst später auf das System (1) zurückgehen. Es seien die $2m$ Variablen $x_1 \ldots x_m$, $y_1 \ldots y_m$ als Functionen von t durch das Gleichungssystem

$$(3) \qquad \frac{dx_\alpha}{dt} = y_\alpha, \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = A_\alpha(x_1 \ldots x_m),$$

definirt, wo die A_α algebraische Functionen der $x_1 \ldots x_m$ ohne t bedeuten. Diese algebraischen Functionen können wir uns immer dargestellt denken als rationale Functionen der x und einer einzigen algebraischen Irrationalität s, welche als Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$(4) \qquad F(s; x_1 \ldots x_m) = s^n + S_1 s^{n-1} + \ldots + S_n = 0$$

definirt ist, in der $S_\alpha = G(x)$. Wir werden vorläufig bezüglich der $A_1 \ldots A_m$, F nur folgende zwei Einschränkungen fest-

setzen. Erstlich soll F eine ganze homogene Function (vom n^{ten} Grade) der Variablen s und x, ohne willkürliche, in den A_α nicht vorkommende Constanten, bedeuten; zweitens sollen die A homogene Functionen der x, s und zwar von einer geraden Ordnung $2N$ sein. Beide Einschränkungen treffen für unser specielles Problem (1) zu. Setzt man nämlich

$$(5) \qquad s = \sum r_{\alpha\beta} ,$$

und schafft man die Quadratwurzeln, als welche sich die r darstellen, fort, so erhält man für s in der That eine Gleichung der vorausgesetzten Art. Ferner werden die Ableitungen der Kräftefunction in (1) homogene rationale Functionen von den x, y, z und von s, und zwar von der Ordnung — 2, indem sich jedes r rational durch diese Variablen ausdrücken lässt. Um sich hiervon zu überzeugen, hat man nur nöthig, in (5) alle Quadratwurzeln bis auf eine fortzuschaffen.

Ein algebraisch von den x, y abhängiges Integral φ der Gleichungen (3) lässt sich nun immer definiren als Wurzel einer gewissen Gleichung

$$(6) \qquad \varphi^p + B_1 \varphi^{p-1} + \cdots + B_p = 0 ,$$

in welcher $B_\alpha = R(x, y)$ ist, und von der wir voraussetzen dürfen, dass sie nicht in Factoren von ähnlicher Beschaffenheit zerlegbar sei. Die Differentiation nach t liefert

$$(7) \qquad \frac{dB_1}{dt} \varphi^{p-1} + \cdots + \frac{dB_p}{dt} = 0 .$$

Verschwinden in dieser Gleichung sämmtliche Coefficienten, so sind die B rational aus den x, y zusammengesetzte Integrale, also φ eine algebraische Verbindung rationaler Integrale. Verschwinden die Ableitungen der B nicht, so nehmen sie die Form $R(x, y, s)$ an, und die Gleichungen (6) und (7) besitzen eine gemeinsame Wurzel, d. h. die Gleichung (6) wird reductibel, wenn man den Variablen x, y die Irrationalität s »adjungirt«. Beide Gleichungen besitzen also einen gemeinsamen Theiler

$$(8) \qquad \varphi^q + C_1 \varphi^{q-1} + \cdots C_q , \quad (C_\alpha = R(x, y, s)) ,$$

welcher nicht in Factoren von ähnlicher Form zerlegbar ist und der verschwindet, wenn für φ das betrachtete algebraische Integral substituirt wird. Die Wiederholung derselben Schlussweise führt zu der Bedingung

$$\frac{dC_1}{dt}\varphi^{q-1} + \cdots + \frac{dC_q}{dt} = 0 ,$$

welche wegen der Irreductibilität von (8) nicht anders erfüllt sein kann, als wenn die Ableitungen der C sämmtlich verschwinden. Die C sind daher Integrale von der Form $R(x, y, s)$. Zusammenfassend können wir also sagen: die gesuchten algebraischen Integrale lassen sich immer als algebraische Verbindungen von Integralen der Form $R(x, y, s)$ darstellen.

§ 3.

Es sei nun φ ein Integral von der Form $R(x, y, s)$. Denken wir uns dasselbe als Quotienten zweier Polynome von der Form $G(x, y, s)$ geschrieben, so können die Coefficienten in Zähler und Nenner ausser den in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten noch irgend welche Parameter $a_1, a_2 \ldots$ enthalten, denen beliebige constante Werthe beigelegt werden dürfen, ohne dass φ aufhört Integral zu sein. Wir wollen zeigen, dass ein solches Integral sich allemal als rationale Verbindung von parameterfreien Integralen derselben Art darstellen lässt. Zu dem Ende denken wir uns einen Quotienten φ' zweier Polynome D und E angesetzt, welche genau dieselben Terme wie Zähler und Nenner von φ, aber mit unbestimmten Coefficienten $D_1, D_2, \ldots$ resp. $E_1, E_2 \ldots$ enthalten.

Die Forderung, dass φ' ein Integral sein soll, führt zu der Bedingung

$$D\frac{dE}{dt} - E\frac{dD}{dt} = 0 , \tag{9}$$

welche, vollständig entwickelt, eine gewisse Anzahl von Gleichungen liefert, die in Bezug auf die Coefficienten $D_1 \ldots E_1 \ldots$ bilinear sind. Diese Gleichungen sind mit einander verträglich, denn sie werden durch die Coefficienten von φ erfüllt; andererseits sind die $D_1 \ldots E_1 \ldots$ nicht vollständig durch jene Gleichungen bestimmt, wenn φ die Parameter $a_1 \ldots$ enthält. Die allgemeinste Art und Weise, der Bedingung (9) durch den Quotienten φ' zu genügen, besteht nun darin, dass die $D_1 \ldots E_1 \ldots$ gewissen Ausdrücken gleichgesetzt werden, welche in rationaler Weise 1) eine gewisse Anzahl von Parametern $b_1, b_2 \ldots$, 2) eine einzige algebraisch von den Parametern b ab-

hängige Grösse c enthalten. Die Grösse c können wir uns definirt denken als Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$(10) \qquad c^k + c_1 c^{k-1} + \cdots + c_k = 0 ,$$

in welcher die $c_1 \ldots$ die Form $R(b)$ besitzen. Aus dem auf diese Art gewonnenen Integral φ' wird φ erhalten, wenn man für die b gewisse Verbindungen der Parameter a einsetzt. Ferner lässt sich jede an φ' ausführbare Umformung oder Zerlegung auch an φ ausführen, so dass wir uns auf die Untersuchung von φ' beschränken dürfen. Wir denken uns nun φ' auf die Form

$$\varphi' = F_0 + F_1 c + \cdots + F_{k-1} c^{k-1}$$

gebracht, wo die F gleich $R(x, y, s, b)$ sind. Dieser Ausdruck kann wegen der Irreductibilität von (10) nicht anders ein Integral sein, als wenn die $F_0 \ldots$ Integrale sind, d. h. man kann jedes Integral von der Form $R(x, y, s)$, welches die Parameter in nicht rationaler Weise enthält, als ein Aggregat von Integralen der Form $R(x, y, s, b)$ darstellen.[1])

§ 4.

Es sei jetzt φ ein Integral von der Form $R(x, y, s, b)$. Wir greifen einen der Parameter heraus — derselbe werde b genannt — und betrachten φ als Function von b. Wenn φ oder der reciproke Werth von φ die Form $G(b)$ besitzen, so sind offenbar die Coefficienten der einzelnen Potenzen von b in φ oder dem reciproken Ausdrucke Integrale, welche den Parameter b nicht enthalten. Wenn weder φ, noch der reciproke Werth von φ nach b ganz rational sind, so schreiben wir φ in der Form $H:K$, wo H und K die Form $G(b)$ besitzen. Zerlegen wir dann φ in den nach b ganzen Theil φ_1 und in den echtgebrochenen Theil ψ_1, so sind, wie man sofort durch Entwickelung von φ nach fallenden Potenzen von b erkennt, φ_1 und ψ_1 Integrale, und zwar sind auch die Coefficienten der einzelnen Potenzen von b in φ_1 Integrale. Den reciproken Werth von ψ_1, welcher unecht ge-

---

1) Wenn die Differentialgleichungen gewisse Parameter $e_1, e_2 \ldots$, welche nicht in der Gleichung für s vorkommen, in rationaler Weise enthalten, so lässt sich auf ähnliche Weise zeigen, dass Integrale, in denen die e algebraisch vorkommen, sich auf solche von der Form $R(e_1, e_2 \ldots)$ reduciren lassen. Derartige Parameter sind z. B. beim Vielkörperproblem durch die Massen gegeben.

brochen ist, zerlegen wir wieder in den ganzen rationalen Theil φ_2 und in den echt gebrochenen ψ_2, dann sind φ_2 und ψ_2 ebenfalls Integrale. Setzt man dieses Verfahren, welches schliesslich von selbst abbricht, bis an's Ende fort, so gelangt man zu der Kettenbruchdarstellung

$$\varphi = \varphi_1 + 1 : \varphi_2 + 1 : \varphi_3 + \cdots ,$$

wo die φ_a ganze Functionen der b bedeuten, deren Coefficienten Integrale ohne den Parameter b sind. Durch Wiedereinrichtung des Kettenbruches erhält man dann φ als Quotienten zweier ganzen Functionen von b, deren Coefficienten von b freie Integrale der Form $R(x, y, s)$ sind.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erkennt man, dass jedes Integral von der Form $R(x, y, s)$, welches gewisse Parameter $b_1, b_2 \ldots$ in rationaler Weise enthält, allemal aus einer Anzahl parameterfreier Integrale in ganz oder gebrochen linearer Form zusammengesetzt werden kann. Dieser Satz führt in Verbindung mit den über die Differentialgleichungen (3) gemachten Voraussetzungen sofort zu einer für das Folgende wichtigen Consequenz. Es sei k eine beliebige constante Zahl; man ersetze in den Differentialgleichungen die Grössen x, t und entsprechend s, y durch

$$xk^2 , \quad tk^{1-2N} , \quad sk^2 , \quad yk^{1+2N} ,$$

wo N die in § 2 angegebene Bedeutung besitzt, dann hebt sich die Grösse k aus den Differentialgleichungen heraus, und es geht deswegen jedes Integral φ durch diese Substitution wiederum in ein Integral über, welches jedoch jetzt im Allgemeinen den Parameter k enthält. Es sei nun φ ein parameterfreies Integral von der Form $R(x, y, s)$, welches durch die angegebene Substitution in φ' übergehen möge. Wir schreiben φ in der Form »$G(x, y, s)$ dividirt durch $G(x, y, s)$«, dann nimmt jeder Term in Zähler und Nenner nach der Substitution wieder die ursprüngliche Gestalt an, jedoch mit einer bestimmten Potenz von k multiplicirt, deren Exponenten wir als die Dimension des betreffenden Terms bezeichnen. Schreiben wir nun Zähler und Nenner von φ' in der Form

$$L = L_0 k^p + L_1 k^{p-1} + \cdots + L_p ,$$
$$M = M_0 k^q + M_1 k^{q-1} + \cdots + M_q ,$$

so umfassen die Coefficienten L_α, M_α immer nur Terme gleicher Dimension. Diese Coefficienten müssen nun durch Multiplication

mit einem und demselben Factor in Integrale übergehen, und man erkennt leicht, dass man für diesen Multiplicator den reciproken Werth irgend eines der Coefficienten z. B. $1 : L_0$ wählen darf. Wir erhalten dann φ linear zusammengesetzt aus Integralen der Form »$G(x, y, s)$ dividirt durch $G(x, y, s)$«, deren Zähler und Nenner nur Terme von gleicher Dimension enthalten. Solche Integrale sollen »homogen in den Dimensionen« oder, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, schlechtweg homogen heissen.

§ 5.

Es sei jetzt φ ein homogenes Integral von der Form $R(x, y, s)$, welches wir uns in die Gestalt $G(x, y, s) : G(x, y, s)$ gebracht denken. Da ein von den y freier Ausdruck nicht der Bedingung

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

identisch genügen kann, wenn er nicht gleichzeitig von den x frei ist, so muss wenigstens eine der Variabeln y in φ vorkommen. Es sei dies y_1. Wir denken uns Zähler und Nenner von φ nach y in Linearfactoren zerlegt, setzen also an

(11) $$\varphi = Q(y_1 - \eta_1)^\alpha (y_1 - \eta_2)^\beta (y - \eta_3)^\gamma \cdots ,$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen, die η rationale oder algebraische Functionen der Variabeln x, y, s unter Ausschluss von y_1 bedeuten und Q eine rationale Function derselben Variablen ist. Da φ Integral ist, so erhalten wir

$$0 = \frac{d \log \varphi}{dt} = \frac{d \log Q}{dt} + \sum \frac{\alpha}{y_1 - \eta_1} \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{dt}\right).$$

Zur Umformung dieses Ausdruckes wollen wir für den Augenblick die Zeit t, so weit sie in den Variablen x, y, s unter Ausschluss von x_1 und y_1 vorkommt, mit τ bezeichnen, dann ist

$$\frac{d \log Q}{dt} = \frac{\partial \log Q}{\partial x_1} y_1 + \frac{d \log Q}{d\tau},$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} y_1 + \frac{d\eta_1}{d\tau},$$

also

$$0 = \frac{\partial \log Q}{\partial x_1} y_1 + \frac{d \log Q}{d\tau} - \sum \alpha \cdot \frac{d\eta_1}{\partial x_1}$$
$$+ \sum \frac{\alpha}{y_1 - \eta_1} \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{d\tau} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}\right).$$

Da nun y_1 in dieser Gleichung nur insofern vorkommt, als es explicite hingeschrieben ist, so folgt

$$(12) \qquad \frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{d\tau} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = 0 \; .$$

Zur weiteren Verwendung dieser Relation, welche offenbar in Bezug auf η_1 eine partielle Differentialgleichung darstellt, denken wir uns jetzt Zähler und Nenner des betrachteten Integrals φ, statt in Linearfactoren, so weit als möglich in die einfachsten Factoren zerlegt, welche noch die Form $G(y)$ resp. $R(x, s)$ besitzen. Die von einander verschiedenen Theiler, welche die Variablen y wirklich enthalten, mögen mit $\psi_1, \psi_2 \ldots$ bezeichnet werden, so dass wir ansetzen können

$$\varphi = T \psi_1^\lambda . \psi_2^\mu \ldots ,$$

wo die $\lambda, \mu \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten und T die Form $R(x, s)$ besitzt. Die Wurzeln η in (11) werden dann erhalten, wenn man diejenigen ψ, welche y_1 enthalten, gleich Null setzt und nach y_1 auflöst. Es sei $\psi_1(y_1)$ ein solcher Theiler, welcher die in (12) benutzte Wurzel η_1 liefert. Dann erhält man aus der Identität

$$(13) \qquad \psi_1(\eta_1) = 0$$

die Gleichungen

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_\alpha}; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial y_\beta} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y_\beta},$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots m, \; \beta = 2, 3 \ldots m) .$$

Beachtet man nun noch die Differentialgleichungen (3), so geht (12) successive über in

$$A_1 - \sum_\beta y_\beta \frac{\partial \eta_1}{\partial x_\beta} - \sum_\beta A_\beta \frac{\partial \eta_1}{\partial y_\beta} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = 0 \; ,$$
$$(\beta = 2, 3 \ldots m) \; ,$$

$$(14) \quad A_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1} + \sum_\beta y_\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x_\beta} + \sum_\beta A_\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial y_\beta} + \eta_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = 0 \; .$$

Die linke Seite der letzteren Gleichung ist offenbar nichts anderes, als der vollständig entwickelte Ausdruck für

$$\frac{d\psi_1(y_1)}{dt} ,$$

vorausgesetzt, dass für y_1 überall die aus (13) sich ergebende Wurzel η_1 geschrieben wird. Hiernach ist also $\psi_1(y_1)$ eine In-

tegralgleichung, denn die Ableitung von ψ_1 nach t verschwindet nach (14) wenn nicht identisch, so doch sicher in Folge der Gleichung

$$\psi_1 (y_1) = 0 .$$

Derselbe Schluss gilt offenbar für die übrigen Theiler ψ. Angenommen nun man könnte beweisen, dass jeder der Theiler ψ_1 ... durch Multiplication mit einem Factor von der Form $R(x, s)$ in ein Integral φ_1 ... verwandelt werden kann, so würde daraus folgen, dass jedes homogenes Integral φ sich auf die Form

$$\varphi = U \varphi_1^{\lambda} \varphi_2^{\mu} \dots$$

bringen lässt, wo die homogenen Integrale φ_1 ... die Form $G(y)$ resp. $R(x, s)$ besitzen, und der Factor U, welcher höchstens die x, s enthalten kann, sich auf eine Constante reducirt, weil er der Bedingung

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

genügen muss. Ferner würde damit die Aufgabe, alle algebraischen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen zu finden, auf die andere zurückgeführt sein, alle homogenen Integrale der Form $G(y)$ resp. $R(x, s)$ zu ermitteln. Wir werden nun zeigen, dass eine solche Reduction der homogenen Integralgleichungen ψ_1 ..., auf die uns die Untersuchung geführt hat, unter den hier gemachten Voraussetzungen in der That immer möglich ist.

§ 6.

Es sei ψ eine homogene Integralgleichung der Form $G(y)$ resp. $R(x, s)$, welche sich nicht in Theiler von ähnlicher Gestalt, die die y wirklich enthalten, zerlegen lässt. Der vollständig entwickelte Ausdruck für die Ableitung von ψ nach t besitzt eine ähnliche Gestalt wie ψ, nur dass der Grad in Bezug auf die y um eine Einheit höher ist als in ψ. Diese Ableitung muss verschwinden, wenn ψ verschwindet, muss also wegen der vorausgesetzten Irreductibilität von ψ durch ψ selber theilbar sein, so dass wir ansetzen können

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi \cdot \omega ,$$

wo ω in Bezug auf die y ganz linear und ebenso wie ψ in den Dimensionen homogen ist. Schreiben wir

$$\omega = \omega_0 + \sum y_\alpha \, \omega_\alpha \, ,$$

so sind die $\omega_0 \; \omega_1 \ldots$ homogene rationale Functionen von den x, s. Substituirt man ferner für die Variabeln x, t, s, y wie früher

$$xk^2 \, , \quad tk^{1-2N} \, , \quad sk^2 \, , \quad yk^{1+2N} \, ,$$

so ergibt sich, dass die Dimension von ω ungerade ist. Ferner sind die Dimensionen der $\omega_0 \; \omega_1 \ldots$ gerade, die der y ungerade, es muss also in ω das Glied ω_0 fehlen, d. h. ω ist in Bezug auf die y homogen linear. Dieser Umstand ist für die folgende Beweisführung von wesentlicher Bedeutung und bildet den Grund, weshalb wir in den Differentialgleichungen (3) die A als homogene Functionen gerader Ordnung in Bezug auf die x, s vorausgesetzt haben. Es wäre möglich, dass diese Einschränkung bei einem andern Beweisgange sich als unnöthig herausstellt. Ich gehe auf diese Frage nicht näher ein, weil sie für unser eigentliches Ziel, nämlich die Aufsuchung der algebraischen Integrale des Eingangs aufgestellten Vielkörper-Problems, unerheblich ist.

Es werde ψ als Polynom der y geschrieben; sein Grad in Bezug auf diese Variabeln sei p, und es werde angesetzt

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \cdots \, ,$$

wo die ψ_0, $\psi_1 \ldots$ die Terme vom Grade p, $p - 1 \ldots$ zusammenfassen. Mit Rücksicht auf das Vorhergehende ist dann

$$(15) \qquad \sum y_\alpha \frac{\partial \psi_0}{\partial x_\alpha} = \psi_0 \, \omega \, , \quad \omega = \sum y_\alpha \frac{\partial \log \psi_0}{\partial x_\alpha} \, ,$$

so dass es für die Untersuchung von ω lediglich auf das Anfangsglied ψ_0 ankommt. Die Coefficienten ω_α in ω hängen auf einfache Weise mit gewissen Coefficienten in ψ_0 zusammen. Man ordne ψ_0 nach einem der darin vorkommenden y — sagen wir y_1 — und setze an

$$\psi_0 = V_0 \, y_1^r + V_1 \, y_1^{r-1} + \cdots + V_r \, ,$$

wo die V ganze Functionen der übrigen y sind, dann folgt aus (15)

$$(16) \qquad \frac{\partial V_0}{\partial x_1} = V_0 \, \omega_1 \, .$$

Sind a, a' ... die Coefficienten des Polynoms V_0, so ist, da die Relation (16) für beliebige y bestehen muss,

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} = a\,\omega_1\,, \quad \frac{\partial a'}{\partial x_1} = a'\,\omega_1 \text{ etc.};$$

wir können also allgemein ansetzen

$$\omega_\alpha = \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}\,,$$

wo die a_α gewisse Coefficienten in ψ_0 bedeuten.

Als Vorbereitung für das Folgende betrachten wir zunächst den Fall, wo die Coefficienten in ψ_0 sämmtlich von der Irrationalität s frei sind. Es sei χ eine Function der x, y, ganz homogen nach den y, rational homogen nach den x, welche der Bedingung

$$(17)\qquad \begin{gathered} \sum y_\alpha \frac{\partial \chi}{\partial x_\alpha} = \chi \cdot \tau\,, \\ \tau = \sum y_\alpha \frac{\partial \log b_\alpha}{\partial x_\alpha}\,, \end{gathered}$$

genügen, wo die b_α gewisse Coefficienten des nach den y geordneten Ausdruckes χ bedeuten. Man denke sich sämmtliche Coefficienten in χ auf den kleinsten gemeinsamen Nenner M gebracht und den etwa vorhandenen gemeinsamen grössten Theiler L aller Coefficientenzähler aufgesucht, dann ist

$$\chi' = \frac{M}{L}\chi$$

ein Ausdruck von der Form $G(x, y)$, welcher keinen von den y unabhängigen Theiler der Form $G(x)$ besitzt. Ferner wird

$$(18)\qquad \begin{gathered} \sum y_\alpha \frac{\partial \chi'}{\partial x_\alpha} = \chi' \cdot \tau'\,, \\ \tau' = \sum y_\alpha \frac{\partial \log b'_\alpha}{\partial x_\alpha}\,, \end{gathered}$$

wo die b'_α gewisse Coefficienten in χ' bedeuten. Es sei nun Q ein irreductibler Theiler von b'_α, welcher die Variable x_α wirklich enthält, dann tritt in τ' ein Glied der Form

$$\frac{y_\alpha}{Q}\,\frac{\partial Q}{\partial x_\alpha}$$

auf, welches sich, so lange specielle Werthsysteme der y ausgeschlossen bleiben, nicht gegen andere Glieder in τ' fortheben kann. Der Ausdruck τ' wird also sicher unendlich für alle end-

lichen Werthsysteme der x, für welche Q verschwindet. Es müsste also, da für endliche x die linke Seite von (18) sicher endlich bleibt, wider die Voraussetzung, χ' durch Q theilbar sein. Der Coefficient b_α' ist daher von x_α unabhängig, d. h. τ' ist gleich Null und

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \chi'}{\partial x_\alpha} = 0 ,$$

woraus folgt, dass sich χ' als eine ganze rationale Verbindung der Ausdrücke

$$x_2\, y_1 - x_1\, y_2 , \ldots x_m\, y_1 - x_1\, y_m ,$$

ohne x_1 darstellen lässt.

§ 7.

Zu der Relation

$$(15) \qquad \sum y_\alpha \frac{\partial \log \psi_0}{\partial x_\alpha} = \omega = \sum y_\alpha \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

zurückkehrend, wollen wir den Satz beweisen, dass der Ausdruck

$$\sum \omega_\alpha \, d x_\alpha$$

ein totales Differential ist, dass also die sogenannten Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial^2 \log}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} \left(\frac{a_\alpha}{a_\beta}\right) = 0$$

sämmtlich erfüllt sind. Zu dem Ende wollen wir in ψ_0 die Grössen $y_3 \ldots y_m$ gleich Null setzen, jedoch, um Unbestimmtheiten zu vermeiden, folgendermassen vorgehen. Wenn ψ_0 durch eine Potenz von y_m theilbar ist, so unterdrücken wir diesen Theiler, welcher für die Gleichung (15) bedeutungslos ist, und bezeichnen ψ_0 mit ψ_{0m}. Darauf setzen wir y_m gleich Null und bezeichnen den Ausdruck, in welchem ψ_{0m} hierdurch übergeht mit $\psi_{0, m-1}$. Derselbe genügt der Gleichung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \log}{\partial x_\alpha} \psi_{0, m-1} = \sum y_\alpha \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha} ,$$

$$(\alpha = 1, 2 \ldots m - 1) .$$

Hierauf unterdrücken wir in $\psi_{0, m-1}$ die etwa als Theiler auftretende Potenz von y_{m-1} und setzen y_{m-1} gleich Null, wo-

durch wir zu dem Ausdrucke $\psi_{0, m-2}$ gelangen, u. s. w. Gelangt man auf diese Weise, bevor auch y_3 gleich Null gesetzt wird, für $\varphi_{0,k}$ zu einem Monom von der Form

$$C\, y_1^{\alpha}\, y_2^{\beta} \ldots y_k^{\lambda} ,$$

so kann offenbar in ω für die Coefficienten $a_1\, a_2 \ldots a_k$ der eine Coefficient C gesetzt werden, und es sind die zu den aus $x_1 \ldots x_k$ gebildeten Variablenpaaren gehörigen Integrabilitätsbedingungen von selbst erfüllt. Wir haben deshalb nur noch den ungünstigsten Fall zu verfolgen, dass man nämlich, nachdem auch y_3 beseitigt ist, mit Unterdrückung der einflusslosen Potenztheiler zu einem ψ_{02} von der Form

$$\psi_{02} = c_0\, y_1^q + c_1\, y_1^{q-1}\, y_2 + \ldots + c_q\, y_2^q$$

gelangt, in welchem q mindestens gleich Eins und die Endcoefficienten c_0 und c_q von Null verschieden sind. Dieses ψ_{02} genügt der Bedingung

$$\sum_{\alpha} y_\alpha \frac{\partial \log \psi_{02}}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha} y_\alpha\, \omega_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2) ,$$

wo in

$$\omega_\alpha = \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

für die Coefficienten $a_1\, a_2$ offenbar c_0 und c_q zu nehmen sind. Die gefundenen Relationen formen wir um in

$$\psi' = \psi_{02} : c_0 = y_1^q + \frac{c_1}{c_0}\, y_1^{q-1}\, y_2 + \cdots + \frac{c_q}{c_0}\, y_2^q ,$$

(19)
$$\sum_1^2 y_\alpha \frac{\partial \log \psi'}{\partial x_\alpha} = y_2 \frac{\partial \log}{\partial x_2} \left(\frac{c_q}{c_0}\right) .$$

Die Coefficienten von ψ' können nun die Irrationalität s enthalten. Ist dies der Fall, so gilt die Gleichung (19) für alle Wurzelwerthe $s_1\, s_2 \ldots s_n$, welche s annehmen kann. Summiren wir die den einzelnen Wurzeln entsprechenden Gleichungen (19) und setzen

$$\psi'(s_1) \cdot \psi'(s_2) \cdots \psi'(s_n) = \Psi ,$$

$$\frac{c_q(s_1)}{c_0(s_1)} \cdot \frac{c_q(s_2)}{c_0(s_2)} \cdots \frac{c_q(s_n)}{c_0(s_n)} = C ,$$

so sind Ψ und C homogen rational nach den x; ferner ist

$$\sum_1^2 y_\alpha \frac{\partial \log \Psi}{\partial x_\alpha} = y_\alpha \frac{\partial \log C}{\partial x_2}.$$

Der Ausdruck Ψ ist also eine Function von derselben Beschaffenheit, wie die vorhin mit χ bezeichnete. Bedeutet H den kleinsten gemeinsamen Nenner der Coefficienten in Ψ, so ist $H\Psi$ eine Function der Form $G(x, y)$, welche keinen von den y unabhängigen Theiler der Form $G(x)$ besitzt und der Bedingung

$$y_1 \frac{\partial (H\Psi)}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial (H\Psi)}{\partial x_2} = 0$$

genügt. Es ist also, abgesehen von einem constanten Coefficienten

$$H\Psi = (y_1 x_2 - y_2 x_1)^{nq},$$

$$\Psi = \left(y_1 - y_2 \frac{x_1}{x_2}\right)^{nq}.$$

Hieraus folgt sofort

$$\psi' = \left(y_1 - y_2 \frac{x_1}{x_2}\right)^q,$$

$$\frac{c_q}{c_0} = \frac{a_2}{a_1} = \pm \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^q,$$

$$\frac{\partial^2 \log}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = 0.$$

Damit sind offenbar die Integrabilitätsbedingungen allgemein bewiesen, und wir haben ferner für das ursprüngliche ψ_0 die Relation

$$\sum_1^m y_\alpha \frac{\partial \log}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\psi_0}{a_1}\right) = -\sum_2^m y_\alpha \frac{q_\alpha}{x_\alpha},$$

wo die q_α ganze positive Zahlen, die Null eingeschlossen bedeuten. Ferner erkennt man hieraus, dass

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi}{a_1} y_2^{q_2} \cdots y_m^{q_m}\right) = 0$$

ist, dass also die Integralgleichung ψ durch den Multiplicator

$$\left(y_2^{q_2} \cdots y_m^{q_m}\right) : a_1$$

in ein Integral verwandelt wird. W. z. b. w.

Es sei jetzt φ das zu ψ gehörige Integral. Wir spalten dasselbe ähnlich wie ψ, setzen also an

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots ,$$

wo φ_0 sich von ψ_0 durch den integrirenden Multiplicator unterscheidet und der Bedingung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\alpha} = 0$$

genügt. Wir wollen nun zeigen, dass φ_0 sich als eine ganze rationale Function der $m - 1$ Verbindungen

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 , \quad x_3 y_1 - x_1 y_3 , \ldots x_m y_1 - x_1 y_m$$

ohne x_1 darstellen lässt. Zur Vereinfachung des Beweises schicken wir folgende Bemerkung vorauf.

§ 8.

Angenommen man hätte in dem ursprünglichen System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = y_\alpha , \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = A_\alpha (x_1 \cdots)$$

statt der Variabeln x, y andere Variable ξ, η durch die lineare Substitution

$$x_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} \xi_\beta , \quad y_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} \eta_\beta$$

eingeführt, in der die c feste Zahlen mit nicht verschwindender Determinante bedeuten, so würde dadurch an den über die Differentialgleichungen und die Irrationalität s gemachten Voraussetzungen nichts geändert worden sein; es würde also auch die ganze bisherige Untersuchung ohne Weiteres für das transformirte System gültig bleiben. Insbesondere würde der Satz, dass die hier untersuchten Integralgleichungen durch einen Multiplicator von der Form $R(x, s)$ in Integrale übergehen,, wenn er vor der Transformation gilt, auch nach derselben gelten und umgekehrt. Diese Bemerkung benutzen wir in folgender Weise. Die Discriminante Δ der Gleichung für s ist eine homogene ganze rationale Function der x vom Grade

$$n(n - 1) = \mu .$$

Die Discriminante Δ' der transformirten Gleichung für s geht aus Δ hervor, wenn man statt der x die ξ einführt. Bei passender Wahl der Substitutionscoefficienten c lässt sich nun stets erreichen, dass in Δ' die Glieder mit

$$\xi_1^\mu,\ \xi_2^\mu \dots \xi_m^\mu$$

wirklich vorkommen. Es ist deshalb keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass bereits in der ursprünglichen Discriminante Δ die Glieder mit

$$x_1^\mu,\ x_2^\mu \dots x_m^\mu$$

wirklich vorkommen, da diese Eigenschaft, wenn sie ursprünglich nicht vorhanden ist, durch eine vor Beginn der ganzen Untersuchung vorgenommene Transformation stets herbeigeführt werden kann.

Wir denken uns nun in der Gleichung für s den Variablen $x_2 \dots x_m$ irgend welche endliche Werthe, dem x_1 dagegen einen ausserordentlich grossen Werth beigelegt, dann lässt sich jede Wurzel s nach fallenden Potenzen von x_1 in eine Reihe entwickeln, welche unter den gemachten Voraussetzungen die Form

$$s = \sigma x_1 + \sigma_0 + \frac{\sigma_1}{x_1} + \frac{\sigma_2}{x^2} + \dots$$

besitzt. Hierin ist σ die Wurzel einer Gleichung

$$\sigma^n + \Sigma_1 \sigma^{n-1} + \dots + \Sigma_n = 0\ ,$$

welche keine mehrfachen Wurzeln besitzt und deren Coefficienten nur von den in der ursprünglichen Gleichung für s auftretenden Constanten, aber nicht von den x abhängen. Die übrigen Coefficienten σ_0, σ_1 ... besitzen die Gestalt $R(\sigma)$ resp. $G(x_2 \dots x_m)$.

Führt man jetzt statt der Variablen x neue Variable p durch die lineare Substitution

$$p_1 = x_1,\ p_2 = x_2 - x_1 \frac{y_2}{y_1},\ \dots p_m = x_m - x_1 \frac{y_m}{y_1}$$

ein, so erhält man das Glied mit p_1^μ in der Discriminante, wenn man an Stelle der $x_1 \dots x_m$ resp.

$$p_1\ ,\quad p_1 \frac{y_2}{y_1} \dots p_1 \frac{y_m}{y_1}$$

schreibt. Der Coefficient von p_1^μ in der Discriminante wird also, so lange specielle Werthsysteme der y ausgeschlossen werden, von Null verschieden sein. Infolge dessen lässt sich für

grosse Werthe von p_1 und endliche Werthe der $p_2 \ldots p_m$ die Irrationalität s nach fallenden Potenzen von p_1 in die Reihe

$$s = \varrho p_1 + \varrho_0 + \frac{\varrho_1}{p_1} + \frac{\varrho_2}{p_1^2} + \cdots$$

entwickeln, wo ϱ eine von den p unabhängige Irrationalität, $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$ dagegen ganze rationale Functionen der $\varrho, p_2 \ldots p_m$ bedeuten.

Dies vorausgeschickt betrachten wir wieder den Anfangsterm φ_0 in dem Integral φ. Derselbe stellt sich, wenn er die Irrationalität s wirklich enthält, zunächst dar in der Form

$$R(p_1\, p_2 \ldots p_m, s) ,$$

muss aber in Wirklichkeit von p_1 frei sein. Entwickelt man nun s und darauf φ_0 nach fallenden Potenzen von p_1, so muss diese Reihe sich auf den einen von p_1 freien Term reduciren, welcher nach den vorausgehenden Bemerkungen die Variablen $p_2 \ldots p_m$ nur in rationaler Weise enthält, d. h. φ_0 enthält auch die x nur in rationaler Weise und ist in Wirklichkeit frei von s. Hieraus folgt weiter, wenn man die in § 6 über die Ausdrücke χ und χ' gemachten Bemerkungen beachtet, dass φ_0 eine ganze Function der x ist.

§ 9.

Fassen wir die Resultate, zu denen wir bisher gelangt sind, zusammen, so können wir folgende Sätze aussprechen.

Gegeben ist das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = y_\alpha, \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = A_\alpha , \quad (\alpha = 1, 2 \cdots m) ,$$

in welchem die A als homogene rationale Functionen von der geraden Ordnung $2N$ aus den x und einer gewissen Irrationalität s zusammengesetzt sind. Die Grösse s ist Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$s^n + S_1 s^{n-1} + \cdots + S_n = 0 ,$$

deren linke Seite eine ganze homogene Function der s, x von der n-ten Ordnung bildet. Wenn das vorgelegte System von Differentialgleichungen algebraische, von t freie Integrale besitzt, so lassen sich dieselben allemal darstellen als algebraische

Functionen eines oder mehrerer Integrale φ, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1) Jedes φ ist eine ganze rationale Function der y, eine rationale Function der x und s.

2) φ ist in den Dimensionen homogen, d. h. wenn man für die x, s, y resp. setzt

$$xk^2 \;, \quad sk^2 \;, \quad yk^{1+2N} \;, \quad (k = \text{constans}) \;,$$

so nimmt φ wieder die ursprüngliche Gestalt an, jedoch versehen mit einer gewissen Potenz von k als Factor.

3) Bedeutet φ_0 das Aggregat der Glieder in φ, welche in Bezug auf die y von der höchsten Ordnung sind, so sind, wenn φ_0 nach den y geordnet wird, die Coefficienten ganze rationale Functionen der x ohne gemeinsamen Theiler.

4) Der Ausdruck φ_0 genügt der Bedingung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\alpha} = 0 \;,$$

enthält also die x nur in den Verbindungen

$$y_1 x_\alpha - y_\alpha x_1 \;, \quad (\alpha = 2, 3 \ldots m) \;.$$

Nachdem wir bis zu diesem Punkte gelangt sind, brechen wir die allgemeine Untersuchung ab und wenden uns wieder zu dem Vielkörper-Problem zurück, welches ja den Ausgangspunkt bildete, und welches, wie bereits bemerkt, einen speciellen Fall der hier betrachteten Differentialgleichungen repräsentirt.

§ 10.

Es seien

$$m_\alpha \,, \quad x_\alpha \,, \quad y_\alpha \,, \quad z_\alpha \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n)$$

die Massen und die Coordinaten der einzelnen materiellen Punkte in dem betrachteten Vielkörper-Problem,

$$X_\alpha \,, \; Y_\alpha \,, \; Z_\alpha$$

die Geschwindigkeitscomponenten, $r_{\alpha\beta}$ die Distanz der beiden Massen m_α, m_β, dann haben wir

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha \,, \quad \frac{dX_\alpha}{dt} = A_\alpha = \sum_\beta m_\beta \frac{x_\beta - x_\alpha}{r^3_{\alpha\beta}} \,,$$

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = Y_\alpha \,, \quad \frac{dY_\alpha}{dt} = B_\alpha = \sum_\beta m_\beta \frac{y_\beta - y_\alpha}{r^3_{\alpha\beta}} \,,$$

$$\frac{dz_\alpha}{dt} = Z_\alpha \,, \quad \frac{dZ_\alpha}{dt} = C_\alpha = \sum_\beta m_\beta \frac{z_\beta - z_\alpha}{r^3_{\upsilon\beta}} \,,$$

wo bei den Summationen, ebenso wie weiterhin, zu beachten ist, dass Glieder mit $r_{\alpha\alpha}$ nicht vorkommen dürfen. Es sei φ ein homogenes Integral von der Form

$$G(XYZ) \text{ resp. } R(xyzr) ,$$

welches in Bezug auf die X, Y, Z vom Grade p ist; ferner setze man

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots ,$$

wo die φ_0, φ_1 ... die Aggregate der Glieder bedeuten, welche in den X, Y, Z von den Ordnungen p, $p-1$ ... sind; endlich bezeichne man die Zeit t, je nachdem sie in den Coordinaten oder in den Geschwindigkeiten vorkommt, mit u resp. v, führe also die Operationssymbole

$$\frac{\partial}{\partial u} = \sum_\alpha \left(X_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + Y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + Z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right) ,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \sum_\alpha \left(A_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha} + B_\alpha \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} + C_\alpha \frac{\partial}{\partial Z_\alpha}\right)$$

ein, dann muss sein

(22) $$\frac{\partial \varphi_0}{\partial u} = 0 , \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = 0 .$$

Diese beiden Bedingungen werden sich als für unseren Zweck ausreichend erweisen. Die erste Bedingung besagt, dass φ_0 die x, y, z nur ganz rational in den Verbindungen

$$f_\alpha = x_\alpha X_1 - x_1 X_\alpha , \quad g_\alpha = y_\alpha X_1 - x_1 Y_\alpha , \quad h_\alpha = z_\alpha X_1 - x_1 Z_\alpha$$

enthält, d. h. wenn man statt der x, y, z in φ_0 die Ausdrücke

$$x_\alpha = \frac{f_\alpha}{X_1} + x_1 \frac{X_\alpha}{X_1} , \quad y_\alpha = \frac{g_\alpha}{X_1} + x_1 \frac{Y_\alpha}{X_1} , \quad z_\alpha = \frac{h_\alpha}{X_1} + x_1 \frac{Z_\alpha}{X_1}$$

einsetzt, so verwandelt sich φ_0 in eine Function der Grössen

$$f_2 \ldots f_n , \quad g_1 \ldots g_n , \quad h_1 \ldots h_n ,$$

welche von x_1 frei ist, und abgesehen davon, dass eine Potenz von X_1 als Nenner vorkommen kann, die X, Y, Z nur ganz rational enthält. Im Folgenden werden wir voraussetzen, dass φ_0 bereits durch die f, g, h ausgedrückt sei.

Bilden wir jetzt die Ableitung von φ_0 nach v, so enthalten die einzelnen Glieder im Nenner die dritte Potenz eines $r_{\alpha\beta}$, sind aber im übrigen rational aus den verschiedenen Variabeln

zusammengesetzt. Bilden wir ferner die verschiedenen Irrationalitäten, welche einschliesslich der $r_{\alpha\beta}$ selber dadurch entstehen, dass man je zwei, je drei u. s. w. verschiedene $r_{\alpha\beta}$ mit einander multiplicirt, und bezeichnet man diese Irrationalitäten in irgend einer Reihenfolge mit $\varrho_1\ \varrho_2 \ldots$, so lässt sich φ_2 stets auf die Gestalt

$$\varphi_2 = \varphi_{20} + \sum \frac{\varphi_{2\alpha}}{\varrho_\alpha}$$

bringen, wo die φ_{20}, $\varphi_{21} \ldots$ rational aus den x, y, z, X, Y, Z zusammengesetzt sind. Mit Rücksicht auf (22) folgt daraus, dass

$$\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial u} = 0$$

ist, und dass ferner der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_{2\alpha}}{\varrho_\alpha}\right)$$

allemal verschwindet, wenn die Irrationalität ϱ sich nicht auf ein einziges $r_{\alpha\beta}$ reducirt. Führt man ferner in φ_2 statt der x, y, z die f, g, h ein, wobei möglicherweise x_1 sich nicht aus φ_2 fortheben wird, so geht die partielle Ableitung von φ_2 nach u über in

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} X_1 \,.$$

Ersetzt man ebenso in der Ableitung von φ_0 nach v die ursprünglichen Variablen durch die f, g, h, X, Y, Z und x_1, und integrirt nach x_1, indem alle übrigen Grössen als constant angesehen werden, so darf die Integration keine logarithmischen, sondern nur algebraische Glieder liefern. Dieser Umstand wird uns gestatten, die Verbindungen der f, g, h, aus welchen sich φ_0 zusammensetzt, vollständig zu bestimmen.

§ 11.

Zur Abkürzung der Ausdrucksweise wollen wir festsetzen, dass die Indices α, $\beta \ldots$ die Werthe 1, 2 ... n, dagegen die Indices λ, $\mu \ldots$ nur die Werthe 2, 3 ... n annehmen sollen. Wir suchen nun diejenigen Glieder in der Ableitung von φ_0 nach v

auf, welche die dritte Potenz von $r_{1\lambda}$ resp. $r_{\lambda\mu}$ im Nenner enthalten. Die Ableitung von φ_0 besitzt zunächst die Gestalt

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial g_1}(y_1A_1 - x_1B_1) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_1}(z_1A_1 - x_1C_1)$$
$$+\sum_\lambda\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda}(x_\lambda A_1 - x_1A_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial g_\lambda}(y_\lambda A_1 - x_1B_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_\lambda}(z_\lambda A_1 - x_1C_\lambda)\right\}$$
$$+\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_1}A_1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Y_1}B_1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Z_1}C_1$$
$$+\sum_\lambda\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda}A_\lambda + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Y_\lambda}B_\lambda + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Z_\lambda}C_\lambda\right\}.$$

Die Glieder, welche $r_{1\lambda}^3$ im Nenner enthalten, werden, mit Fortlassung des Nenners, und wenn wir der Kürze halber das Zeichen S einführen, um eine Summation über die drei Coordinatenaxen anzudeuten,

$$m_\lambda\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial g_1}(y_1x_\lambda - x_1y_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_1}(z_1x_\lambda - x_1z_\lambda)\right\}$$
$$+ m_\lambda(x_\lambda - x_1)\sum_\mu\left(S\left(x_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\mu}\right)\right)$$
$$+ m_1x_1\,S(x_\lambda - x_1)\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda} + S(x_\lambda - x_1)\left(m_\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_1} - m_1\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda}\right).$$

Aehnlich werden die zu $r_{\lambda\mu}$ gehörigen Terme

$$- x_1\,S(x_\mu - x_\lambda)\left(m_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda} - m_\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\mu}\right)$$
$$+ S(x_\mu - x_\lambda)\left(m_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda} - m_\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\mu}\right).$$

Führt man hierin auch für die ausserhalb φ_0 vorkommenden x, y, z die Grössen x_1, f, g, h ein, so müssen die Terme, welche das Quadrat von x_1 enthalten, verschwinden, weil sonst die oben erwähnte Integration nach x_1 auf logarithmische Glieder führen würde. Es muss also sein

$$0 = m_\lambda\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial g_1}(Y_1X_\lambda - X_1Y_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_1}(Z_1X_\lambda - X_1Z_\lambda)\right\}$$
$$+ m_\lambda(X_\lambda - X_1)\sum_\mu\left(S\left(X_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\mu}\right)\right) + m_1X_1\,S\left((X_\lambda - X_1)\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda}\right),$$
$$0 = S\left((X_\mu - X_\lambda)\left(m_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda} - m_\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\mu}\right)\right).$$

Die vorstehenden Bedingungen, in welchen die Indices λ, μ alle zulässigen Werthe anzunehmen haben, können wir jetzt als lineare partielle Differentialgleichungen mit den unabhängigen Variablen f, g, h und mit der abhängigen Variablen φ_0 ansehen. Die Coefficienten sind von den f, g, h unabhängig und deshalb bei der Aufsuchung der allgemeinen Lösung als Constanten anzusehen. Um die allgemeine Lösung aufzustellen, genügt im vorliegenden Falle die Kenntniss einer gewissen Anzahl von Particularlösungen, welche die f, g, h homogen linear enthalten. Fünf solcher Lösungen werden durch die bekannten Integrale des Vielkörper-Problems geliefert; es wird sich zeigen, dass damit die gemeinsamen Lösungen des oben angesetzten Systems erschöpft sind.

Es werde gesetzt

$$\Sigma\, m_\alpha x_\alpha = L, \quad \Sigma\, m_\alpha y_\alpha = M, \quad \Sigma\, m_\alpha z_\alpha = N,$$
$$\Sigma\, m_\alpha X_\alpha = L', \quad \Sigma\, m_\alpha Y_\alpha = M', \quad \Sigma\, m_\alpha Z_\alpha = N',$$

dann erhalten wir, wenn die Buchstaben a, b, c ganz willkürliche Grössen bedeuten, zunächst drei Particularlösungen A', B', C' durch die eine zusammenfassende Gleichung

$$aA' + bB' + cC' = \begin{vmatrix} a & L & L' \\ b & M & M' \\ c & N & N' \end{vmatrix}.$$

Diese drei Lösungen sind jedoch nicht unabhängig von einander, weil zwischen ihnen die Relation

$$L'A' + M'B' + N'C' = 0$$

besteht. Drei weitere Lösungen A, B, C erhalten wir in ähnlicher Weise durch die zusammenfassende Gleichung

$$a'A + b'B + c'C = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} a' & x_\alpha & X_\alpha \\ b' & y_\alpha & Y_\alpha \\ c' & z_\alpha & Z_\alpha \end{vmatrix},$$

wo die a' b' c' ebenfalls willkürliche Zahlen bedeuten. Dass in der That die A, A' ... Lösungen sind, lässt sich auch ohne Rechnung durch folgende Ueberlegung nachweisen. Die A, A' ... sind nämlich nichts anderes als die Flächenintegrale und drei aus den Schwerpunktsätzen zusammengesetzte Integrale, und zwar homogene Integrale von der hier untersuchten Beschaffenheit, bei denen überdies das φ sich auf den Anfangsterm φ_0

reducirt. Es müssen also die hier für φ_0 aufgestellten Bedingungen von selbst erfüllt sein.

Drückt man jetzt die A, A' ... durch die f, g, h aus, so erhält man zunächst

$$X_1\,(a A' + b B' + c C') = \begin{vmatrix} a, & 0 & +\sum\limits_\lambda m_\lambda f_\lambda, & L' \\ b, & m_1 g_1 & +\sum\limits_\lambda m_\lambda g_\lambda, & M' \\ c, & m_1 h_1 & +\sum\limits_\lambda m_\lambda h_\lambda, & N' \end{vmatrix},$$

$$X_1\,(a' A + b' B + c' C) = m_1 \begin{vmatrix} a' & 0 & X_1 \\ b' & g_1 & Y_1 \\ c' & h_1 & Z_1 \end{vmatrix} + \sum_\lambda m_\lambda \begin{vmatrix} a' & f_\lambda & X_\lambda \\ b' & g_\lambda & Y_\lambda \\ c' & h_\lambda & Z_\lambda \end{vmatrix}.$$

Wir untersuchen nun, ob aus diesen Gleichungen sich die Grössen

$$g_1,\; h_1,\; f_2,\; g_2,\; h_2$$

durch die A, A' ... und die übrigen f, g, h ausdrücken lassen. Nun sind in den Ausdrücken für

$$X_1 B',\; X_1 C',\; X_1 A,\; X_1 B,\; X_1 C$$

die Coefficienten der fünf Grössen

$$m_1 g_1,\; m_1 h_1,\; m_2 f_2,\; m_2 g_2,\; m_2 h_2$$

durch nachstehende Zeilen gegeben

$$\begin{array}{ccccc} 0, & +L', & -N', & 0, & +L', \\ -L', & 0, & +M', & -L', & 0, \\ +Z_1, & -Y_1, & 0, & +Z_2, & -Y_2, \\ 0, & +X_1, & -Z_2, & 0, & +X_2, \\ -X_1, & 0, & +Y_2, & -X_2, & 0, \end{array}$$

und es kommt jetzt darauf an, zu zeigen, dass die aus diesen Zeilen gebildete Determinante nicht identisch verschwindet. Berechnet man dieselbe, so erhält man

$$L'(X_2 - X_1) \begin{vmatrix} X_2 & L' & X_1 \\ Y_2 & M' & Y_1 \\ Z_2 & N' & Z_1 \end{vmatrix};$$

die Grössen g_1 ... h_2 lassen sich also in der That durch die A ... und die übrigen f, g, h ausdrücken. Infolge dessen dürfen wir bei der Aufsuchung etwaiger weiterer Particularlösungen voraussetzen, dass dieselben von den g_1 ... h_2 unabhängig sind.

§ 12.

Die noch aufzusuchenden Particularlösungen bezeichnen wir mit χ und setzen fest, dass die Indices $\sigma, \tau \ldots$ nur die Werthe 3, 4 ... n annehmen sollen. Die gesuchten Lösungen müssen den Differentialgleichungen genügen, welche aus denen für φ_0 dadurch entstehen, dass man für φ_0 die Grösse χ schreibt, ferner die Ableitungen von χ nach den $g_1 \ldots h_2$ gleich Null setzt und die Fälle $\lambda, \mu = 2$ von den Fällen $\lambda, \mu = \sigma$ trennt. Auf diese Weise erhält man zunächst das System

$$(23) \quad 0 = \sum_\sigma \left(S \left(X_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma} \right) \right),$$

$$(24) \quad 0 = m_\tau (X_\tau - X_1) \sum_\sigma \left(S \left(X_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma} \right) \right) + m_1 X_1 S \left((X_\tau - X_1) \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} \right),$$

$$(25) \quad 0 = S \left((X_\tau - X_2) \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} \right),$$

$$(26) \quad 0 = S \left((X_\sigma - X_\tau) \left(m_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} - m_\tau \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma} \right) \right).$$

Aus (23) und (24) folgt

$$(27) \quad 0 = S \left((X_\tau - X_1) \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} \right)$$

und hieraus in Verbindung mit (25) die zusammenfassende Gleichung

$$(28) \quad a \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} + b \frac{\partial \chi}{\partial g_\tau} + c \frac{\partial \chi}{\partial h_\tau} = k_\tau \begin{vmatrix} a & X_1 - X_\tau & X_2 - X_\tau \\ b & Y_1 - Y_\tau & Y_2 - Y_\tau \\ c & Z_1 - Z_\tau & Z_2 - Z_\tau \end{vmatrix},$$

in welcher k_τ einen vorläufig unbestimmten Proportionalitätsfactor bedeutet. Bezeichnen wir den Werth, welchen die Determinante in (28) für

$$a = X_\sigma - X_\tau, \quad b = Y_\sigma - Y_\tau, \quad c = Z_\sigma - Z_\tau$$

annimmt, mit D, so erhält man mit einer kleinen Umformung

$$D = | X_\sigma - X_\tau \; X_1 \; X_2 | + | X_\sigma \; X_\tau \; X_1 - X_2 |,$$

wo von den Determinanten nur die erste Zeile angesetzt ist. Durch Vertauschung der Indices σ und τ ändert also D nur sein

Vorzeichen. Infolge dessen erhalten wir aus (28) die beiden Gleichungen

$$\mathbf{S}\left((X_\sigma - X_\tau)\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right) = k_\tau \,.\, D\,,$$

$$\mathbf{S}\left((X_\sigma - X_\tau)\frac{\partial\chi}{\partial f_\sigma}\right) = k_\sigma \,.\, D\,,$$

also mit Berücksichtigung von (26)

$$(m_\sigma k_\tau - m_\tau k_\sigma) D = 0\;,$$

d. h. es ist

$$k_\sigma = l m_\sigma\;,$$

wo l einen von dem Index σ unabhängigen Factor bedeutet. Hiermit liefert die Gleichung (28) weiter

$$\mathbf{S}\left(X_\tau \frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right) = l m_\tau \,|\, X_\tau\, X_1 X_2 \,|\,,$$

woraus, wenn man nach τ summirt, mit Rücksicht auf (23)

$$0 = l \,|\, \Sigma\, m_\tau X_\tau,\ X_1,\ X_2 \,|$$

folgt. Es verschwinden also l, die k und infolge dessen auch die sämmtlichen Ableitungen von χ, d. h. es existiren ausser den bereits angegebenen fünf Particularlösungen keine weiteren, und es enthält φ_0 die Variablen x, y, z nur in den Verbindungen

$$A\,,\ B\,,\ C\,,\ A'\,,\ B'\,,\ C'\,.$$

Eliminirt man also z. B. y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 mittelst der Ausdrücke A, A' ... aus φ_0, so fallen alle übrigen x, y, z von selbst heraus. Bei dieser Elimination nimmt φ_0 die Form $G(A, A' \ldots)$ an, dagegen kann φ_0 aufhören eine ganze Function der X, Y, Z zu sein. Wir wollen nun zeigen, dass sich φ_0 immer auf die Form

$$G(A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C',\ X,\ Y,\ Z)$$

bringen lässt.

§ 13.

Da bei der Elimination von $y_1 \ldots z_2$ aus φ_0 die übrigen x, y, z von selbst fortfallen, so kann man die Elimination in der Weise bewirken, dass man sowohl in φ_0 als auch in B', C', A, B, C die schliesslich fortfallenden Variablen von vornherein gleich Null setzt, die $y_1 \ldots z_2$ durch die B' ... ausdrückt und die so gewonnenen Ausdrücke in das vereinfachte φ_0 substituirt. Nun sind die Grössen

$$m_1 y_1\;,\quad m_1 z_1\;,\quad m_2 x_2\;,\quad m_2 y_2\;,\quad m_2 z_2$$

in B', C', A, B, C mit Coefficienten verbunden, die durch nachstehende Zeilen gegeben sind

$$\begin{array}{cccccc} 0\,, & +L'\,, & -N'\,, & 0\,, & +L'\,, \\ -L'\,, & 0\,, & +M'\,, & -L'\,, & 0\,, \\ +Z_1\,, & -Y_1\,, & 0\,, & +Z_2\,, & -Y_2\,, \\ 0\,, & +X_1\,, & -Z_2\,, & 0\,, & +X_2\,, \\ -X_1\,, & 0\,; & +Y_2\,, & -X_2\,, & 0\,, \end{array}$$

welche, wie wir bereits früher gesehen haben, zu der Determinante

$$E = L'(X_2 - X_1)\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & L' \\ Y_1 & Y_2 & M' \\ Z_1 & Z_2 & N' \end{vmatrix}$$

führen. Der umgeformte durch die B', C', A, B, C dargestellte Ausdruck von φ_0 könnte also eine Potenz von E im Nenner haben, oder die Gestalt

$$G(B', C', A, B, C, X, Y, Z) : E^q$$

besitzen. Diese Form ist nun von der Art und Weise, wie die Elimination im Einzelnen ausgeführt wird, unabhängig. Hätte man die Elimination mittelst der Variablen

$$y_1\,,\ z_1\,,\ x_3\,,\ y_3\,,\ z_3$$

bewirkt, so würde man im Nenner von φ_0 statt des vorstehenden E ein anderes

$$E' = L'(X_3 - X_1)\,|\,X_1\,X_3\,L'\,|$$

erhalten haben. Nun haben E und E' nur den Theiler L' gemeinsam, woraus wir schliessen, dass die übrigen Theiler von E oder E' in dem Ausdrucke von φ_0 sich gegen entsprechende Theiler des Zählers fortheben, so dass nur eine Potenz von L' im Nenner von φ_0 verbleiben kann.

Hätte man statt der Variablen $y_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2$ die Variablen $x_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2$ und statt B', C' die Ausdrücke C', A' bei der Elimination benutzt, so würde man für φ_0 einen Ausdruck von der Form

$$G(C', A', A, B, C, X, Y, Z) : M'^r$$

statt des früheren

$$G(B', C', A, B, C, X, Y, Z) : L'^q$$

erhalten haben. Auf analoge Art könnte man noch zu einer dritten Darstellung

$$\varphi_0 = G(A', B', A, B, C, X, Y, Z) : N'^s$$

gelangen. Um nun zu zeigen, dass diese Nenner immer durch passende Umformung von φ_0 beseitigt werden können, haben wir nur den Fall in's Auge zu fassen, wo keine der drei Zahlen q, r, s gleich Null ist.

Zunächst schicken wir die Bemerkung voraus, dass abgesehen von der Relation

$$(29) \qquad A'L' + B'M' + C'N' = 0$$

die A, A' ... von einander unabhängig sind, d. h. es existirt zwischen den A, A'... keine weitere Relation

$$0 = PA + QB + CR + P'A' + Q'B' + R'C' ,$$

in welcher die Coefficienten P, P' ... von den x, y, z unabhängig sind. Infolge dessen darf man in φ_0 die Variablen

$$A \ldots A' \ldots X_1 \ldots Y_1 \ldots Z_1 \ldots$$

als Grössen ansehen, welche, abgesehen von der einen Einschränkung (29), völlig willkürlich gewählt werden können. Es sei nun auf irgend eine Art für φ_0 die Darstellung

$$\varphi_0 = H(A', B', C', A, B, C, L', M', N', X_2, Y_2, Z_2, \ldots X_n, Y_n, Z_n) : L'^m$$

gefunden worden, wo in φ_0 die X_1, Y_1, Z_1 durch die L', M', N' und die übrigen X, Y, Z ausgedrückt zu denken sind, dann kann, so lange die x, y, z, X, Y, Z, endliche Werthe besitzen, φ_0 nicht unendlich werden. Ordnen wir nun φ_0 nach fallenden Potenzen von L', setzen also an

$$\varphi_0 = \frac{H_0}{L'^m} + \frac{H_1}{L'^{m-1}} + \ldots ,$$

wo die H_0 ... ganze Functionen der vorkommenden Grössen bedeuten, so muss, sobald L' verschwindet, sobald also

$$B'M' + C'N' = 0$$

ist, der Ausdruck H_0 verschwinden, wie auch die Werthe der übrigen darin vorkommenden Grössen beschaffen sein mögen. Es muss also H_0 durch

$$B'M' + C'N'$$

theilbar sein, d. h. man hat identisch

$$H_0 = (B'M' + C'N') H_{01} ,$$

wo H_{01} wiederum eine ganze Function der darin vorkommenden Grössen ist. Infolge dessen wird

$$\varphi_0 = \frac{H_1 - A'H_{01}}{L'^{m-1}} + \frac{H_2}{L'^{m-2}} + \ldots .$$

Wendet man auf diese Darstellung dieselbe Schlussweise an, u. s. w., so gelangt man schliesslich dahin, den Nenner von φ_0 ganz zu beseitigen, d. h. φ_0 ist immer als eine ganze Function der Grössen

$$A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C',\ X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ \ldots\ X_n,\ Y_n,\ Z_n$$

darstellbar.

§ 14.

Um nun die Verbindungen der X, Y, Z zu ermitteln, welche in φ_0 vorkommen, bilden wir in

$$0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}$$

zunächst das erste Glied rechts. Dasselbe hat die Gestalt

$$\sum \Phi_{\alpha\beta} : r_{\alpha\beta}^3\,,$$

wo

$$(30)\qquad \Phi_{\alpha\beta} = S\left((x_\beta - x_\alpha)\ \left(m_\beta \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\alpha} - m_\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\beta}\right)\right)\,,$$

und die Ableitungen von φ_0 sich nur auf die explicite vorkommenden X, Y, Z beziehen, weil die A, B, C, A', B', C' den Bedingungen

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0 \ldots \frac{\partial C'}{\partial v} = 0$$

genügen. Führt man in dem Quotienten

$$\Phi_{\alpha\beta} : r_{\alpha\beta}^3$$

statt der x, y, z die f, g, h und x_1 als Variable ein, so muss die Integration desselben nach x_1 den mit dem Factor $-X_1$ versehenen Term in φ_2 liefern, welcher $r_{\alpha\beta}$ im Nenner hat, und der im Uebrigen eine ganze Function der X, Y, Z ist. Nun ist

$$\int dx\,(Px+Q)\,(ax^2+2bx+c)^{-\frac{3}{2}} = (Vx+W)(ax^2+2bx+c)^{-\frac{1}{2}},$$

wenn zwischen den von x unabhängigen Grössen P, Q, a, b, c, V, W die Relationen

$$\begin{aligned} D &= b^2 - ac\,; \\ DV &= bP - Qa\,, \\ DW &= cP - Qb\,, \\ D(Vx + W) &= P(bx + c) - Q(ax + b) \end{aligned}$$

stattfinden. Mit Rücksicht hierauf setzen wir an

$$x_\alpha - x_\beta = x_{\alpha\beta}\,, \;\ldots$$
$$f_\alpha - f_\beta = f_{\alpha\beta}\,, \;\ldots$$
$$X_\alpha - X_\beta = X_{\alpha\beta}\,, \;\ldots$$
$$m_\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\beta} - m_\beta \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\alpha} = A_{\alpha\beta}\,, \;\ldots$$
$$r_{\alpha\beta}^2 = a x_1^2 + 2 b x_1 + c\,,$$
$$a X_1^2 = S X_{\alpha\beta}^2\,,$$
$$b X_1^2 = S X_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}\,,$$
$$c X_1^2 = S f_{\alpha\beta}^2\,,$$
$$\Phi_{\alpha\beta} = P x_1 + Q\,,$$
$$P X_1 = S X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\,,$$
$$Q X_1 = S f_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\,,$$
$$(a x_1 + b)\, X_1 = S X_{\alpha\beta}\, x_{\alpha\beta}\,,$$
$$(b x_1 + c)\, X_1 = S f_{\alpha\beta}\, x_{\alpha\beta}\,,$$
$$(b^2 - ac)\, X_1^2 = \{S X_{\alpha\beta}\, x_{\alpha\beta}\}^2 - \{S X_{\alpha\beta}^2\}\cdot\{S x_{\alpha\beta}^2\} = E\,,$$
$$E r_{\alpha\beta} \int d x_1 \frac{\Phi_{\alpha\beta}}{r_{\alpha\beta}^3} = X_1^2 \begin{vmatrix} P & a x_1 + b \\ Q & b x_1 + c \end{vmatrix} = F X_1\,,$$
$$F X_1 = \begin{vmatrix} S X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} & S X_{\alpha\beta}\, x_{\alpha\beta} \\ S f_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} & S f_{\alpha\beta}\, x_{\alpha\beta} \end{vmatrix},$$
$$F = \begin{vmatrix} S X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} & S X_{\alpha\beta}\, x_{\alpha\beta} \\ S x_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} & S x_{\alpha\beta}\, x_{\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Der Ausdruck

$$-\frac{F}{E r_{\alpha\beta}}$$

ist, wie bereits erwähnt, derjenige Term in φ_2, welcher $r_{\alpha\beta}$ als Nenner enthält; es muss also der Quotient $F:E$ eine ganze Function der X, Y, Z sein. Da nun F und E ganze Functionen der x, $X\ldots$ sind, und da E als Function der x, $X\ldots$ betrachtet irreductibel ist, so muss der Quotient $F:E$ auch eine ganze Function der x, y, z sein.

Um die Vorstellung zu fixiren, nehmen wir für den Augenblick an, dass die Indices α, β in F und E auf die Werthe 3, 4 ... beschränkt seien. Weiter denken wir uns in F und E die x, y, z zunächst durch die f, g, h und x_1, und dann die Grössen g_1, h_1, f_2, g_2, h_2 durch die A, B, C, B', C' und die übrigen f, g, h ausgedrückt. Durch diese linearen Transformationen wird an der Theilbarkeit von F durch E nichts geändert.

Der Ausdruck für E enthält dann nur die Variablen $f_\alpha, g_\alpha, h_\alpha, f_\beta, g_\beta, h_\beta$, während F sich zunächst als eine ganze homogene Function zweiten Grades derselben f, g, h und von x_1 darstellt, deren Coefficienten die x, y, z nur in den Verbindungen $A, A' \ldots$ enthalten. Setzen wir demgemäss an

$$F = F_0 x_1^2 + F_1 x_1 + F_2 ,$$

so müssen F_0, F_1, F_2 einzeln durch E theilbar sein. Nun sind die F_1 und F_2, wenn sie vorkommen, in Bezug auf die $f_\alpha \ldots h_\beta$ von der ersten, resp. nullten Ordnung, woraus wir schliessen, dass sie in Wirklichkeit identisch verschwinden, dass also F sich auf den Term F_2 reducirt, und dass infolge dessen

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

ist. Führt man nun die Differentiation nach u aus, so erhält man

$$\{S x_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\} \cdot \{S X_{\alpha\beta}^2\} = \{S X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\} \{S X_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}\} ,$$

und hieraus

$$\{S f_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\} \cdot \{S X_{\alpha\beta}^2\} = \{S X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\} \{S X_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}\} .$$

Die vorstehende partielle Differentialgleichung für φ_0 kann nun, da die $A_{\alpha\beta} \ldots$ die $f_\alpha \ldots h_\beta$ nicht enthalten, nicht anders bestehen, als wenn die mit den f, g, h multiplicirten Glieder links und rechts einzeln einander gleich sind, d. h. es ist

$$\frac{A_{\alpha\beta}}{X_{\alpha\beta}} = \frac{B_{\alpha\beta}}{Y_{\alpha\beta}} = \frac{C_{\alpha\beta}}{Z_{\alpha\beta}} = \frac{S X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}}{S X_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}} .$$

Zu diesem System von Differentialgleichungen, welche aus Gründen der Symmetrie auch noch gelten, wenn die Indices α, β die Werthe 1 oder 2 annehmen, gehören zunächst die vier Particularlösungen

$$L' = \Sigma m_\alpha X_\alpha , \quad M' = \Sigma m_\alpha Y_\alpha , \quad N' = \Sigma m_\alpha Z_\alpha ,$$
$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_\alpha (X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 + Z_\alpha^2) ,$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots n) .$$

Es fragt sich nun, ob noch andere gemeinsame Particularlösungen existiren können. Die Integration der Gleichung

$$\frac{A_{\alpha\beta}}{X_{\alpha\beta}} = \frac{B_{\alpha\beta}}{Y_{\alpha\beta}}$$

ist durch die drei Particularlösungen L', M', T vollständig erschöpft, d.h. die weiteren noch aufzusuchenden Particularlösungen dürfen als unabhängig von X_α X_β Y_α Y_β vorausgesetzt werden. Dies führt zunächst zu der Gleichung

$$C_{\alpha\beta} = 0 ,$$

welcher die Lösung N' genügt. Infolge dessen können die noch etwa fehlenden Lösungen als unabhängig auch von Z_α, Z_β vorausgesetzt werden. Es muss also, wenn noch weitere Lösungen, die von den gefundenen unabhängig sind, existiren, durch einen von X_α, Y_α, Z_α unabhängigen Ausdruck φ_0 das System

$$A_{\alpha\gamma} : X_{\alpha\gamma} = B_{\alpha\gamma} : Y_{\alpha\gamma} = C_{\alpha\gamma} : Z_{\alpha\gamma}$$

oder

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\gamma} : X_{\alpha\gamma} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial Y_\gamma} : Y_{\alpha\gamma} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial Z_\gamma} : Z_{\alpha\gamma}$$

befriedigt werden können, was offenbar nicht möglich ist, wenn φ_0 die X_γ, Y_γ, Z_γ wirklich enthält. Wir schliessen hieraus, dass der Ausdruck φ_0 die Variablen X, Y, Z nur in vier von den x, y, z unabhängigen Verbindungen, nämlich L', M', N', T enthält. Eliminirt man also aus

$$\varphi_0 = G(A, B, C, A', B', C', X_1, Y_1, Z_1, \ldots X_n, Y_n, Z_n)$$

vier der $X \ldots$, z. B. X_1, Y_1, Z_1, X_2 mittelst der Ausdrücke L', M', N', T, so müssen die übrigen X, Y, Z von selbst herausfallen. Man erkennt leicht, dass dann φ_0 die Gestalt

$$\varphi_0 = K(A, B, C, A', B', C', L', M', N', T)$$

annimmt, wo K eine ganze Function der darin vorkommenden Grössen bedeutet. Hiermit sind wir im Wesentlichen an das Ziel gelangt. Ist nämlich

$$U = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

die Kräftefunction, so sind die Ausdrücke

$$A, B, C, A', B', C', L', M', N', T - U$$

homogene Integrale von der hier untersuchten Art. Der Ausdruck

$$J = K(A, B, \ldots M', N', T - U)$$

ist ein ebensolches Integral, welches entwickelt und nach den X, Y, Z geordnet, mit dem hier untersuchten Integral φ in den

Gliedern höchster Ordnung, nämlich in dem Anfangsterm φ_0 übereinstimmt. Die Differenz

$$\varphi' = \varphi - J$$

ist wiederum ein Integral von derselben Art wie φ, nur dass die Ordnung in Bezug auf die X, Y, Z in φ' um wenigstens eine Einheit niedriger ist, als in φ. Es lässt sich also von dem vorgelegten Integral φ stets ein aus den bekannten Integralen zusammengesetztes Integral in der Weise abspalten, dass das übrig bleibende Integral nach den X, Y, Z von niedrigerer Ordnung ist als φ. Wiederholt man diese Abspaltung, so gelangt man schliesslich zu einem Integral, welches die X, Y, Z nicht enthält, welches sich deshalb auf eine Constante reducirt.

Hiermit haben wir den Satz gewonnen: Bei dem Vielkörper-Problem ist der Kreis der algebraisch aus den Coordinaten und Geschwindigkeiten zusammengesetzten und von t freien Integrale vollständig mit den bekannten Integralen, nämlich den Schwerpunktsätzen, den Flächensätzen und dem Satze von der lebendigen Kraft abgeschlossen.

§ 15.

Aus dem gefundenen Ergebniss lassen sich sofort einige weitere Folgerungen ziehen. Wir führen ein

$$m_\alpha X_\alpha = \xi_\alpha, \quad m_\alpha Y_\alpha = \eta_\alpha, \quad m_\alpha Z_\alpha = \zeta_\alpha,$$

und schreiben demgemäss die lebendige Kraft in der Form

$$T = \sum \frac{1}{2m_\alpha} (\xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2 + \zeta_\alpha^2) ;$$

ferner setzen wir, wenn U wieder die Kräftefunction bedeutet,

$$T - U = H,$$

dann haben die Bewegungsgleichungen die Gestalt

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}, \quad \frac{d\xi_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \quad \text{etc.}$$

Diese Gleichungen transformiren wir, indem wir statt der $x, \xi \ldots$ neue Variable

$$p_1 \ldots p_{3n}, \quad q_1 \ldots q_{3n}$$

durch die Gleichungen

$$\xi_\alpha = \frac{\partial V}{\partial x_\alpha}, \quad \eta_\alpha = \frac{\partial V}{\partial y_\alpha}, \quad \zeta_\alpha = \frac{\partial V}{\partial z_\alpha},$$

$$q_\alpha = \frac{\partial V}{\partial p_\alpha}$$

einführen, wo V irgend einen aus den Grössen x, y, z, p zusammengesetzten Ausdruck bedeutet. Die transformirten Gleichungen werden dann bekanntlich

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

wo H durch die q, p ausgedrückt zu denken ist. Wir wollen eine derartige Transformation für das Dreikörper-Problem wirklich durchführen; für das Vielkörper-Problem gestaltet sich die Rechnung nicht wesentlich anders.

Die den ξ, η, ζ correspondirenden Variablen sollen mit $p, p_1 \ldots p_8$, die den x, y, z entsprechenden mit $q, q_1 \ldots q_8$ bezeichnet werden. Ferner soll die transformirende Function V in Bezug auf die p homogen linear sein, woraus sofort folgt, dass man ansetzen kann

$$V = p\,q + p_1\,q_1 \cdots + p_8\,q_8\,,$$

wo für die q bestimmte Functionen der x, y, z gesetzt zu denken sind. Der Kürze halber möge das Zeichen S eine Summation über die drei Coordinatenaxen, das Zeichen Σ eine cyclische Summation über die Indices 1, 2, 3 bedeuten. Dies vorausgeschickt setzen wir zunächst an

$$q_1^2 = S(x_2 - x_3)^2\,, \quad q_2^2 = S(x_3 - x_1)^2\,, \quad q_3^2 = S(x_1 - x_2)^2\,,$$

d. h. die q_1, q_2, q_3 sind die Distanzen der drei Körper von einander. Weiter sollen sein

$$q_6 = \Sigma\, m_1\, x_1\,, \quad q_7 = \Sigma\, m_1\, y_1\,, \quad q_8 = \Sigma\, m_1\, z_1\,.$$

Endlich bilden wir mit den neun willkürlich gewählten Constanten

$$a_1\,,\ b_1\,,\ c_1\,,\ a_2\,,\ b_2\,,\ c_2\,,\ a_3\,,\ b_3\,,\ c_3\,,$$

zwischen denen die Relationen

$$\Sigma\, a_1 = \Sigma\, b_1 = \Sigma\, c_1 = 0\,,$$
$$a_2\, b_3 - a_3\, b_2 = a_3\, b_1 - a_1\, b_3 = a_1\, b_2 - a_2\, b_1 = 1\,,$$

stattfinden sollen, die Ausdrücke

$$\begin{aligned} q_5 &= \Sigma\, c_1\, z_1\,, \\ q_4 &= \Sigma\, b_1\, (x_1 + i\, y_1)\,, \\ q &= [\Sigma\, a_1\, (x_1 + i\, y_1)] : q_4\,, \end{aligned}$$

dann haben wir die Transformationsgleichungen

$$\xi_1 = \frac{p_2}{q_2}(x_1 - x_3) + \frac{p_3}{q_3}(x_1 - x_2) + p\frac{a_1 - b_1 q}{q_1} + p_4 b_1 + p_6 m_1 \,,$$
$$\eta_1 = \frac{p_2}{q_2}(y_1 - y_3) + \frac{p_3}{q_3}(y_1 - y_2) - p\frac{a_1 - b_1 q}{i\, q_1} + p_4 i b_1 + p_7 m_1 \,,$$
$$\zeta_1 = \frac{p_2}{q_2}(z_1 - z_3) + \frac{p_3}{q_3}(z_1 - z_2) \qquad + p_5 c_1 \qquad + p_8 m_1 \,,$$
etc.

Die p ergeben sich hieraus als lineare Functionen der ξ, η, ζ, mit Coefficienten, welche algebraisch von den x, y, z abhängen. Aus diesen Gleichungen folgern wir zunächst

$$\Sigma\, m_1 X_1 = \Sigma\, \xi_1 = p_6 \,\Sigma\, m_1 \,,$$
$$\Sigma\, m_1 Y_1 = \Sigma\, \eta_1 = p_7 \,\Sigma\, m_1 \,,$$
$$\Sigma\, m_1 Z_1 = \Sigma\, \zeta_1 = p_8 \,\Sigma\, m_1 \,,$$

d. h. die p, q mit den Indices 6, 7, 8 sind, von constanten Factoren abgesehen, gleich den Geschwindigkeiten und den Coordinaten des Schwerpunktes. Weiter bilden wir die complexe Verbindung der beiden ersten Flächensätze

$$\Sigma \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \xi_1 \\ i & y_1 & \eta_1 \\ 0 & z_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} = p_5 \Sigma c_1 (y_1 - i x_1) + q_7 p_8 - q_8 p_7 + i(q_8 p_6 - q_6 p_8)$$

und den dritten Flächensatz

$$\Sigma \begin{vmatrix} x_1 & \xi_1 \\ y_1 & \eta_1 \end{vmatrix} = i\, p_1 q_1 + p_7 q_6 - p_6 q_7 \,.$$

Der Ausdruck für H endlich setzt sich zusammen aus den drei Gliedern

$$H' = \sum \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 q_1^2 \frac{m_2 + m_3}{2 m_2 m_3} + \sum \frac{p_2}{q_2} \frac{p_3}{q_3} \frac{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}{2 m_1}$$
$$+ \sum \frac{1}{m_1} \{p(a_1 - b_1 q) + p_4 q_4 b_1\} \left\{\frac{p_3}{q_3}(a_3 - b_3 q) - \frac{p_2}{q_2}(a_2 - b_2 q)\right\} - U,$$
$$H'' = p_5 \sum \frac{p_1}{q_1}(z_2 - z_3)\left(\frac{c_2}{m_2} - \frac{c_3}{m_3}\right) + p_5^2 \sum \frac{c_1^2}{2 m_1} \,,$$
$$H''' = \tfrac{1}{2}(p_6^2 + p_7^2 + p_8^2)\, \Sigma\, m_1 \,.$$

In den transformirten Differentialgeichungen

$$\frac{d q_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \,, \quad \frac{d p_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \,, \quad (\alpha = 0, 1 \ldots 8)$$

spaltet sich jetzt zunächst das System

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'''}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'''}{\partial q_\alpha}, \quad (\alpha = 6, 7, 8)$$

ab, dessen Integration die Schwerpunktsätze liefert. Nehmen wir den Schwerpunkt als Coordinatenanfang, so haben wir die p, q mit den Indices 6, 7, 8 einfach gleich Null zu setzen, und erhalten das System zwölfter Ordnung

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}(H'+H''), \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial p_\alpha}(H'+H''), \quad (\alpha=0,1\ldots5).$$

Wählt man ferner die invariable Ebene als xy-Ebene, so ist p_5 gleich Null zu setzen. Infolge dessen reducirt sich das System zwölfter Ordnung auf ein System zehnter Ordnung mit den Variablen $p \ldots p_4$, $q \ldots q_4$ und auf eine Quadratur zur Bestimmung von q_5. Das letztgenannte System hat die Form

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha}, \quad (\alpha = 0, 1 \ldots 4)$$

und giebt, da H' die Variablen p_4 und q_4 nur zu dem Producte $p_4\, q_4$ verbunden enthält, in Folge der Gleichungen

$$\frac{dq_4}{dt} = \frac{\partial H}{\partial(p_4\, q_4)}\, q_4, \quad \frac{dp_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial(p_4\, q_4)}\, p_4$$

die Relation

$$\frac{d(p_4 q_4)}{dt} = 0,$$

welche sich vorhersehen liess, da $ip_4 q_4$ unter den gemachten Voraussetzungen das dritte Flächenintegral ist. Von dem System zehnter Ordnung spaltet sich also das System achter Ordnung

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha}, \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

ab, wo in H' an Stelle von $p_4\, q_4$ eine Constante zu schreiben ist, die wir mit k bezeichnen wollen. Die beiden übrig bleibenden Gleichungen liefern dann den Ausdruck für

$$\log \frac{q_4}{p_4}$$

durch eine Quadratur.

§ 16.

Um das System achter Ordnung noch weiter zu reduciren, schreiben wir

$$H' = H_1 p + H_2 ,$$

wo H_1 und H_2 offenbar von p frei sind. Ferner setzen wir an

$$L = p + \frac{H_2 - H'}{H_1} = p + K = 0 ,$$

und können dann die Gleichungen zunächst in der Form

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial p_\alpha} : \frac{\partial L}{\partial H'}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} : \frac{\partial L}{\partial H'}$$

schreiben, wo nach Ausführung der partiellen Differentiationen für H' wieder der ursprüngliche Ausdruck gesetzt zu denken ist. Wegen der Relation

$$\frac{dq}{dt} = -1 : \frac{\partial L}{\partial H'}$$

folgt aber für $\alpha = 1, 2, 3$

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha} .$$

Für das vorstehende System sechster Ordnung ist der in K auftretende Ausdruck H' ein Integral, wir dürfen also für H' eine Constante $-h$ schreiben und haben damit das Problem auf die Integration eines Systems sechster Ordnung und die Quadratur

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q}$$

zurückgeführt.

Eine weitere Reduction als auf dieses System sechster Ordnung, welches schon mehrfach, wenn auch in abweichender Gestalt, abgeleitet worden ist, lässt sich, wie aus den Untersuchungen von Herrn Lie über Gruppen (Mathem. Annalen, Band VIII) hervorgeht, an der Hand der bisher bekannten Integrale nicht erreichen. Der vollständige Ausdruck für K hat die Gestalt

$$K = \frac{H_2 + h}{H_1},$$

$$H_1 = \sum A_1 \frac{p_1}{q_1},$$

$$A_1 = (a_1 - b_1 q)\left\{\frac{a_2 - b_2 q}{m_2} - \frac{a_3 - b_3 q}{m_3}\right\}, \quad \text{etc.},$$

$$H_2 = \sum \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 q_1^2 \frac{m_2 + m_3}{2 m_2 m_3} + \sum \frac{p_2}{q_2}\frac{p_3}{q_3} \frac{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}{2 m_1}$$
$$+ \sum B_1 \frac{p_1}{q_1} - U,$$

$$B_1 = k(a_1 - b_1 q)\left\{\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right\}, \quad \text{etc.},$$

$$U = \sum \frac{m_2 m_3}{q_1}.$$

Es lässt sich jetzt unschwer zeigen, dass unser System sechster Ordnung keine algebraischen Integrale besitzt. Angenommen es existirte ein algebraisch aus den p, q zusammengesetztes Integral, dann ergiebt sich zunächst, weil K eine rationale Function der p, q ist, die in § 2 benutzte Schlussweise, dass dieses Integral sich als eine algebraische Verbindung von Integralen darstellen lässt, welche die p, q nur rational enthalten. Für die rationalen Integrale ferner zeigt die in § 3 benutzte Methode der unbestimmten Coefficienten, dass in diesen Integralen die in K auftretenden Constanten, nämlich die m, a, b, c, k, h nur in algebraischen Verbindungen auftreten können. Setzt man nun in einem solchen rationalen Integral für die p, q ihre Ausdrücke durch die ursprünglichen Variablen x, y, z, ξ, η, ζ und ferner für die Constanten k und h, welche ja algebraische Integrale bedeuten, ebenfalls ihre Ausdrücke durch die ursprünglichen Variablen, so gelangt man zu einem Integrale des Dreikörper-Problems, welches die Coordinaten und die Geschwindigkeiten nur algebraisch enthält. Ein derartiges Integral reducirt sich aber allemal, wenn man den Schwerpunkt als Coordinatenanfang und die invariable Ebene als xy-Ebene wählt, auf eine algebraische Function von h und k allein, womit offenbar die Nichtexistenz algebraischer Integrale für das System sechster Ordnung bewiesen ist.

Bei den bisher mittelst der Hamilton-Jacobi'schen Methoden erledigten Problemen der analytischen Mechanik beruht die

Lösung im Allgemeinen darauf, dass man, nöthigenfalls durch eine passende Transformation, eine sogenannte Trennung der Variablen herbeiführt. Dieses Princip lässt sich etwas allgemeiner als es bei Jacobi geschieht, folgendermassen formuliren. Gegeben ist das kanonische System

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n)$$

$$H = f(q, q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n) ;$$

die Variablen lassen sich trennen, wenn zwischen den Variablen $q \ldots q_n$, $p_1 \ldots p_n$, einer neuen Variablen p und gewissen Parametern c_1, c_2 ... Gleichungen von der Form

$$H_1 (p\, q\, c_1\, c_2 \ldots) = 0\,, \quad H_2 (p_1\, q_1\, c_1\, c_2 \ldots) = 0 \quad \text{etc.}$$

aufgestellt werden können, welche folgenden Bedingungen genügen: 1) die Anzahl der Gleichungen und der Parameter c ist gleich der Anzahl der Variablenpaare $p\,q$, $p_1\,q_1$, ...; 2) jede Gleichung enthält nur ein Variablenpaar; 3) eliminirt man mittelst der angegebenen Gleichungen aus dem Ausdrucke

$$p + H$$

je eine Componente eines Paares, so fallen die anderen Componenten von selbst heraus, d. h. der genannte Ausdruck verwandelt sich in eine von den p, q freie Function der Parameter c. Aus diesen Eigenschaften folgt dann weiter, dass, wenn man die Gleichungen $H_1\, H_2$ ... nach den c auflöst, die für die c sich ergebenden Ausdrücke Integrale des vorgelegten Problems sind.

Aus diesen Bemerkungen lässt sich das Ergebniss ableiten, dass es nicht möglich ist, bei unserem System sechster Ordnung eine Trennung der Variablen durch rein algebraische Berührungstransformationen, d. h. Transformationen, bei welchen die kanonische Form der Differentialgleichungen erhalten bleibt, herbeizuführen. Bei einer algebraischen Transformation nämlich verwandelt sich K in eine algebraische Function der neuen Variablen. Wenn nun in diesem Falle eine Trennung nach den neuen Variablen möglich ist, so lassen sich die Parameter c stets so wählen, dass die Zusatzgleichungen

$$H_1 = 0\,, \quad H_2 = 0\,, \ldots$$

die Variablen und die Parameter nur algebraisch enthalten. Man würde hiermit auf algebraische Integrale des Systems sechster Ordnung geführt. Darnach sind also die Trans-

formationen, welche die Trennung der Variablen gestatten, nothwendiger Weise transcendent, ebenso wie die noch fehlenden Integrale.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist nun allerdings noch nicht die Möglichkeit ausgeschlossen, dass man nicht auf algebraischem Wege wenigstens zu einem neuen Integrale gelangen könnte. Diese Frage ist im Wesentlichen gleichbedeutend mit der andern: existiren Integrale, welche durch Quadraturen über algebraische Ausdrücke der p, q entstehen? Die Erledigung dieser Frage, zu welcher man nach Erschöpfung des Gebietes der algebraischen Integrale auch noch durch Ueberlegungen ganz anderer Art hingedrängt wird, würde auf dem hier eingeschlagenen Wege als der nächste nothwendige Schritt erscheinen, bevor man den Versuch macht, in den Differentialgleichungen selbst Fingerzeige bezüglich der für das Problem angemessenen transcendenten Transformationen aufzusuchen.

Leipzig, Sylvester 1886.

SITZUNG AM 7. MÄRZ 1887.

Walther Dyck, *Beiträge zur Analysis situs*. III. Mittheilung. (Vorgelegt von *A. Mayer*.) Mit 1 lithogr. Tafel.

Die beiden vorangehenden Untersuchungen zur Analysis situs, welche ich die Ehre hatte der hohen Societät vorzulegen [1]), behandelten im Wesentlichen die Definition der »Grundzahl« einer Mannigfaltigkeit (insbesondere von zwei und drei Dimensionen) und deren Bestimmung, falls die Mannigfaltigkeit in analytischer Form gegeben ist.

Durch Aufstellung der Grundzahl ist nun selbstverständlich eine Mannigfaltigkeit keineswegs »im Sinne der Analysis situs vollständig« bestimmt. So lässt sich z. B. aus der Bestimmung der Grundzahl für den »Innenraum« einer ebenen Curve (A. S. II. pag. 63) noch keineswegs die Anzahl der Zweige, aus welchen die betr. Curve besteht, angeben, oder aus der Grundzahl einer Fläche sich ein Schluss auf die Anzahl oder die Grundzahl ihrer einzelnen Theile machen. So wird man allgemeiner die Frage aufwerfen können:

Welche Anzahl-Bestimmungen sind — unter Voraussetzung eines analytischen Datums — an einer Mannigfaltigkeit durchzuführen, um dieselbe im Sinne der Analysis situs hinreichend und vollständig zu charakterisiren?

Diese Frage ist in den folgenden Zeilen für ebene Curven und für Flächen eines ebenen dreidimensionalen Raumes behandelt. Es werden Anzahlbestimmungen (im Wesentlichen in wiederholten Anwendungen des *Sturm*'schen Satzes bestehend) be-

---

1) Beiträge zur Analysis situs I und II, vom 6. Juli 1885 und 8. Februar 1886; im Folgenden A. S. I. und II. citirt.

zeichnet, durch welche die betr. Mannigfaltigkeit bis auf Verbiegungen und Verzerrungen (ohne Zerreissen) eindeutig definirt wird. Die zu Grunde gelegte Methode ist in der Ebene wie im Raume dieselbe, nur habe ich für die Discussion in der Ebene eine an die früheren Entwickelungen unmittelbar anschliessende Darstellung gewählt, während ich im Raume die Ableitung der fraglichen Charakteristiken mit Hülfe einer Projection der Fläche mehr habe hervortreten lassen.

Die Frage, wie nun die so definirten Mannigfaltigkeiten in gewisse *Normalformen* übergeführt werden können, deren Aufstellung und Classification uns über die überhaupt vorhandenen gestaltlichen Möglichkeiten orientiren würde, berühre ich in der vorliegenden Untersuchung nicht. Insofern man nun (eben anknüpfend an eine solche Aufstellung gewisser Normalformen) die hier gestellte Aufgabe auch durch die Ueberführung gegebener Curven und Flächen in gewisse Normalformen behandelt denken kann, wo dann die Gebilde als *beweglich* gewisse Umformungen erleiden, mag man im Vergleich damit den hier eingeschlagenen Weg dadurch bezeichnen, dass wir für die Discussion unsere Mannigfaltigkeiten zwar durch das analytische Datum als *starr* gegeben betrachten, aber ihre gestaltlichen Eigenschaften nur insoweit rechnerisch verfolgen, als wir sie eben zu einer Charakteristik im Sinne der Analysis situs bedürfen[1]).

Zum Schlusse habe ich in § 3 einige Bemerkungen über die Gestalten, welche die ebenen Projectionen von Flächen besitzen können, angefügt. Sie sollen nur den Umfang der eintretenden Möglichkeiten an Beispielen bezeichnen, ohne irgendwie erschöpfen zu wollen. Eine ausführliche Darstellung möchte ich einer anderen Gelegenheit vorbehalten.

§ 1.

Ebene Curven.

Die Gleichung der Curve sei

$$f(x, y) = 0,$$

wobei zur Vereinfachung des Ausdruckes (wie in den früheren

---

1) Man vergleiche übrigens hierzu die Schlussbemerkungen des § 2 pag. 49.

Abhandlungen) vorausgesetzt sei, dass die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

(wo f_1 und f_2 die partiellen Ableitungen von f nach x und y bezeichnen) nicht gleichzeitig für reelle Werthepaare x, y zu befriedigen seien[1]).

Wir betrachten ferner (ebenso wie früher A. S. I. p. 322) die Ebene als Kugel, d. h. mit nur einem unendlich fernen Punkte, welcher im »Aussen-Raume« $f > 0$ der Curve gelegen sei.

Wir legen der Betrachtung wieder einen schon früher (A. S. II. p. 62) gebrauchten Entstehungsprocess der Curve zu Grunde, den wir wieder der einfacheren Ausdrucksweise wegen in einer speciellen Gestalt voraussetzen: Eine Gerade $y = y_a$ möge von einer »obersten« Lage beginnend, für welche noch kein Schnittpunkt mit der Curve statthat, parallel zur Anfangslage bleibend mit abnehmendem y über die Curve hinweggeschoben werden. Wir betrachten dann den jedesmal oberhalb der Geraden befindlichen Theil der Curve als entstanden und achten darauf, wie bei der Bewegung neue Stücke der Curve entstehen und schon vorhandene sich vereinigen. Das Entstehen neuer Curventheile findet jedesmal statt, wenn die Curve von »oben« berührt wird, die Vereinigung zweier Theile jedesmal dann, wenn eine Berührung von »unten« statt hat. Die betreffenden Stellen sind also durch die Gleichungen

$$f = 0, \; f_1 = 0$$

charakterisirt und die Art der Berührung von »oben« bez. »unten« durch das positive bez. negative Vorzeichen von

$$f_2 \cdot f_{11}.$$

Seien nun $y_1, y_2 \ldots y_n$ der Grösse nach geordnet die Ordinaten für welche Berührungen eintreten, *so lässt sich zunächst aus der Kenntniss der jedem dieser Werthe entsprechenden Vorzeichen von $f_2 \,.\, f_{11}$ die Anzahl σ der Schnittpunkte einer beliebigen Geraden $y = y_a$ mit der Curve bestimmen.* Versteht man nämlich unter $[f_2 . f_{11}]$ die Grösse ± 1, je nachdem $f_2 . f_{11}$ positiv oder negativ ist, so ist diese Zahl sofort gegeben durch

$$(1.) \qquad 2 \,.\, \Sigma\, [f_2 . f_{11}],$$

---

1) Indess sei ausdrücklich bemerkt, dass ein Beibehalten solcher singulärer Punkte keinerlei Schwierigkeiten bietet.

die Summe ausgedehnt über alle Punkte y_i, ($f = 0$, $f_1 = 0$), für welche $y > y_a$ ist.

Die Intervalle von y_1 bis y_2, y_2 bis y_3 ..., y_{n-1} bis y_n sind dergestalt jedes von einer bestimmten Anzahl von Curvenstücken durchsetzt, die unter sich eben an jenen Berührungspunkten zusammenhängen. Zur *vollständigen* Charakteristik der Curven ist es also noch nothwendig, die Lage der Berührungspunkte auf den einzelnen Geraden $y = y_1$ ... $y = y_n$ zu kennen, d. h. zu wissen, wie viele, λ, von allen Schnittpunkten einer solchen Geraden mit der Curve »rechts« (und damit auch gleichzeitig wie viele »links«) vom Berührungspunkte liegen.

Die Kenntniss dieser Zahlen λ für die sämmtlichen Tangenten $y = y_i$ ist zur Charakterisirung jedenfalls hinreichend. Denn sie ermöglicht unmittelbar und nur auf eine Weise ein Schema der gegenseitigen Lage der einzelnen Curvenzweige zu entwerfen (vergl. Fig. 1). Zunächst etwa beim obersten Berührungspunkte (für welchen $f_2 . f_{11}$ positiv ist) beginnend und auf dem einen der dort auslaufenden Aeste (etwa nach rechts) fortschreitend bezeichnen wir einen ersten Curvenzug in ganz bestimmter Weise dadurch, dass wir beim Ueberschreiten jeder Tangente angeben, wie viele Schnittpunkte der Curve mit dieser Tangente rechts (bez. links) des jeweils durchlaufenen Curvenzuges liegen — und diese Anzahlen bestimmen sich sofort aus der Kenntniss der obengenannten Zahlen. Diese lassen nämlich erkennen, ob ein Berührungspunkt »rechts« von dem durchlaufenen Curvenzweige auftritt (bezw. verschwindet), ob er auf dem durchlaufenen Zweige liegt, oder endlich links davon gelegen ist[1]). So ordnen sich in bestimmter Reihenfolge schliesslich alle jene Be-

1) Sei, um dies näher auszuführen, an einer bestimmten Stelle der Curve (die wir uns in der Richtung nach »abwärts« durchlaufen denken) m die Zahl der »rechts« liegenden Curvenzweige; sei ferner für die nächstfolgende horizontale Tangente μ die Zahl der Zweige »rechts« vom Berührungspunkte. Nehmen wir dann an, diese Tangente berühre von »oben«, so wächst die Zahl der »rechts« liegenden Curvenzweige für den durchlaufenen Zweig um 2, wenn $\mu \leq m$ und bleibt ungeändert für $\mu > m$. Berührt die Tangente von »unten«, so nimmt die Zahl der »rechts« liegenden Zweige um 2 ab, wenn $\mu < m - 1$; wenn aber $\mu = m - 1$ bez. $\mu = m$ ist, so liegt der betr. Berührungspunkt auf dem Curvenzweige und die Curve wendet sich von da nach *oben* und zwar nach rechts bez. nach links; ist $\mu > m$, so bleibt die Zahl der »rechtsliegenden« Curvenzweige ungeändert.

rührungspunkte auf geschlossenen Theilen der Curve an, deren gegenseitige Lage durch unsere Angaben völlig fixirt ist.

Unsere Anzahlbestimmungen sind aber nicht bloss *hinreichend*, sondern auch *nothwendig*, um *mit Hülfe der gewählten horizontalen Tangenten* die Curve im Sinne der Analysis situs vollständig zu definiren. Denkt man sich nämlich die Zahl n der horizontalen Tangenten und für jede den Charakter der eintretenden Berührung (als obere bez. untere) gegeben, so lassen sich nur unter Berücksichtigung der obigen Relation (1), welche die *Gesammtzahl* σ der Schnittpunkte der Curve in jedem Intervalle angiebt, die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ der rechts von jedem Berührungspunkte liegenden Schnittpunkte der Curve mit diesen Tangenten noch *willkürlich* festsetzen und führen jedesmal zu einem und nur einem ganz bestimmten Schema einer Curve.

Fassen wir die hiermit gewonnene Methode zur Charakterisirung einer Curve zusammen, *so haben wir für die Curve* $f(x, y) = 0$ *ausser der Bestimmung ihrer horizontalen Tangenten und des Charakters der jedesmaligen Berührung (als »oberer« bez. »unterer« Berührung) auf jeder dieser Tangenten das Lagenverhältniss des Berührungspunktes zu den übrigen Schnittpunkten auf der Tangente durch die Bestimmung der Zahlen* λ_i *zu fixiren, eine Bestimmung, die jedesmal die Anwendung des Sturm'schen Satzes erfordert.*

Besitzt die Curve *Doppelpunkte*, so ist für diese gleichfalls auf einer durchgelegten Horizontalen je eine Zahl λ_i zu bestimmen. Ebenso lassen sich weitere singuläre Vorkommnisse leicht in die allgemeine Theorie einbegreifen.

Unmittelbar ist ersichtlich, dass unser System von horizontalen Geraden, das wir der »Beschreibung der Curve« zu Grunde gelegt haben, durch irgend ein anderes, die Curve einfach überdeckendes Curvensystem zu analoger Formulirung ersetzt werden kann, wo dann der speciellen Curve irgend ein specielles System für die Discussion am angemessensten sein wird[1].

§ 2.

Flächen im ebenen dreidimensionalen Raume.

Indem wir dazu übergehen, eine analoge Methode zur Charakterisirung einer (im ebenen dreidimensionalen Raume ge-

---

1) Man vergl. übrigens die Schlussbemerkungen von § 2.

legenen) *Fläche* (die wir uns auch wieder als aus einer Anzahl geschlossener, einander in mannigfachster Weise durchdringender und umschliessender Theile bestehend zu denken haben) übergehen, sei im Folgenden eine etwas veränderte Darstellungsform — mit Hülfe einer »Projection« der Fläche — gewählt, die unmittelbar auch in den voranstehenden Entwicklungen hätte gebraucht werden können.

Denken wir uns eine Fläche (die wir, wenn es sich um eine rechnerische Ausführung handelt, wieder durch eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben voraussetzen) von irgend einem Punkte aus betrachtet, so können wir dieselbe »von diesem Punkte aus« dadurch beschreiben, dass wir zunächst die Umrisscurve, in ihrer Projection auf irgend eine Ebene, vollständig charakterisiren und dann angeben, wie sich in diese Curve die einzelnen Theile der Fläche, die als verschiedene über der Projectionsebene liegende Blätter zu denken sind, einspannen.

Wir zerlegen diese Discussion in folgende Schritte:

1. Die »*Umrisscurve*« (in welcher wir gleichzeitig auch etwa vorhandene Rückkehrcurven der Fläche einbegreifen) sowie die »*Doppelcurve*« — die wir beide als aus einer Anzahl geschlossener, sich mannigfach überkreuzender Theile bestehend anzunehmen haben — müssen zunächst nach den soeben in § 1 ausgeführten Methoden in der Projectionsebene festgelegt werden.

2. Längs der Umrisscurve gehen nun (vom Projectionscentrum aus gesehen) zwei Flächentheile in einander über, so zwar, dass wir längs der Curve noch diejenige Seite, auf welcher der Uebergang statthat (mit Hülfe einer Vorzeichenbestimmung, die für jeden getrennten Theil der Curve an *einer* Stelle auszuführen ist) fixiren können; wir wollen diese Seite der Curve kurz die »*Flächenseite*« nennen.

Nach diesen Bestimmungen lässt sich für jeden beliebigen Projectionsstrahl die Anzahl σ seiner Schnittpunkte mit der Fläche angeben, wenn wir die Bestimmung einmal für einen Projectionsstrahl ausgeführt haben.

Jede Ueberschreitung der Umrisscurve (man sehe hier etwa Fig. 2, 5) ändert nämlich die Anzahl der Schnittpunkte um $+2$ bez. -2, je nachdem sie durch die längs des Umrisses fixirte »Flächenseite« als Eintritt oder Austritt zu bezeichnen ist. Ueberschreitungen der Doppelcurve ändern selbstverständlich diese Anzahl nicht.

3. Nun denken wir uns für alle Doppelpunkte der Umrisscurve und Doppelcurve (die im Allgemeinen scheinbare Doppelpunkte sein werden) in der Projectionsebene den dort »überkreuzenden« und den »unterkreuzenden« Curvenzug bezeichnet; weiter sei für etwa vorhandene Berührungen der Projection von Doppelcurve und Umrisscurve bestimmt, ob (im Raume) die Doppelcurve, in bestimmter Richtung durchlaufen, den Umriss von »oben nach unten« bez. von »unten nach oben« durchsetzt[1]).

4. Es handelt sich jetzt noch um die Entscheidung, *welche* Blätter der Fläche jedesmal längs der einzelnen Ränder zusammenhängen.

Diese Entscheidung wird dadurch getroffen, dass wir für jeden in sich geschlossenen Theil der Umrisscurve und der Doppelcurve an einer (übrigens willkürlichen) Stelle bestimmen, in wie vielen (λ) Punkten der zugehörige Projectionsstrahl in dem Stücke zwischen dem Projectionscentrum und jenem Punkte der Umriss- (Doppel-) Curve (seinem Berührungspunkte) die Fläche schneidet.

Dann sind nämlich (man vergl. etwa Figur 5), wenn wir uns (3) ausgeführt denken, jedesmal längs des betreffenden in sich geschlossenen Curvenzuges die dort zusammenhängenden Blätter bestimmt. Man beachte nämlich, dass die ebenerwähnte Schnittpunktszahl λ für einen Projectionsstrahl längs eines geschlossenen Theiles der Umrisscurve sich jedesmal ändert, so oft ein scheinbarer Doppelpunkt (mit einem andern Stück der Umrisscurve) auftritt, in welchem der durchsetzende Curventheil *zwischen* Projectionscentrum und Berührungspunkt liegt. Und zwar wächst die Zahl jener Schnittpunkte λ um 2, bez. nimmt um 2 ab, je nachdem die betr. Stelle einen Eintritt oder Austritt bezeichnet. Dagegen bleibt die Zahl jener Schnittpunkte an denjenigen scheinbaren Doppelpunkten ungeändert, für welche der durchsetzende Zweig ausserhalb des oben erwähnten Stückes den Projectionsstrahl schneidet. Ferner ändert sich die Zahl λ um eins an den Stellen, in welchen die Umrisscurve von der Doppelcurve der Fläche berührt wird und zwar um $+1$ bez. -1, je nachdem im Sinne der Durchlaufung der Umrisscurve gerechnet die Doppelcurve (die ja im Raume den

1) Wir werden weiter unten für eine rechnerische Durchführung die Ausführung der Bestimmungen (3) denen in (4) nachsetzen; doch formuliren sich die Bestimmungen (4) übersichtlicher, wenn wir für den Augenblick (3) als bekannt voraussetzen.

Umriss durchsetzt) von unten nach oben bez. von oben nach unten tritt. Analog lässt sich jene Zahl λ längs eines geschlossenen Theiles einer Doppelcurve bestimmen, wenn sie an einer Stelle bekannt ist. Dabei ist für diejenigen geschlossenen Theile der Doppelcurve, welche mit Theilen des Umrisses eine Berührung eingehen, eben an jener Berührungsstelle die Zahl der Schnittpunkte λ für die Doppelcurve gleichzeitig mit der für die betreffende Umrisscurve gegebenen Zahl λ bestimmt. Weiter ist selbstverständlich die Zahl λ ohne Rechnung gegeben für alle diejenigen Curvenzüge, die an ein Gebiet grenzen, in welchem die Zahl der überdeckenden Blätter 0 ist.

Nach Bestimmung der Zahlen λ kann die Verbindung der einzelnen Flächenstücke, welche über den verschiedenen Gebieten der Projectionsebene ausgebreitet sind, zur Gesammtfläche nur mehr auf *eine* Weise erfolgen, wie man dies sofort durch ähnliche Ueberlegungen wie die auf pag. 43 für ebene Curven gegebenen übersieht.

Wir erkennen also, dass zur Festlegung der Fläche im Sinne der Analysis situs jedenfalls h i n r e i c h e n d *ist: 1) Den Umriss und die Doppelcurve (im Sinne von § 1) zu charakterisiren. 2) Für jedes geschlossene Stück des Umrisses die »Flächenseite« zu bestimmen. 3) Die Art der Ueberkreuzungen des entstandenen Curvensystems und der Berührungen von Doppelcurven und Umriss zu fixiren, und endlich 4) die Zahlen λ zu bestimmen.*

Es handelt sich noch darum, zu discutiren, in wie weit für die Beschreibung der Fläche aus ihrer Projection diese Bestimmungen im Allgemeinen *nothwendig* zur Charakteristik sind.

Hat man durch die Bestimmungen 1 und 2 die Anordnung der Umriss- und Doppelcurven in der Projectionsebene und daraus die Blätterzahlen σ in den einzelnen Gebieten festgelegt, so geht man zweckmässig zur Bestimmung der Zahlen λ über. Ausser dem oben schon erwähnten speciellen Falle, in welchem sich die längs einer geschlossenen Theilcurve statthabenden Zahlen λ unmittelbar ergeben, wird es im *Allgemeinen* an einer bestimmten Stelle einer Theilcurve immer eine (durch die zugehörige Zahl σ begrenzte) Anzahl von Möglichkeiten für λ geben, aus welchem Umstande sich die *Nothwendigkeit*, die Bestimmung von λ (an einer Stelle) für jede Theilcurve zu treffen, ergiebt[1].

1) Im *speciellen* Falle kann allerdings eine solche Configuration des Umrisses vorliegen, dass aus ihr mit Nothwendigkeit die Zusammengehörig-

Erst nach Bestimmung der Zahlen λ je für eine Stelle jeder Theilcurve wenden wir uns nun zu 3) der Bestimmung des Charakters der Berührung etwa vorhandener Doppelcurven mit Umrisscurven, in dem pag. 46 angedeuteten Sinne und dann zur Bestimmung der *Ueberkreuzungen* des Curvensystems. Von diesen letzteren werden sich eine Anzahl *ohne Rechnung*, aus den Zahlen λ herleiten lassen. Denken wir z. B. für zwei sich überkreuzende Curvenzweige in der Ueberkreuzungsstelle jene Zahlen λ gegeben, so ist damit ohne Weiteres entschieden, welcher Curvenzweig »oberhalb«, welcher »unterhalb« verläuft. Weiter werden sich (je nach den *speciell* vorliegenden Configurationen) gewisse Ueberkreuzungen aus der Bedingung bestimmen lassen, dass die entstehende Fläche keine weiteren Umrisse und Doppelcurven als die zuerst (durch 1 und 2) bestimmten haben darf. Ueber solche aus der speciellen Configuration abzulesende Ueberkreuzungen hinaus werden aber im Allgemeinen stets noch Ueberkreuzungen existiren, wo die Art des Uebereinandergreifens der betreffenden Curvenzüge rechnerisch durch Bestimmung der Lage der den beiden Zweigen im scheinbaren Doppelpunkt entsprechenden Schnittpunkte fixirt werden muss; dabei wird für jede specielle Configuration jede solche Bestimmung nach den vorhin ausgesprochenen Sätzen gewisse andere nach sich ziehen. So sind in Fig. 3 diejenigen Ueberkreuzungsstellen der als zwei in einandergreifende Ringe gedachten Fläche durch Punkte hervorgehoben, welche allein rechnerisch bestimmt werden müssen, während sich die Art der Ueberkreuzung für die übrigen Durchkreuzungen hieraus ohne Rechnung ergiebt. Ueberdies beachte man den Satz, dass die *Gesammtänderung* der Zahl λ (wie wir sie für die verschiedenen Ueberkreuzungsstellen und Berührungspunkte mit Doppelcurven auf pag. 46 verfolgt haben) beim Durchlaufen einer geschlossenen Theilcurve gleich Null sein muss, da wir nicht voraussetzen, dass eine Umrisscurve mehrfach zählend als Umriss auftritt.

---

keit zweier Theilcurven zu einem einzigen geschlossenen Flächentheile folgt. In einem solchen Falle — wie er in Figur 2, wo die Curven C_1 und C_2 nothwendig zusammengehören, vorliegt — zieht dann eine auf der einen Curve bestimmte Zahl λ eine entsprechende Zahl auf der andern Curve nach sich.

Der im Vorstehenden gegebene Weg der Discussion der gestaltlichen Verhältnisse von Curven und Flächen mag noch auf die mannigfaltigste Art durch die Auswahl anderer Curvensysteme an Stelle der hier zu Grunde gelegten Geradenbüschel in der Ebene und im Raume abgeändert werden und selbstverständlich wird speciellen Daten das eine oder andere System für die Discussion angemessener sein. *Allen Anordnungen aber ist gemeinsam die Art der Verwendung des Sturm'schen Satzes*, welche — mag sie nun auf dem einen oder anderen Wege in grösserer oder geringerer Wiederholung nothwendig sein — die schliessliche Charakterisirung der Curven und Flächen herbeiführt. Auch wenn man sich etwa vor einer speciellen Discussion eine gegebene Curve oder Fläche im Sinne der Analysis situs umgewandelt denkt (etwa bei einer Curve durch Aufhebung von Wendepunkten, bei einer Fläche durch Reduction gewisser auflösbarer Verschlingungen), so lassen sich auch solche Umformungen durch die Auswahl specieller Curvensysteme durch eine Discussion im obigen Sinne ersetzen, und so führen die schliesslich nothwendigen Anzahlbestimmungen wieder auf Formulirungen der vorstehend gegebenen Art. *Insofern lassen sich also unsere Methoden der Bestimmung der gestaltlichen Verhältnisse von Curven und Flächen nicht nur als hinreichende, sondern auch als nothwendige bezeichnen.*

§ 3.

Anschliessende Bemerkungen.

Es seien der allgemeinen Discussion noch einige Sätze beigefügt über ebene Curvensysteme, welche als vollständige Umrisse von Flächen (in der Projection auf eine Ebene) betrachtet werden können.

Wir denken uns in der Ebene ein Curvensystem gegeben, in welchem die *einzelne* geschlossene Theilcurve sich nicht selbst durchsetzt, welches aber sonst ganz willkürlich angenommen ist, so dass sich also die verschiedenen Theilcurven auf die mannigfachste Art durchkreuzen mögen; wir setzen ferner für jede einzelne Theilcurve in übrigens völlig willkürlicher Weise die »Flächenseite« fest — dann *lässt sich — und zwar im Allgemeinen noch auf mannigfache Weise — ein solches Curvensystem stets als der vollständige Umriss einer Fläche betrachten*; dabei

kann auch verlangt werden, dass die Fläche keine Doppelcurven besitzen soll.

Fixirt man in einem der Gebiete, in welche durch den Umriss die Ebene zerlegt erscheint, die (über einer gewissen unteren Grenze willkürliche) Zahl σ der überdeckenden Blätter der Fläche, so ist (nach pag. 45) die betreffende Zahl für alle Gebiete der Ebene bestimmt[1]. Sie wird in gewissen Gebieten einen *kleinsten* Werth erreichen; wählen wir diesen gleich Null, setzen also voraus, dass die betreffenden Gebiete von der Fläche *nicht* überdeckt werden sollen, *so lässt sich auch unter dieser Voraussetzung, bei welcher alle Gebiete mit der kleinstmöglichen Blätterzahl überdeckt erscheinen, stets und zwar im Allgemeinen noch auf mannigfache Art eine Fläche construiren, welche das gewählte Curvensystem zum vollständigen Umriss besitzt.* Dabei können wir auch hier noch verlangen, dass die Fläche keine Doppelcurve besitzt. Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten ist wegen der endlichen Blätterzahl hierbei stets eine *endliche*.

Der Beweis dieser Sätze wird in einfachster Art durch die wirkliche Aufstellung zugehöriger Flächen geführt. So lässt sich etwa für den allgemeinen Fall sofort jede einzelne Theilcurve als vollständiger Umriss eines Flächenstückes betrachten, welches die Gestalt einer »Kugel« (im Sinne der Analysis situs) besitzt, wenn das durch die Flächenseite der betr. Theilcurve definirte Curveninnere den unendlich fernen Punkt der Ebene ausschliesst, welches andererseits die Gestalt eines einschaligen Hyperboloids (etwa mit der Kehlellipse als Umriss) besitzt, sofern das »Innere« der zugehörigen Theilcurve den unendlich fernen Punkt einschliesst. Die so construirten Flächen besitzen, wenn man von der Möglichkeit etwa vorhandener Flächentheile, die *keinen* Umriss in die Projectionsebene liefern[2], absieht, das

1) Es ist sofort deutlich, dass für die Fixirung der Zahl σ in einem beliebigen Gebiete auch bei unserer ganz willkürlichen Eintheilung und beliebiger Wahl des Randes der einzelnen Theilcurven kein Widerspruch entstehen kann aus der Abänderung des Weges, auf welchem wir vom Ausgangsgebiet nach dem betreffenden Gebiete, in welchem wir σ bestimmen wollen, fortschreiten; da jeder geschlossene Weg — insofern auf ihm gleich viel Eintritte und Austritte mit jeder einzelnen Theilcurve liegen — die Charakteristik Null ergiebt.

2) Kugeln, von einem inneren Punkte projicirt.

Maximum von Theilen bei gegebenem Umriss. In Figur 4 sind in die einzelnen Theilgebiete die dieser Annahme entsprechenden Zahlen eingetragen, wo dann jeder Punkt von doppelt so vielen Blättern überdeckt erscheint, als es (mit Berücksichtigung der »Flächenseite«) ihn umschliessende Curvenzüge giebt.

Für die Flächen mit einer Minimalzahl von Ueberdeckungen der Ebene beachte man, dass man einander durchschneidende Theilcurven des Umrisses nicht als (auf der Fläche) aufeinanderfolgende Umrisse eines Flächenstückes betrachten kann, wohl aber eine umfassende Theilcurve und vollständig von ihr eingeschlossene, welche sich die »Flächenseiten« zukehren, als aufeinanderfolgende Stücke des Umrisses eines Flächentheiles. Da nun für die Gebiete, welche $\sigma = 0$ erhalten sollen, die begrenzenden Curvenstücke des Umrisses ihre Flächenseite sämmtlich von dem Gebiete abkehren, übersieht man, dass in der That bei geeigneten (und noch mannigfach zu treffenden) Verbindungen einzelner Theilcurven durch ein Flächenstück jene Gebiete unbedeckt bleiben können. Man vergleiche etwa Fig. 5, wo der Umriss dieselbe Configuration wie in Fig. 4 zeigt. In die einzelnen Gebiete sind jetzt die der neuen Annahme, die hier ersichtlich noch auf mannigfache Weise erfüllt werden kann, entsprechenden Zahlen eingetragen; weiter ist durch specielle Annahme einer Zahl λ (welche dem Rande des entsprechenden Curvenzuges beigesetzt ist) die Darstellung eines speciellen leicht übersichtlichen Falles (die ganze Fläche besteht aus zwei kugelförmigen, einem ringförmigen und einem doppelringförmigen Theile) festgelegt.

Für Curvensysteme, bei welchen die einzelnen Theilcurven sich selbst durchsetzen, sind die hier gegebenen Sätze zu modificiren. Für ihre Discussion ist zu beachten, dass eine beliebig sich selbst durchkreuzende, geschlossene Curve zwar auch als der vollständige Umriss einer geschlossenen Fläche betrachtet werden kann, aber im Allgemeinen nur mit Zuhülfenahme gewisser singulärer Punkte auf der Umrisscurve, die gestaltlich durch Zusammenziehung kleiner Schleifen (etwa von der in Fig. 6 vorliegenden Art) entstehen, oder etwa auch durch Zuhülfenahme von Doppelcurven, die im Innern der Fläche in Verzweigungspunkten (pinch-points) endigen.

Es sei zum Schlusse noch eine Bemerkung gestattet über

die Beziehung der Anzahl der Umrisscurven einer (aus *einem* geschlossenen Stücke bestehenden) Fläche und der Grundzahl derselben.

Herr *Klein* hat in seiner Schrift über »*Riemann's* Theorie der algebraischen Functionen« und in zwei Noten »Ueber die conforme Abbildung von Flächen« und »Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich« Annalen XIX p. 159 und 565, auf die Classification der *symmetrischen Riemann*schen Flächen nach ihren »Symmetrielinien« hingewiesen und gezeigt, dass *orthosymmetrische Flächen*[1]) vom »Geschlechte p« stets

$$\lambda = 1, 3, 5, \ldots p + 1$$

Symmetrielinien, wenn p gerade, und

$$\lambda = 2, 4, 6 \ldots p + 1$$

Symmetrielinien, wenn p ungerade, besitzen. Herr *Weichold* hat in seiner Dissertation »Ueber symmetrische *Riemann*'sche Flächen« (*Schlömilch's* Zeitschr. Bd. 28) typische Gestalten für diese Flächen aufgestellt, in denen jene Symmetrielinien für eine Orthogonalprojection als *Umrisse* auftreten, aber so, dass ausser diesen die Fläche noch weitere (zu einander symmetrisch gelegene) Umrisscurven besitzt. Es liegt die Frage nahe, ob es nicht gelingt, derartige typische Gestalten aufzustellen, für welche jene Symmetrielinien als der *alleinige* Umriss auftreten, so also, dass alle jene Flächen wieder durch doppelte Ueberdeckung eines mehrfach zusammenhängenden *ebenen* Flächenstückes vorgestellt werden können. Dies gelingt in der That auf die einfachste Weise. Die Figuren 6 — 8 zeigen die extremsten Fälle, in denen also die Anzahl der Umrisscurven $\lambda = 1$ bez. $\lambda = 2$ ist, für Flächen vom Geschlechte 2, 4 bez. 3, aus welchen sich sofort alle übrigen analogen Darstellungen ergeben. Fig. 6 ist dabei die schon von *Riemann* in der Theorie der *Abel*'schen Functionen (Werke pag. 89) angewandte Figur. Fig. 8 kann auch ersetzt werden durch eine den Fig. 6 und 7 analoge Darstellung, die in diesem Falle *zwei* Umrisscurven besitzt.

München, 5. März 1887.

1) Man vergl. bezüglich der Bezeichnungen die sogleich zu erwähnende Dissertation von *Weichold*.

SITZUNG AM 9. MAI 1887.

O. Schlömilch, *Ueber eine Entwickelung des Logarithmus.*

Die bekannte, für $\mu > -1$ geltende Formel

$$l(1+\mu) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\mu x}}{x}\, e^{-x}\, dx$$

gestattet folgende Umwandlung

$$l(1+\mu) = -\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right\} e^{-x}\, dx + \int_0^\infty \frac{1-e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\, e^{-x}\, dx$$

$$+\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right\} e^{-\mu x} e^{-x}\, dx\ ,$$

und darin ist der Werth des ersten Integrals (abgesehen vom Vorzeichen) gleich der Constante des Integrallogarithmus $C = 0{,}5772157$.

Für das zweite Integral hat man nach bekannten Formeln den Ausdruck

$$-C + \frac{d\, l\, \Gamma(1+\mu)}{d\mu}$$

$$= -C + \mu \left\{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\mu+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu+2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\mu+3} + \cdots\right\}$$

und im speciellen Falle $\mu^2 < 1$

$$= = C + S_2\, \mu - S_3\, \mu^2 + S_4\, \mu^3 - \cdots\ ,$$

wobei zur Abkürzung

$$S_k = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots$$

gesetzt worden ist. Eine andere Entwickelung desselben Integrals folgt aus der Substitution $e^{-x} = 1 - y$, nämlich

$$\int_0^\infty \frac{1 - (1-y)^\mu}{y} dy$$

$$= \frac{1}{1}(\mu)_1 - \frac{1}{2}(\mu)_2 + \frac{1}{3}(\mu)_3 - \cdots$$

Die eben genannte Substitution führt auch zur Entwickelung des dritten Integrals, welches zunächst übergeht in

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{y} - \frac{1}{l\left(\frac{1}{1-y}\right)} \right\} (1-y)^\mu dx .$$

Wird nämlich der Coefficient c_n definirt durch die Gleichung

$$c_n = \frac{1}{n} \int_0^1 t(1-t)(2-t)\cdots(n-1-t)\, dt ,$$

wonach

$$c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{12},\ c_3 = \frac{1}{12},\ c_4 = \frac{19}{120},\ c_5 = \frac{9}{20},\ \cdots$$

ist, so gilt die Gleichung *)

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{l\left(\frac{1}{1-y}\right)} = c_1 + \frac{c_2}{1} y + \frac{c_3}{1\cdot 2} y^2 + \frac{c_4}{1\cdot 2\cdot 3} y^3 + \cdots ,$$

und hieraus folgt als Werth des aus auf y bezüglichen Integrals

$$\frac{c_1}{\mu+1} + \frac{c_2}{(\mu+1)(\mu+2)} + \frac{c_3}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)} + \cdots$$

Alles zusammen ergiebt das Endresultat

$$l(1+\mu) = -C + \frac{1}{1}\cdot\frac{\mu}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 2} - \cdots$$

$$+ \frac{c_1}{\mu+1} + \frac{c_2}{(\mu+1)(\mu+2)} + \frac{c_3}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)} + \cdots ,$$

welches dadurch bemerkenswerth ist, dass die erste Reihe nach aufsteigenden, die zweite nach absteigenden Facultäten fortschreitet.

*) S. z. B. mein »Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis« Bd. II, Cap. 5, Aufg. 10.

SITZUNG AM 1. AUGUST 1887.

H. Bruns, *Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems.* Zweite Mittheilung.

§ 17.

In einer früheren Mittheilung, welche (vgl. diese Berichte) in der Klassensitzung vom 17. Januar dieses Jahres vorgelegt wurde, habe ich gezeigt, dass bei dem Vielkörper-Problem die Gesammtheit der von der Zeit t freien, algebraischen Integrale erhalten wird, wenn man aus den neun bekannten Integralen dieser Art alle möglichen algebraischen Verbindungen bildet. Als Ergänzung hierzu wollen wir nun noch den Fall behandeln, dass ein Integral ausser den Coordinaten und Geschwindigkeiten auch noch die Variable t algebraisch enthält, wie dies ja bei den Schwerpunkts-Integralen eintreten kann. Zu dem Ende denken wir uns das System

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = f_\alpha(x_1 \ldots x_n, s), \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n)$$

von Differentialgleichungen vorgelegt, in welchem die f rationale Functionen der x und einer einzigen, algebraisch von den x abhängenden Irrationalität s bedeuten, während t weder in den f, noch in s explicite vorkommt. Dieses System ist offenbar noch allgemeiner, als das in § 2 zu Grunde gelegte. Ist nun φ ein algebraisch von den Variablen x, t abhängendes Integral, so zeigt man zunächst durch die früher benutzten Überlegungen, dass sich φ algebraisch aus Integralen von der Form $R(x, s, t)$ zusammensetzen lässt. Wir nehmen deshalb an, dass φ von vornherein die Gestalt $R(x, s, t)$ besitze, denken uns dann φ als Quotienten zweier Polynome von der Form $G(x, s, t)$

geschrieben, und in Zähler und Nenner die Linearfactoren von der Form

$$t - t_1\,,\quad t - t_2\,\ldots$$

aufgesucht, in denen die t_1, t_2 ... algebraische und von t freie Functionen der x sind. Bildet man jetzt die vollständige logarithmische Ableitung von φ nach t und beachtet, dass in den Differentialgleichungen t nicht explicite vorkommt, so erkennt man, dass die angegebenen Linearfactoren sämmtlich Integrale sind, und dass ferner der nach Unterdrückung dieser Factoren in φ übrigbleibende Bestandtheil von der Form $R(x, s)$ ebenfalls Integral ist. Die verschiedenen in t linearen Integrale unterscheiden sich von einander um algebraische und von t freie Integrale. Hiernach ist zur Aufstellung aller Integrale der betrachteten Art nur erforderlich zu kennen 1) alle algebraischen und von t freien Integrale, 2) ein einziges von t abhängiges Integral der Form $t - t_1$. Beim Vielkörper-Problem ist deshalb das Gebiet aller algebraischen Integrale durch die bekannten zehn völlig erschöpft.

§ 18.

Am Schlusse der früheren Mittheilung waren Betrachtungen über die Frage angestellt worden, wie weit es möglich sei, durch algebraische Transformationen der Lösung des Vielkörper-Problems näher zu kommen. In dem Nachstehenden soll dieser Gegenstand weiter verfolgt werden, wobei wir uns einstweilen auf das Dreikörper-Problem beschränken. Um später den Gedankengang nicht zu unterbrechen, sollen zunächst gewisse Nebenuntersuchungen vorweg erledigt werden.

In § 15 waren die Bewegungsgleichungen durch Benutzung der Schwerpunkts- und Flächensätze auf ein System achter Ordnung

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}\,,\quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha}\,,\quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

reducirt worden, in welchem die Variablen nur noch von der Configuration des Körpersystems abhängen. Die Gleichungen enthalten ausser den vier Paaren abhängiger Variablen pq, ... an Constanten die drei Massen m_α, die Grösse k und die sechs Grössen a_α, b_α. Die Grösse ik ist der constante Werth des

dritten Flächenintegrals, wenn die invariable Ebene als Fundamentalebene gewählt wird; die Constanten a_α, b_α konnten innerhalb der Einschränkungen

$$(31)\qquad a_2 b_3 - a_3 b_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$$

willkürlich gewählt werden. Bildet man mittelst der transformirenden Function

$$V = rq + \tfrac{1}{2} \Sigma r_\alpha q_\alpha^2 \,, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

die Substitutionsgleichungen

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}\,, \quad s = \frac{\partial V}{\partial r}\,,$$

$$p_\alpha = \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\,, \quad s_\alpha = \frac{\partial V}{\partial r_\alpha}\,, \quad (\alpha = 1, 2, 3)\,,$$

aus denen

$$r = p \quad, \quad s = q\,,$$

$$r_\alpha = \frac{p_\alpha}{q_\alpha}\,, \quad s_\alpha = \tfrac{1}{2} q_\alpha^2$$

folgt, so werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{ds_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial r_\alpha}\,, \quad \frac{dr_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial s_\alpha}\,, \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)\,.$$

Im Folgenden werden wir, je nach Umständen, das System der p, q oder r, s benutzen, jedoch für das eine Paar rs die ursprüngliche Bezeichnung pq beibehalten. Ferner soll wie früher das Zeichen Σ ohne Summationsbuchstaben eine cyclische Summation über die Indices 1, 2, 3 bedeuten. Dies festgesetzt stellen wir zuerst die weiterhin benutzten Abkürzungen und Relationen zusammen. Es sei

$$C = \sum \frac{s_1}{m_1}\,, \quad C' = \sum r_1 s_1\,,$$

$$D = \sum r_2 r_3\,, \quad D' = \sum \frac{r_2 + r_3}{m_1}\,,$$

$$L_2 = C'D' - CD\,,$$

$$H_1 = \Sigma A_1 r_1 = M_0 + M_1 q + M_2 q^2\,,$$

$$A_1 = (a_1 - b_1 q)\left(\frac{a_2 - b_2 q}{m_2} - \frac{a_3 - b_3 q}{m_3}\right)\,, \quad \text{etc.}$$

$$M_0 = \sum_\alpha M_{0\alpha}\, r_\alpha ,$$

$$M_1 = \sum_\alpha M_{1\alpha}\, r_\alpha ,$$

$$M_2 = \sum_\alpha M_{2\alpha}\, r_\alpha ,$$

$$M_{10} = \quad a_1 \left(\frac{a_2}{m_2} - \frac{a_3}{m_3}\right) , \quad \text{etc.}$$

$$M_{11} = - a_1 \left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) - b_1 \left(\frac{a_2}{m_2} - \frac{a_3}{m_3}\right) , \quad \text{etc.}$$

$$M_{21} = \quad b_1 \left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) , \quad \text{etc.}$$

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3 , \quad m_4 = m_1 m_2 m_3 , \quad m = \frac{m_0}{m_4} ,$$

$$\mu_0 = \sum \frac{b_1^2}{m_1} , \quad \mu_1 = \sum \frac{a_1 b_1}{m_1} , \quad \mu_2 = \sum \frac{a_1^2}{m_1} ,$$

$$\mu_0 \mu_2 - \mu_1 \mu_1 = m ,$$

$$L_1 = \sum r_1 a_1 \left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) = \sum_\alpha L_{1\alpha}\, r_\alpha ,$$

$$L_{11} = a_1 \left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) , \quad \text{etc.}$$

$$\sum_\alpha \frac{L_{1\alpha}}{m_\alpha} = m .$$

Für die M, L bestehen, wenn f_1, f_2, f_3 drei willkürliche Zahlen bedeuten, die zusammenfassenden Determinanten-Relationen

$$| f_\alpha\, M_{1\alpha}\, M_{2\alpha} | = \mu_0 \sum \frac{f_1}{m_1} ,$$

$$| f_\alpha\, M_{2\alpha}\, M_{0\alpha} | = \mu_1 \sum \frac{f_1}{m_1} ;$$

$$| f_\alpha'\, M_{0\alpha}\, M_{1\alpha} | = \mu_2 \sum \frac{f_1}{m_1} ,$$

$$| f_\alpha\, L_{1\alpha}\, M_{0\alpha} | = - m \sum f_1\, a_2\, a_3 ,$$

$$| f_\alpha\, L_{1\alpha}\, M_{1\alpha} | = m \sum f_1 \,(a_2 b_3 + a_3 b_2) + \mu_1 \sum \frac{f_1}{m_1} ,$$

$$| f_\alpha\, L_{1\alpha}\, M_{2\alpha} | = - m \sum f_1\, b_2\, b_3 \qquad - \mu_0 \sum \frac{f_1}{m_1} .$$

Ferner ist noch

$$0 = \sum_\alpha \frac{A_\alpha}{m_\alpha} = \sum_\alpha \frac{M_{0\alpha}}{m_\alpha} = \sum_\alpha \frac{M_{1\alpha}}{m_\alpha} = \sum_\alpha \frac{M_{2\alpha}}{m_\alpha} ,$$

$$0 = \sum_\alpha \mu_\alpha M_{\alpha\beta} = \sum_\alpha \mu_\alpha M_\alpha ,$$

$$4 M_{01} M_{21} - M_{11} M_{11} = -\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)^2 , \quad \text{etc.}$$

$$4(M_{02} M_{23} + M_{03} M_{22}) - 2 M_{12} M_{13}$$

$$= -2\left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}\right)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + 4m , \quad \text{etc.}$$

$$4 M_0 M_2 - M_1 M_1 = 4mD - D'D' .$$

Die letzte Relation lehrt, dass der Ausdruck H_1, als Function von q, r_1, r_2, r_3 betrachtet, irreductibel ist. Setzen wir endlich noch an

$$\Sigma B_1 r_1 = k \Sigma r_1 (a_1 - b_1 q)\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right)$$

$$= kL_1 - kq M_2 ,$$

$$U = \sum \frac{m_2 m_3}{q_1} ,$$

$$H_2 = L_2 + kL_1 - kqM_2 - U ,$$

so ist der zur Bildung der Differentialgleichungen erforderliche Ausdruck H' gegeben durch

$$H' = pH_1 + H_2 .$$

Die mit H' gebildeten Bewegungsgleichungen wollen wir kurz als das System achter Ordnung bezeichnen. Der Ausdruck H' ist die Differenz »lebendige Kraft minus Kräftefunction«. Bezeichnet man den constanten Werth dieser Differenz wie früher mit $-h$ und setzt

$$K = (H_2 + h) : H_1 ,$$

so erhält man das von p und t freie »System sechster Ordnung«

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha} , \quad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha} , \quad (\alpha = 1, 2, 3) .$$

Fügt man hierzu die Gleichung

$$\frac{dt}{dq} = 1 : H ,$$

so erhält man das »System siebenter Ordnung«, welches sich aus dem 8. O. dadurch ergiebt, dass man mittelst des Integrals der lebendigen Kraft die Variable p fortschafft und q an Stelle von t als unabhängige Variable einführt. Umgekehrt kann man von dem System 7. O. zu dem 8. O. dadurch gelangen, dass man an Stelle der Constante h die Variable p durch die Gleichung

$$pH_1 + H_2 + h = 0$$

einführt.

§ 19.

Die in H' und K auftretenden Constanten a, b konnten innerhalb der oben erwähnten Einschränkungen völlig beliebig gewählt werden, und man hätte z. B. ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen das specielle Werthsystem

$$a_1 = 1 \;,\quad a_2 = 0 \;,\quad a_3 = -1$$
$$b_1 = 0 \;,\quad b_2 = 1 \;,\quad b_3 = -1$$

zu Grunde legen können. Der Symmetrie halber wollen wir jedoch die a, b unbestimmt lassen, und zeigen, wie sich die für zwei verschiedene Werthsysteme der a, b geltenden Differentialgleichungen in einander überführen lassen. Es seien a, b, c, d vier willkürliche, nur der Einschränkung

$$ad - bc = 1$$

unterworfene Constanten. Man setze an

$$a_\alpha = a a'_\alpha + b b'_\alpha \;,\quad b_\alpha = c a'_\alpha + d b'_\alpha \;,$$

dann ist

$$a'_2 b'_3 - a'_3 b'_2 = 1 \;,\quad \text{etc.},$$

d. h. die a', b' genügen denselben Bedingungen wie die ursprünglichen a, b. Ferner sei

$$q = \frac{aq' + b}{cq' + d} \;,$$

wo q' eine neue anstatt q in das System 7. O. einzuführende unabhängige Variable bedeutet; dann ist

$$a_\alpha - b_\alpha q = (a'_\alpha - b'_\alpha q) : (cq' + d) \;,$$

$$(cq' + d)^2 H_1 = \Sigma r_1 (a'_1 - b'_1 q)\left(\frac{a'_2 - b'_2 q}{m_2} - \frac{a'_3 - b'_3 q}{m_3}\right) = H_1' \;,$$

$$\Sigma B_1 r_1 - kc(cq' + d) H_1 = k \Sigma r_1 (a_1' - b_1' q)\left(\frac{b'_2}{m_2} - \frac{b'_3}{m_3}\right) .$$

Schreibt man also in K anstatt q und anstatt der a, b resp. q' und a', b', so erhält man für den so entstehenden Ausdruck K' die Relation

$$K' = \frac{K}{(cq' + d)^2} - \frac{kc}{cq' + d} ,$$
$$K = K' (cq' + d)^2 + kc (cq' + d) .$$

Beachtet man nun noch die Gleichung

$$dq = dq' : (cq' + d)^2 ,$$

so erkennt man leicht, dass das System 7. O. nach Einführung von q' die Form

$$\frac{dq_\alpha}{dq'} = \frac{\partial K'}{\partial p_\alpha} , \quad \frac{dp_\alpha}{dq'} = - \frac{\partial K'}{\partial q_\alpha} , \quad \frac{dt}{dq'} = 1 : H_1'$$

annimmt.

Von den acht Variablen p, q besitzen drei, nämlich q_1, q_2, q_3, eine einfache geometrische Bedeutung, indem sie die gegenseiseitigen Distanzen der drei Körper darstellen. Wir wollen nun auch für die übrigen Variablen den Zusammenhang mit den ursprünglichen Bestimmungsstücken, nämlich den Coordinaten und Geschwindigkeiten aufsuchen. Es seien X, Y, Z und X', Y', Z' die auf den Schwerpunkt und auf ein beliebig gerichtetes Axensystem bezogenen Coordinaten und Geschwindigkeiten, ferner x, y, z und x', y', z' die analogen Grössen, wenn die invariable Ebene als xy-Ebene gewählt wird. Bedeuten k_1, k_2, k_3 die constanten Werthe der drei Flächensätze für das erste Axensystem, so ist

$$k_1 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} Y_\alpha & Y_\alpha' \\ Z_\alpha & Z_\alpha' \end{vmatrix} , \quad k_2 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} Z_\alpha & Z_\alpha' \\ X_\alpha & X_\alpha' \end{vmatrix} , \quad k_3 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} X_\alpha & X_\alpha' \\ Y_\alpha & Y_\alpha' \end{vmatrix} ,$$
$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2 = 0 .$$

Die x, y, z hängen mit den X, Y, Z durch eine orthogonale Substitution der Form

$$x = a\ X + b\ Y + c\ Z ,$$
$$y = a'\ X + b'\ Y + c'\ Z ,$$
$$z = a''\ X + b''\ Y + c''\ Z$$

zusammen, für welche die Relation

$$1 : a'' : b'' : c'' = ik : k_1 : k_2 : k_3$$

gilt. Nun war

$$q = \sum_\alpha a_\alpha (x_\alpha + iy_\alpha) : \sum_\alpha b_\alpha (x_\alpha + iy_\alpha) ;$$

andererseits ist

$$x + iy = X(a + ia') + Y(b + ib') + Z(c + ic') \ ,$$

$$k^2 (a - ia') (x + iy)$$

$$= X(k^2 + k_1^2) + Y(k_1 k_2 + k k_3) + Z(k_1 k_3 - k k_2) \ ,$$

folglich

$$q = q_{01} : q_{02} \ ,$$

wenn

$$q_{01} = \sum_\alpha a_\alpha \{X_\alpha (k^2 + k_1^2) + Y_\alpha (k_1 k_2 + k k_3) + Z_\alpha (k_1 k_3 - k k_2)\} \ ,$$

$$q_{02} = \sum_\alpha b_\alpha \{X_\alpha (k^2 + k_1^2) + Y_\alpha (k_1 k_2 + k k_3) + Z_\alpha (k_1 k_3 - k k_2)\}$$

gesetzt wird. Hiermit ist offenbar der gesuchte Zusammenhang für q gegeben.

Um den analogen Zusammenhang für die p nachzuweisen, benutzen wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dq}{dt} = H_1 = \Sigma A_1 r_1 \ ,$$

$$\frac{ds_1}{dt} = C' \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) + D' s_1 - C(r_2 + r_3) + A_1 p + B_1 \ ,$$

$$\cdots\cdot$$

deren Auflösung nach den r und nach p die gesuchten Beziehungen liefert. Zur Abkürzung setzen wir

$$s'_\alpha = \Sigma s_1 - 2 s_\alpha \ , \qquad s'_2 + s'_3 = 2 s_1 \ , \text{ etc.} \ ,$$

$$A'_\alpha = \Sigma A_1 - 2 A_\alpha \ , \qquad A'_2 + A'_3 = 2 A_1 , \text{ etc.} \ ,$$

$$B'_\alpha = \Sigma B_1 - 2 B_\alpha \ , \qquad B'_2 + B'_3 = 2 B_1 , \text{ etc.} \ ,$$

$$\Delta = \Sigma s_1 s'_1$$

$$= \Sigma s_2 s_3 - \Sigma s_1^2$$

$$= 2 \Sigma s'_2 s'_3 \ .$$

Δ ist offenbar das 16-fache Quadrat des von den drei Körpern gebildeten Dreiecks. Weiter sei

$$T_1 = \Sigma A_1 s'_1 = \Sigma A'_1 s_1 \ ,$$

$$T_2 = \Sigma B_1 s'_1 = \Sigma B'_1 s_1 \ ,$$

$$V_1 = \Sigma A_1 A'_1 \ ,$$

$$V_2 = \Sigma A_1 B'_1 = \Sigma A'_1 B_1 \ ,$$

$$W_1 = \Sigma A_1 s'_1 \cdot \Sigma A'_1 s_1 - \Delta \Sigma A_1 A'_1$$

$$= T_1^2 - \Delta V_1 \ ,$$

$$W_2 = \Sigma A_1 s'_1 \cdot \Sigma B_1 s'_1 - \Delta \Sigma A_1 B'_1 \ ,$$

$$= T_1 T_2 - \Delta V_2 \ ,$$

dann wird

$$\frac{d\varDelta}{dt} = 2\Sigma s_1' \frac{ds}{dt}$$
$$= 2\varDelta D' + 2pT_1 + 2T_2 \,,$$
$$\frac{dC}{dt} = m(2C' + k) \,,$$
$$\frac{ds_1'}{dt} = \frac{2C'}{m_1} + D's_1' - 2Cr_1 + A_1'p + B_1' \,,$$

. . . .

$$\Sigma A_1 \frac{ds_1'}{dt} = D'T_1 - 2C\frac{dq}{dt} + pV_1 + V_2 \,,$$
$$T_1\frac{d\varDelta}{dt} - 2\varDelta\sum A_1 \frac{ds_1'}{dt} = 4C\varDelta\frac{dq}{dt} + 2pW_1 + 2W_2 \,,$$
$$\frac{2\varDelta}{mm_1}\frac{dC}{dt} + s_1'\frac{d\varDelta}{dt} - 2\varDelta\frac{ds_1'}{dt}$$
$$= \frac{2\varDelta k}{m_1} + 4C\varDelta r_1 + 2p(s_1'T_1 - \varDelta A_1') + 2(s_1'T_2 - \varDelta B_1') \,.$$

Hiernach sind p und p_α linear durch die Ableitungen der q, q_α ausgedrückt; die Coefficienten in diesen linearen Ausdrücken besitzen den gemeinsamen Nenner

$$C\varDelta W_1 \,.$$

Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Grössen

$$q,\; q_\alpha,\; p,\; p_\alpha,\; k,\; k_\alpha,\; h \,,$$

wenn sie durch die ursprünglichen Variablen X, X' ... ausgedrückt werden, homogen im Sinne des § 4 sind. Infolge dessen bleiben die drei reducirten Systeme von Differentialgleichungen, nämlich das System 6. 7. 8. O., ungeändert, wenn jede darin vorkommende Grösse mit der ihrer Dimension entsprechenden Potenz eines constanten Proportionalitäts-Factors multiplicirt wird.

§ 20.

Als nächste Aufgabe behandeln wir die Aufsuchung der zu dem System 7. O. gehörigen Integralgleichungen von der Form

$$G(t,\, q,\, q_\alpha,\, p_\alpha) \,.$$

Dass wenigstens eine solche Integralgleichung, nämlich die Bedingung für die Bewegung der drei Körper in einer Ebene, vorhanden ist, lässt sich von vornherein unschwer durch geome-

trische Überlegungen zeigen ; es kommt jedoch wesentlich darauf an nachzuweisen, dass nur diese eine existirt. Es sei φ eine irreductible ganze Function der acht Variablen t, q, q_α, p_α; schreibt man

$$q_4 = q_1 q_2 q_3 , \quad K = \frac{q_4 H_2 + q_4 h}{q_4 H_1} ,$$

so sind in K Zähler und Nenner von der Form $G(p, q)$ und man erkennt, dass der Ausdruck

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{\partial\varphi}{\partial q} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial K}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{1}{H_1}$$

durch Multiplication mit $(q_4 H_1)^2$ ebenfalls die Gestalt $G(p, q)$ annimmt. Wenn also φ eine Integralgleichung ist, so muss

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log\varphi}{dq} = \omega , \quad \omega = G(t, p, q)$$

sein. Wenn t in φ wirklich vorkommt, so können wir schreiben

$$\varphi = P_0 t^\nu + P_1 t^{\nu-1} + \ldots + P^\nu ,$$

wo ν mindestens gleich Eins ist. Bildet man, indem für den Augenblick t als unabhängige Variable genommen wird, die vollständige Ableitung von φ nach t, so ist diese nach t höchstens vom Grade ν, d. h. die logarithmische Ableitung frei von t. Hieraus ergeben sich, wenn

$$\frac{d \log\varphi}{dt} = \omega'$$

gesetzt wird, die Bedingungen

$$\frac{dP_0}{dt} = \omega' P_0 , \quad \nu P_0 + \frac{dP_1}{dt} = \omega' P_1 ,$$

also

$$\nu + \frac{d}{dt}\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = 0 ,$$

d. h. es wäre

$$\nu t + \frac{P_1}{P_0}$$

ein Integral des Systems 7. O. Da ein Integral dieser Form für die relativen Bewegungen der drei Körper, wie wir wissen, nicht existirt, so schliessen wir, das t in φ nicht vorkommt.

Durch die bereits mehrfach benutzte Betrachtungsweise zeigt man ferner, dass die Coefficienten in φ sich allemal dar-

stellen lassen müssen als algebraische Functionen der in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten m, a, b, h, k und eventuell gewisser, ausserdem noch auftretender constanter Parameter. Mit Rücksicht hierauf denken wir uns die Coefficienten in φ dargestellt als rationale Functionen jener Constanten und einer algebraisch von denselben abhängenden Irrationalität Γ, welche als Wurzel einer gewissen irreductiblen Gleichung definirt ist. Die Bedingung

$$(q_1 H_1)^2 \frac{d \log \varphi}{d q} = \omega$$

gilt dann für alle Wurzelwerthe Γ. Bilden wir jetzt die Summe über die den einzelnen Γ entsprechenden Bedingungen, so erhalten wir

$$(32) \qquad (q_1 H_1)^2 \frac{d \log \Phi}{d q} = \Omega ,$$

wo Φ das Product der einzelnen φ und Ω die Summe der einzelnen ω bedeutet. Die Φ und Ω sind dann von der Irrationalität Γ frei und wir können uns auf die Aufsuchung der Integralgleichungen von der Form Φ beschränken, da man von Φ rückwärts durch Zerlegung in Factoren zu den φ gelangt. Die Hinzufügung oder Unterdrückung constanter Factoren ist auf das Bestehen der Bedingung (32) offenbar ohne Einfluss; wir dürfen deshalb φ als eine ganze Function nicht bloss der Variablen p, q, sondern auch der Constanten m, a, b, h, k und der etwa auftretenden constanten Parameter c_1, c_2 ... voraussetzen und ferner annehmen, dass Φ keine von den Variablen p, q freien Theiler der Form

$$G(m, a, b, h, k, c_1, c_2 \ldots)$$

besitze. Der Ausdruck Ω ist dann sicher von der Form

$$G(p, q, h, h, c_1, c_2 \ldots) .$$

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass Φ parameterfrei ist. Wenn nämlich Φ einen Parameter — sagen wir c — enthält, so denken wir uns Φ nach c geordnet und

$$\Phi = \Phi_0 c^\nu + \Phi_1 c^{\nu-1} + \ldots + \Phi_\nu$$

geschrieben. Da Ω in c vom Grade Null ist, so erhalten wir

$$\Omega\,(q_1 H_1)^{-2} = \frac{d \log \Phi_0}{d q} = \frac{d \log \Phi_1}{d q} = \ldots ,$$

d. h. der Quotient zweier Φ_α ist ein rational aus den p, q ge-

bildetes Integral des System 7. O., reducirt sich also, da solche Integrale nicht existiren, auf eine Constante. Infolge dessen könnte ein Parameter c in Φ nur in einem von den Variablen p, q freien Theiler enthalten sein. Da solche Theiler von vornherein unterdrückt werden sollten, so ist Φ parameterfrei und deswegen auch homogen in den Dimensionen.

Der Ausdruck Φ kann den Theiler $q_1 H_1$ enthalten. Führen wir, wenn u, v zwei Functionen der Variablen p, q bedeuten, das bekannte Operationssymbol

$$(u, v) = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{\partial v}{\partial p_1} - \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} \right)$$

ein, so wird

$$\frac{d \log (q_1 H_1)}{dq} = \frac{\partial \log (q_1 H_1)}{\partial q} + \left(\log q_1 H_1 \, , \quad \frac{q_1 H_2 + q_1 h}{q_1 H_1} \right),$$

$$(q_1 H_1)^2 \frac{d \log (q_1 H_1)}{dq}$$

$$= q_1 H_1 \frac{\partial (q_1 H_1)}{\partial q} + (q_1 H_1 \, , \quad q_1 H_2 + q_1 h).$$

Hiernach können wir uns in Φ den etwa vorkommenden Theiler $q_1 H_1$ unterdrückt denken, ohne dass dadurch an der Bedingung (32) etwas Wesentliches geändert wird. Dies festgesetzt führen wir jetzt in Φ und Ω anstatt h die Variable p durch die Gleichung

$$h = - p H_1 - H_2$$

ein. Beide Ausdrücke bleiben dabei in Bezug auf q, p, p_α ganz rational, können dagegen in Bezug auf die q_α Nenner erhalten, welche jedoch nur Potenzen der q_α als Theiler besitzen. Geben wir, entsprechend der gemachten Substitution, von dem System 7. O. auf das 8. O. über und führen t als unabhängige Variable ein, so können wir schreiben

$$\frac{d \log \Phi}{dt} = \Omega : (q_1 H_1) = \Omega' ,$$

wo Ω', da Φ nicht den Theiler $q_1 H_1$ besitzt, im Nenner sicher nur Potenzen der q_α als Theiler enthält. Führen wir weiter für die p ihre in § 19 gegebenen linearen Ausdrücke durch die

$$\frac{dq}{dt}, \quad \frac{ds_\alpha}{dt}$$

ein, so werden Φ und Ω' ganze Functionen dieser Ableitungen

und enthalten in den Nennern als Theiler nur Potenzen von q_α, C, $\varDelta$ und W_2. Führt man endlich statt der q ... ihre Ausdrücke durch die rechtwinkligen, auf den Schwerpunkt und ein willkürlich gerichtetes Axensystem bezogenen Coordinaten und Geschwindigkeiten X, X' ... ein, und denkt sich auch die in q vorkommenden Grössen k_1, k_2, k_3, sowie die durch die Gleichung

$$\Sigma k_1^2 + k^2 = 0$$

bestimmte Quadradwurzel k durch die X, X' ... ausgedrückt, so wird Φ eine Integralgleichung der ursprünglichen Bewegungsgleichungen, welche die Form

$$R(X \ldots, X' \ldots, q_\alpha, k)$$

besitzt, im Nenner jedoch die Geschwindigkeiten nur in den vier Verbindungen k_α, k enthält. Das Gleiche gilt von der Form des Ausdruckes Ω'.

Es werde jetzt mit Φ_1 das Product derjenigen Theiler im Zähler von Φ bezeichnet, welche sich, als Functionen der X' ... betrachtet, nicht durch die k_α, k allein ausdrücken lassen, und es sei

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2\,, \quad \frac{d \log \Phi_1}{dt} = \Omega_1\,, \quad \frac{d \log \Phi_2}{dt} = \Omega_2\,,$$

dann ist Ω_2 genau von derselben Form wie Ω' und dasselbe gilt wegen

$$\Omega_1 = \Omega' - \Omega_2$$

auch von Ω_1. Weiter erkennt man, dass wegen der über Φ_1 gemachten Festsetzungen Ω_1 in Wirklichkeit im Nenner nur Potenzen der q_α als Theiler enthalten kann; Φ_1 ist also, wenn es sich nicht etwa auf eine Constante reducirt, eine Integralgleichung für die Bewegung relativ um den Schwerpunkt. Schreibt man mit Rücksicht auf die Irrationalität k

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + k\Phi_{12}\,,$$
$$\Omega_1 = \Omega_{11} + k\,\Omega_{12}\,,$$
$$\Phi_{11} \text{ und } \Phi_{12} = G(X, X' \ldots, q_\alpha),$$
$$q_1^3\,\Omega_{11} \text{ und } q_1^3\,\Omega_{12} = G(X, X' \ldots q_\alpha)\,,$$

so ist, da die Bedingung

$$\frac{d \log}{dt}(\Phi_{11} + k\Phi_{12}) = \Omega_{11} + k\,\Omega_{12}$$

für beide Vorzeichen von k gilt,

$$\frac{d \log}{dt} (\Phi_{11}^2 - k^2 \Phi_{12}^2) = 2\Omega_{11} .$$

Das Product

(33) $$(\Phi_{11} + k\Phi_{12})(\Phi_{11} - k\Phi_{12})$$

ist also eine homogene Integralgleichung von der früher behandelten Art und ist deshalb, da es sich hier nur um die relative Bewegung handelt, in der Form

$$G(X, Y, Z, q_\alpha)\ G(k_1, k_2, k_3, h)$$

darstellbar. Eliminirt man also in dem Producte (33) mittelst der Gleichungen

$$0 = \Sigma m_1 X_1' = \Sigma m_1 Y_1' = \Sigma m_1 Z_1'$$

und der Ausdrücke für die k_α, k sieben von den neun Grössen X', Y', Z', so müssen die beiden anderen von selbst mit herausfallen; dies ist aber nicht anders möglich, als wenn jeder der beiden Factoren jenes Productes einzeln durch die angegebene Elimination von sämmtlichen X', Y', Z' gleichzeitig befreit wird. Hiernach kann also die gesuchte Integralgleichung Φ, wenn man wieder auf die Variabeln des Systems 7. O. zurückgeht, nur die vier Variabeln q enthalten oder muss m. a. W. frei von den p_α sein.

§ 21.

Unsere Aufgabe ist jetzt darauf zurückgeführt, eine von den p_α freie Lösung Φ der Form $G(q, q_\alpha)$ zu der Bedingung

$$(q_1 H_1)^2 \frac{d \log \Phi}{dq} = \Omega , \quad \Omega = G(q, q_\alpha, p_\alpha)$$

zu suchen. Zunächst ist

$$\Omega = (q_1 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + (q_1 H_1)^2 \left(\log \Phi, \frac{H_2 + h}{H_1}\right)$$

$$= (q_1 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_1^2 H_1 (\log \Phi, H_2 + h) - q_1^2 (H_2 + h)(\log \Phi, H_1).$$

Diese Gleichung zeigt, dass Ω in den p_α höchstens vom zweiten und in den q_α höchstens vom vierten Grade ist. Wir spalten Ω nach der Ordnung der einzelnen Glieder in Bezug auf die p_α in die drei Bestandtheile

$$\Omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 ,$$

wo der Index die Ordnung nach den p angiebt, und führen statt der p_α die r_α durch die Relationen

$$p_\alpha = r_\alpha\, q_\alpha$$

ein. Hiermit werden ω_1 und ω_2 nach den q_α höchstens vom 5ten, resp. 6ten Grade. Weiter wird, wenn man entwickelt,

$$\omega_0 = q_1^2\,(U - h)(\log \Phi,\, H_1)\ ,$$
$$\omega_1 = kq_1^2\, H_1(\log \Phi,\, L_1 - q\,M_2) - kq_1^2\,(L_1 - q\,M_2)\,(\log \Phi,\, H_1)\ ,$$
$$\omega_2 = (q_1\, H_1)^2\,\frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_1^2\, H_1\,(\log \Phi,\, L_2) - q_1^2\, L_2\,(\log \Phi,\, H_1)\ ,$$

wobei zu beachten ist, dass das Symbol $(u,\, v)$ auch in der Form

$$\sum\left(\frac{\partial u}{\partial s_1}\,\frac{\partial v}{\partial r_1} - \frac{\partial v}{\partial s_1}\,\frac{\partial u}{\partial r_1}\right)$$

geschrieben werden kann. Bei der Integration der drei Bedingungen für Φ wollen wir der besseren Uebersicht halber folgende Abkürzungen und Relationen benutzen:

$$E = \Sigma\, a_2\, a_3\, s_1\ ,\quad F = -\,\Sigma\,(a_2\, b_3 + a_3\, b_2)\, s_1\ ,\quad G = \Sigma\, b_2\, b_3\, s_1\ ,$$
$$C + \mu_0\, E + \mu_1\, F + \mu_2\, G = 0\ ,$$
$$(C,M_0)=0\,,\ (E,M_0)=0\ ,\ (F,M_0)=\mu_2\ ,\ (G,M_0)=-\,\mu_1\ ,$$
$$(C,M_1)=0\,,\ (E,M_1)=-\,\mu_2\ ,\ (F,M_1)=0\ ,\ (G,M_1)=\mu_0\ ,$$
$$(C,M_2)=0\,,\ (E,M_2)=\mu_1\ ,\ (F,M_2)=-\,\mu_0\ ,\ (G,M_2)=0\ ,$$
$$(C,H_1)=0\,,\ (E,H_1)=-\mu_2 q+\mu_1 q^2,\ (F,H_1)=\mu_2-\mu_0 q^2,\ (G,H_1)=-\mu_1+\mu_0 q,$$
$$(C,L_1)=m,\ (E,L_1)=0\ ,\ (F,L_1)=\mu_1\ ,\ (G,L_1)=-\,\mu_0\ ,$$
$$(C,\, L_2) = 2m\, C'\ ,$$
$$(E,\, L_2) = -\,\mu_2\, C' + ED' + C\Sigma\, a_1\, a_1\, r_1\ ,$$
$$(F,\, L_2) = 2\mu_1\, C' + FD' - 2\,C\,\Sigma\, a_1\, b_1\, r_1\ ,$$
$$(G,\, L_2) = -\,\mu_0\, C' + GD' + C\Sigma\, b_1\, b_1\, r_1\ ,$$
$$Q = E + Fq + Gq^2$$
$$= \Sigma\, s_1\,(a_2 - b_2\, q)\,(a_3 - b_3\, q)\ ,$$
$$(Q,\, M_0) = \mu_2\, q - \mu_1\, q^2\ ,$$
$$(Q,\, M_1) = -\,\mu_2 + \mu_0\, q^2\ ,$$
$$(Q,\, M_2) = \mu_1 - \mu_0\, q\ ,$$
$$(Q,\, H_1) = 0\ ,$$
$$(Q,\, L_1) = \mu_1\, q - \mu_0\, q^2\ ,$$
$$(Q,\, L_1 - q\,M_2) = 0\ ,$$

$$(Q, L_2) = QD' + \Sigma(a_1 - b_1 q)^2 \left(Cr_1 - \frac{C'}{m_1}\right)$$
$$= QD' - Q\frac{\partial H_1}{\partial q} - H_1\frac{\partial Q}{\partial q} .$$

Die erste von den drei Bedingungen für Φ nimmt mit der Abkürzung

$$q_4(U - h) = V , \quad V = G(q_\alpha)$$

die Gestalt

$$\omega_0 = q_4 V(\log \Phi, H_1) = V\Sigma A_1 q_2 q_3 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q_1}$$

an. Da Φ möglicherweise durch V theilbar ist, so setzen wir an

$$\Phi = \Psi . V^\varrho , \quad \Psi = G(q, q_\alpha) ,$$

mit dem Zusatze, dass Ψ nicht durch V theilbar sein soll. Wir erhalten dann

$$q_4(\log \Psi, H_1) = \frac{\omega_0 - \varrho q_4 (V, H_1)}{V} .$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann, entwickelt, im Nenner nicht den Theiler V enthalten, folglich ist der Zähler der rechten Seite durch V theilbar, also die rechte Seite in den q_α höchstens vom ersten Grade, so dass wir ansetzen dürfen

$$q_4(\log \Psi , H_1) = \omega_{00} + \sum_\alpha \omega_{0\alpha} q_\alpha ,$$

wo die Coefficienten rechts nur noch von q abhängen. Führt man in diese partielle Differentialgleichung an Stelle der q_α die Variablen q_1, C und Q ein, so wird

$$A_1 q_2 q_3 \frac{\partial \log \Psi}{d q_1} = \omega_{00} + \sum_\alpha \omega_{0\alpha} q_\alpha ,$$

$$A_1 \log \Psi = \omega_{00} \int \frac{dq_1}{q_2 q_3} + \sum_\alpha \omega_{0\alpha} \int \frac{q_\alpha dq_1}{q_2 q_3} ,$$

wo bei den Quadraturen q_2 und q_3 durch q_1, C, Q ausgedrückt zu denken sind. Die erste Quadratur führt auf elliptische Integrale, welche in log Ψ nicht vorkommen dürfen, d. h. es ist ω_{00} gleich Null. Die drei anderen Quadraturen führen auf Logarithmen und lassen sich, wie leicht verificirt werden kann, in der Form

$$A_1\sigma_1 \log\left(\frac{q_2}{\sqrt{A_2}}+\frac{q_3}{\sqrt{A_3}}\right),\quad A_1\sigma_2 \log\left(\frac{q_3}{\sqrt{A_3}}+\frac{q_1}{\sqrt{A_1}}\right),$$
$$A_1\sigma_3 \log\left(\frac{q_1}{\sqrt{A_1}}+\frac{q_2}{\sqrt{A_2}}\right)$$

schreiben, wo die σ wegen der Beschaffenheit von Ψ nothwendiger Weise ganze Zahlen sind. Setzt man nun

$$\log\Psi = \sum \sigma_1 \log\left(\frac{q_2}{\sqrt{A_2}}+\frac{q_3}{\sqrt{A_3}}\right) + f(q,\, C,\, Q)\ ,$$

so ergiebt die Substitution in die Differentialgleichung die Relationen

$$\omega_{0\alpha} = \sqrt{A_1A_2A_3}\cdot\frac{\sigma_\alpha}{\sqrt{A_\alpha}}\ ,$$

d. h. entgegen den für ω bestehenden Voraussetzungen irrationale Ausdrücke. Die σ und $\omega_{0\alpha}$ müssen deshalb verschwinden und es ist Ψ als Function der drei Grössen q, C, Q allein darstellbar. Setzt man nun in dem ursprünglichen Ausdrucke für Ψ an Stelle von q_2 und q_3 ihre Ausdrücke durch q_1, C, Q, so muss q_1 von selbst herausfallen; entwickelt man andererseits q_2, q_3 und dann Ψ nach fallenden Potenzen von q_1, so erkennt man, dass Ψ die Gestalt $G(C,\, Q)$ besitzt, also in der ursprünglichen Gestalt nur die Quadrate der q_α enthielt. Mit Rücksicht hierauf kann man zunächst schreiben

$$\Psi = G(q,\, E,\, F,\, G)\ .$$

Eliminirt man hieraus abwechselnd eines der drei Paare FG, GE, EF mittelst der drei Gleichungen

$$\begin{aligned} E\mu_0 + F\mu_1 + G\mu_2 &= -C\ ,\\ E + Fq + Gq^2 &= Q\ ,\end{aligned}$$

so muss die dritte Grösse E oder F oder G jedesmal von selbst mit herausfallen. Als Nenner können bei den drei so entstehenden Formen für Ψ nur Potenzen von

$$\mu_1 q^2 - \mu_2 q\ ,\quad \mu_2 - \mu_0 q^2\ ,\quad \mu_0 q - \mu_1$$

auftreten. Diese Nenner müssen jedoch, da sie keine gemeinsamen Theiler besitzen, sich in Wirklichkeit jedesmal fortheben, d. h. es ist

$$\Psi = G(q,\, C,\, Q)\ ,\quad \Phi = \Psi\colon \sqrt{\varrho}\ .$$

§ 22.

Mit dem gefundenen Ausdrucke für Ψ gehen wir jetzt in die zweite der aufgestellten Bedingungen ein und erhalten zunächst

$$\omega_1 = \frac{k\varrho\, q_1^2}{V}\{H_1(V, L_1 - qM_2) - (L_1 - qM_2)(V, H_1)\}$$

$$+ kq_1^2\{H_1(\log\Psi, L_1 - qM_2) - (L_1 - qM_2)(\log\Psi, H_1)\} .$$

Die erste, V enthaltende Klammer $\{\}$ ist nicht durch V theilbar, wie man schon durch Betrachtung der Glieder erkennt, welche die in V vorkommende Grösse h enthalten. Da andererseits die übrigen Glieder der Differentialgleichung V nicht im Nenner enthalten können, so muss die genannte Klammergrösse in Wirklichkeit fehlen, d. h. ϱ gleich Null sein, also

$$\Psi = \Phi .$$

Hiermit geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{\omega_1}{kq_1^2 H_1} = \frac{\partial\log\Phi}{\partial C}(C, L_1 - qM_2) + \frac{\partial\log\Phi}{\partial Q}(Q, L_1 - qM_2)$$

$$= m\frac{\partial\log\Phi}{\partial C} .$$

Die linke Seite muss von q_1 unabhängig werden, sobald man für q_2 und q_3 ihre Ausdrücke durch q_1, C, Q einführt. Entwickelt man nun wie vorhin wieder nach fallenden Potenzen von q_1, so kann, da ω_1 nach den q_α höchstens vom fünften Grade ist, überhaupt kein von q_1 freies Glied auftreten, d. h. es wird

$$0 = \frac{\partial\log\Phi}{\partial C} , \quad \Phi = G(q, Q) .$$

Hiermit gehen wir jetzt in die dritte Differentialgleichung ein, wobei zu beachten ist, dass in Φ q theils explicite, theils implicite, nämlich in Q, vorkommt, und schreiben demgemäss

$$\omega_2 = (q_1 H_1)^2\left\{\frac{\partial\log\Phi}{\partial q} + \frac{\partial\log\Phi}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}\right\} + q_1^2 H_1\frac{\partial\log\Phi}{\partial Q}(Q, L_2)$$

$$= (q_1 H_1)^2\frac{\partial\log\Phi}{\partial q} + q_1^2 H_1\frac{\partial\log\Phi}{\partial Q}\left\{D' + \frac{\partial H_1}{\partial q}\right\}Q .$$

Der Quotient $\omega_2 : q_1^2$ muss, wenn wieder die q_1, C, Q eingeführt werden, von q_1 frei werden. Entwickelt man nach fallenden Potenzen von q_1, so wird, wie man erkennt, das von

q_1 freie Glied auch frei von C und Q, d. h. der Quotient ist nur von q und den r_α abhängig. Andererseits ist ω_2 durch H_1 theilbar, wir dürfen also schreiben

$$\omega_2 = q_1^2 H_1 \sum_\alpha \omega_{2\alpha} r_\alpha \ , \quad \omega_{2\alpha} = G(q) \ ,$$

$$\sum_\alpha \omega_{2\alpha} r_\alpha = H_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q}\left(D' + \frac{\partial H_1}{\partial q}\right) .$$

Diese Gleichung zerfällt sofort in die drei andern

$$\omega_{21} = A_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{dA_1}{dq}\right) ,$$

. . . .

aus denen wir

$$\omega_{22} A_3 - \omega_{23} A_2 = \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q} \begin{vmatrix} \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} + \frac{dA_2}{dq} \ , & A_2 \\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{dA_3}{dq} \ , & A_3 \end{vmatrix}$$

. . . .

bilden. Hiernach besteht Φ aus einer Potenz von Q, multiplicirt mit einer Function von q allein. Setzen wir demgemäss

$$\Phi = W Q^\varrho \ , \quad W = G(q) \ ,$$

so wird

$$\omega_{21} = A_1 \frac{\partial \log W}{\partial q} + \varrho\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{dA_1}{dq}\right) ,$$

. . . .

Denkt man sich W nach q in Linearfactoren zerlegt, so muss jeder derselben, da die A_α und $\omega_{2\alpha}$ die Form $G(q)$ besitzen, Theiler von A_1 A_2, A_3 sein. Da nun die A_α keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so reducirt sich W auf eine Constante und es wird

$$\Phi = Q^\varrho \ .$$

Fassen wir die bisherige Untersuchung zusammen und beachten, dass Q irreductibel ist, so gelangen wir zu dem Resultat, dass die Bedingung

$$(q_1 H_1)^2 \frac{d \log \varphi}{dq} = \omega \ , \quad \omega = G(q, q_\alpha, p_\alpha) \ ,$$

nur die beiden irreductiblen Lösungen

$$\varphi = q_1 H_1 \ , \quad \varphi = Q$$

zulässt. Von diesen liefert nur Q eine wirkliche Integralgleichung, entsprechend der Relation

$$\frac{dQ}{dt} = Q\left(D' + \frac{\partial H_1}{\partial q}\right),$$

während $q_1 H_1$ nur als Integralgleichung erscheint, wenn q als unabhängige Variable gewählt wird, wie aus der Relation

$$\frac{d(q_1 H_1)}{dt} = H_1 \frac{\partial (q_1 H_1)}{\partial q} + \frac{1}{q_1}(q_1 H_1, q_1 H_2 + q_1 h)$$

hervorgeht, deren rechte Seite, wie man sich leicht überzeugt, nicht durch H_1 theilbar ist.

Die geometrische Bedeutung des Verschwindens von Q lässt sich leicht angeben. Aus der Form des Ausdruckes für q durch die auf die invariable Ebene bezogenen Coordinaten x, y folgt nämlich, dass q sich algebraisch durch die Seiten des Dreiecks ausdrücken lässt, welches die Projectionen der drei Körper auf die invariable Ebene mit einander bilden. Bewegen sich nun die drei Körper in einer Ebene, d. h. also in der invariablen Ebene des Systems, so fallen die drei Seiten des genannten Dreiecks mit den q_α zusammen, und man erhält durch Rationalmachen der so zwischen den q, q_α entstehenden Gleichung genau die Bedingung $Q = 0$. Dieselbe besagt also, dass die drei Körper sich in einer Ebene bewegen.

§ 23.

Am Schlusse der früheren Mittheilung war als nächster Schritt in dem hier bei der Untersuchung über die Integrale des Vielkörper-Problems befolgten Gedankengange die Beantwortung der Frage bezeichnet worden, ob Integrale existiren, welche durch Quadratur über algebraische Ausdrücke gebildet sind. Wir fragen also jetzt, indem wir wieder das System 7. O. zu Grunde legen, ob ein Integral der Form

$$\varphi = \int \left((J(t)\, dt + J(q)\, dq + \sum_\alpha J(q_\alpha)\, dq_\alpha + \sum_\alpha J(p_\alpha)\, dp_\alpha \right)$$

existirt, in welchem der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein totales Differential und die $J(t)$, $J(q)$ ... algebraische Functionen der acht Variablen t, q ... sind. Ausdrücke dieser Art können wir füglich als Abel'sche Quadraturen und, wenn sie ein Integral unserer Differentialgleichungen liefern, als Abel'sche

Integrale des vorgelegten Problems bezeichnen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Quadratur ein Integral liefert, ist mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{1}{H_1} = \frac{\partial K}{\partial h}$$

durch das identische Verschwinden des Ausdruckes

$$J(q) + J(t)\frac{\partial K}{\partial h} + \sum_{\alpha}\left(J(q_\alpha)\frac{\partial K}{\partial p_\alpha} - J(p_\alpha)\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}\right)$$

gegeben.

Die $J(t)$ ... denken wir uns dargestellt als rationale Functionen der Variablen und einer einzigen, durch eine irreductible Gleichung definirten Irrationalität γ. Weiter denken wir uns in den $J(t)$ ... die Irrationalität aus den Nennern fortgeschafft und die Zähler nach γ auf den niedrigsten Grad gebracht. Dann beweist man durch die wiederholt angewandte Betrachtungsweise, dass in den $J(t)$ ... und in der Gleichung für γ die Constanten der Differentialgleichungen, nämlich m, a, b, h, k, sowie die etwa auftretenden constanten Parameter nur algebraisch auftreten, dass ferner φ als parameterfrei und infolge dessen auch als homogen in den Dimensionen vorausgesetzt werden darf. Dies festgestellt, gehen wir jetzt dazu über, das Verhalten von φ an den Stellen zu untersuchen, wo φ, als Function einer der Variablen betrachtet, einen Pol (Unendlichkeitspunkt) oder einen Verzweigungspunkt oder beides zugleich besitzt.

Es seien σ, σ_1 ... die acht Variablen, in willkürlicher Reihenfolge geordnet. Man entwickle $J(\sigma)$ nach steigenden Potenzen von $\sigma - \tau$, wo τ einen constanten Werth oder auch eine algebraische Function der σ_1, σ_2 ... bedeutet, dann enthält die Entwickelung, von besonderen Werthen der Grösse τ abgesehen, im Allgemeinen nur ganze positive Potenzen. Wir wollen jedoch die möglichen Grenzfälle sogleich mit berücksichtigen und denken uns die Reihe für $J(\sigma)$ als nicht nur ganze positive, sondern auch gebrochene und eine endliche Anzahl von negativen Potenzen enthaltend. Die Coefficienten sind algebraische Functionen der σ_1, σ_2 ... und, so lange specielle Werthsysteme der σ_1, σ_2 ... ausgeschlossen bleiben, so beschaffen, dass die Reihe, ohne Zerstörung der Convergenz, nach den σ_1, σ_2 ... differentiirt werden kann. Die für $J(\sigma)$ gewonnene Reihe integriren wir gliederweise nach σ in der Art,

dass man, abgesehen von dem etwa vorkommenden logarithmischen Gliede, wiederum eine nach $\sigma - \tau$ fortschreitende Reihe, jedoch ohne constantes Glied, erhält. Diese neue Reihe, einschliesslich des logarithmischen Gliedes, heisse $\varphi(\sigma)$, dann darf sich $\varphi(\sigma)$ von φ nur um einen von σ unabhängigen Ausdruck unterscheiden. Bildet man

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_1}(\varphi - \varphi(\sigma)) = J(\sigma_1) - \frac{\partial \varphi(\sigma)}{\partial \sigma_1}$$

und denkt sich $J(\sigma_1)$ ebenfalls nach $\sigma - \tau$ entwickelt, so erkennt man, dass der Coefficient des logarithmischen Gliedes von σ_1 und ebenso von σ_2 ... unabhängig, also constant sein muss, und dass die rechte Seite sich auf eine algebraische Function von σ_1 ... reducirt. Schreiben wir also

$$\varphi = \varphi(\sigma) + \varphi'(\sigma) ,$$

so ist φ' durch eine Abel'sche Quadratur gegeben.

Die vorstehend gewonnene Reihenentwickelung für φ werde jetzt folgendermassen gespalten. Man vereinige zunächst zu einem Ausdrucke $\varphi(\sigma)_0$ alle ganzen Potenzen nebst dem logarithmischen Gliede und dem Term φ'. Aus dem nur gebrochene Potenzen enthaltenen Reste greifen wir das niedrigste Glied heraus und vereinigen damit zu einem Ausdrucke $\varphi(\sigma)_1$ alle Glieder, deren Exponent sich von dem des niedrigsten Gliedes um ganze Zahlen unterscheidet. Aus dem dann noch verbleibenden Reste spalten wir in gleicher Weise ein $\varphi(\sigma)_2$, $\varphi(\sigma)_3$ ... ab, bis alle Glieder erschöpft sind, was nach einer endlichen Zahl von Spaltungen der Fall ist. Wir haben dann

$$\varphi = \varphi(\sigma)_0 + \varphi(\sigma)_1 + \cdots .$$

Diesen Ausdruck differentiiren wir vollständig nach q, wobei wir uns den Ausdruck für K' ebenfalls nach Potenzen von $\sigma - \tau$ entwickelt denken. Letztere Entwickelung enthält nur ganze Potenzen, und negative nur dann, wenn für $\sigma = \tau$ der Ausdruck $q_1 H_1$ verschwindet. Die vollständig entwickelte Ableitung erscheint zunächst ebenfalls als Potenzreihe und man erkennt sofort, dass die aus den Ausdruck $\varphi(\sigma)_0$, $\varphi(\sigma_1)$ ... entspringenden Reihen einzeln für sich verschwinden müssen, dass also die $\varphi(\sigma)_0$ ... einzeln für sich Integrale sind, und zwar Abel'sche Integrale, da sie sich linear mit constanten Coefficienten aus den verschiedenen Zweigen zusammensetzen lassen, welche die Function φ an der Stelle $\sigma = \tau$ besitzt. Weiter erkennt man,

wenn die verlangte Differentiation und Entwickelung an den Anfangsgliedern der einzelnen $\varphi(\sigma)$ ausgeführt wird, dass in $J(\sigma)$ negative oder gebrochene Potenzen höchstens dann auftreten können, wenn entweder K' negative Potenzen enthält, also für $\sigma = \tau$ der Ausdruck $q_1 H_1$ verschwindet, oder wenn die Entwickelung von

$$\frac{d}{dq}(\sigma - \tau)$$

kein von $\sigma - \tau$ freies Glied enthält, wenn also diese Ableitung für $\sigma = \tau$ verschwindet, d. h. $\sigma - \tau$ eine Integralgleichung ist. Hiernach erhalten wir also für den Ausdruck $J(\sigma)$, wenn derselbe als Function von σ betrachtet wird, alle im Endlichen liegenden Pole und Verzweigungspunkte durch die beiden Bedingungen

$$q_1 H_1 = 0 \;, \quad Q = 0 \;.$$

Geht man, um das Verhalten von φ für sehr grosse Werthe von σ zu ermitteln, von der Entwicklung des Ausdruckes $J(\sigma)$ nach fallenden Potenzen von σ aus, so kann man genau so wie vorhin ein $\varphi(\sigma)$ bilden, dies durch Hinzufügen einer Abel'schen Quadratur $\varphi'(\sigma)$ zu φ ergänzen und dann in die Bestandtheile $\varphi(\sigma)_0$, $\varphi(\sigma)_1$ ... spalten, welche einzeln wiederum Integrale sind. Differentiirt man dann vollständig nach q, so ergibt sich, dass positive oder gebrochene Potenzen oder ein logarithmisches Glied in φ sicher nicht auftreten, wenn die Ausdrücke

$$\frac{\partial K'}{dh}\,, \quad \frac{\partial K'}{dq_\alpha}\,, \quad \frac{\partial K'}{dp_\alpha}$$

nach σ entwickelt, die Form

$$\frac{P_0}{\sigma^2} + \frac{P_1}{\sigma^3} + \frac{P_2}{\sigma^4} + \dots$$

besitzen. Diese besondere Form findet statt, wenn σ die Variable q vertritt.

§ 24.

Nachdem wir die vorstehenden Sätze gewonnen haben, nehmen wir die $J(\sigma)$ einzeln vor. Es wird sich dabei zeigen, dass dieselben sämmtlich rationale Functionen der Variablen sein müssen. Wir beginnen mit $J(t)$. Da die Variable t in den beiden Bedingungen

$$q_1 H_1 = 0 \;, \quad Q = 0$$

nicht auftritt, so folgt, dass $J(t)$ für endliche Werthe von t weder verzweigt ist noch unendlich wird, also die Form $G(t)$ besitzt. Hieraus folgt für φ die Form

$$\varphi = P_0 t^n + P_1 t^{n-1} + \cdots + P_n ,$$

und ferner

$$\frac{dP_0}{dq} = 0 , \quad nP_0 \frac{dt}{dq} + \frac{dP_1}{dq} = 0 , \quad \text{etc.}$$

woraus wir ähnlich wie in § 20 schliessen, dass n gleich Null ist, d. h. φ die Variable t überhaupt nicht enthält. Wählen wir ferner für σ die Variable p_1, so folgt, da Q die p_α nicht enthält, dass $J(p_1)$ im Endlichen nur einen Verzweigungspunkt resp. Pol besitzen kann, nämlich

$$p_1 = p_{10} = -(A_2 q_3 q_1 p_2 + A_3 q_1 q_2 p_3) : A_1 q_2 q_3 .$$

Hiernach ist $J(p_1)$ ein Aggregat aus einer endlichen Zahl von Potenzen der Differenz $p_1 - p_{10}$; die $\varphi(p_1)_1$, $\varphi(p_1)_2$ ... würden dann, wenn sie vorkämen, auf algebraische Integrale führen, müssen also in Wirklichkeit fehlen, d. h. φ muss sich auf $\varphi(\sigma)_0$ reduciren. Hieraus folgt, dass $J(p_1)$ eine rationale Function von p_1 ist, deren Nenner nur die Theiler $p_1 - p_{10}$ besitzt. Das Integral φ besitzt also die Form

$$R(p_1) + P \log (p_1 - p_{10}) , \quad P = \text{constans}.$$

Hiermit ergibt sich, dass sämmtliche $J(\sigma)$ rationale Functionen von p_1 und ebenso von p_2 und p_3 sind, deren Nenner nur Theiler von der Form $q_4 H_1$ besitzen. Für φ ergibt sich daraus die Form

$$\varphi = P \log (q_4 H_1) + P_1 + P_2 ,$$

wo P eine Constante, P_1 eine von den p_α freie Abel'sche Quadratur und P_2 einen von den p_α rational, von den q, q_α algebraisch abhängenden Ausdruck bedeutet. Aus der vorstehenden Form ergibt sich, dass $J(q)$ als Function von q betrachtet, als Verzweigungspunkte, nur die beiden aus

$$Q = G(q - g_1)(q - g_2)$$

sich ergebenden Stellen g_1, g_2 besitzt, während die beiden aus

$$q_4 H_1 = q_4 M_2 (q - g_3)(q - g_4)$$

folgenden Stellen g_3, g_4 nur als Pole auftreten können; die Stelle $q = \infty$ ist, wie oben bemerkt wurde, weder Verzweigungspunkt noch Pol. Setzt man

$$\frac{q-g_1}{q-g_2}=u\,,\quad J(q)\,dq=J(u)\,du\,,$$

so sind die Verzweigungspunkte von $J(u)$ durch

$$u=0\,,\; u=\infty\,,$$

und die ausserdem noch vorhandenen Pole u_3, u_4 durch

$$u_3=\frac{g_3-g_1}{g_3-g_2}\,,\quad u_4=\frac{g_4-g_1}{g_4-g_2}$$

bestimmt. Multiplicirt man nun $J(u)$ mit solchen ganzen Potenzen von

$$u-u_3 \text{ resp. } u-u_4\,,$$

dass das Product an den Stellen u_3, u_4 nicht mehr unendlich wird, so ist dieses Product als ein endliches Aggregat von Gliedern der Form

$$c\,u^\nu$$

darstellbar, wo die ν rationale Zahlen bedeuten. Setzt man daher

$$u=v^\lambda\,,\quad J(u)\,du=J(v)\,dv\,,$$

wo λ eine passend gewählte ganze Zahl ist, so besitzt $J(v)$ die Gestalt $R(v)$ und enthält im Nenner als Theiler nur v und die aus

$$v^\lambda-u_3\,,\quad v^\lambda-u_4$$

entspringenden linearen Theiler, welche mit

$$v-u_{31}\,,\quad v-u_{32}\,\ldots\,,$$
$$v-u_{41}\,,\quad v-u_{42}\,\ldots$$

bezeichnet werden sollen. Die Integration nach v liefert φ in der Form

$$\varphi=c\log v+\sum_\varepsilon c_{3\varepsilon}\log(v-u_{3\varepsilon})$$
$$+\sum_\varepsilon c_{4\varepsilon}\log(v-u_{4\varepsilon})+U_1+U_2\,.$$

Hierin sind die c Constanten, U_1 von der Form $R(v)$ und U_2 eine von v freie Abel'sche Quadratur. Vergleichen wir diese Form mit oben gegebenen, nämlich

$$\varphi=P\log(q_4H_1)+P_1+P_2\,,$$

so folgt, dass die mit den Coefficienten $c_{3\varepsilon}$, $c_{4\varepsilon}$ versehenen Logarithmen nur aus der Zerlegung des Terms

$$P\log q_4H_1=P\log\{q_4M_2(q-g_3)(q-g_4)\}$$

entspringen können, dass also die $c_{3\varepsilon}$, $c_{4\varepsilon}$ sämmtlich einander gleich sind. Hieraus folgt, dass sich φ in der Form

$$\varphi = e_1 \log(q - g_1) + e_2 \log(q - g_2) \\ + e_3 \log q_4 H_4 + U_1' + U_2'$$

schreiben lässt, wo für die e, U' dieselben Eigenschaften gelten, wie für die c, U. Stellt man nun, von der zuletzt gefundenen Form für φ ausgehend, die Entwickelung von φ nach Potenzen von $q - g_1$ oder $q - g_2$ auf, so erkennt man, dass die $\varphi(q)_1$, $\varphi(q)_2$ ... nur aus gewissen in U_1' vorkommenden Bestandtheilen entspringen können, also, wenn sie vorkämen, rein algebraisch sein müssten. Hiernach reducirt sich φ in beiden Fällen auf den Bestandtheil $\varphi(q)_0$, d. h. $J(q)$ und damit sind die übrigen J von der Form $R(q)$.

Der Ausdruck $J(q_1)$ ist in q und den p_α rational, kann also, als Function von q_1 betrachtet, im Endlichen nur Verzweigungspunkte besitzen, welche von den Variablen q, p_α unabhängig sind. Da solche nicht existiren, so ist $J(q_1)$ von der Form $R(q_1)$. Das Gleiche gilt für alle anderen J und ebenso für die Variablen q_2, q_3. Hiermit haben wir, wenn wir zusammenfassen, das Resultat gewonnen, dass in dem gesuchten Abel'schen Integral, falls dasselbe existirt, die $J(q)$ ... sämmtlich die Gestalt

$$R(q, q_\alpha, p_\alpha)$$

besitzen, dass ferner die Nenner als Theiler nur die Ausdrücke $q_4 H_4$ und Q besitzen, dass also φ in der Form

$$\varphi = R(q, q_\alpha, p_\alpha) + c' \log q_4 H_4 + c'' \log Q$$

darstellbar ist. Da die Entwickelung von φ nach fallenden Potenzen von q kein logarithmisches Glied besitzt, so ist

$$c' + c'' = 0 ,$$

so dass wir auch schreiben können

$$\varphi = \frac{G(q, q_\alpha, p_\alpha)}{(q_4 H_4)^\lambda Q^\mu} + c \log \frac{q_4 H_4}{Q} .$$

§ 25.

Die Untersuchung hat uns jetzt zu der Frage geführt, ob das System 7. O. ein Integral von der Form

$$\varphi = R(q, q_\alpha, p_\alpha) + c \log \frac{q_4 H_4}{Q}$$

besitzt, in welchem, wenn φ sich nicht auf eine Constante reduciren soll, der Factor c von Null verschieden sein muss, also

gleich Eins gesetzt werden darf. Bezeichnen wir die beiden Bestandtheile von φ der Kürze halber mit φ_1 und φ_2, so darf der rationale Term φ_1 als algebraisch aus den Constanten m, a, b, k, h gebildet vorausgesetzt werden. Bringt man nämlich φ_1 zunächst auf die Form

$$R(m, a, b, k, h, \Gamma) ,$$

wo Γ eine von den m ... abhängende Irrationalität bedeutet, und stellt dann φ_1 in der Form

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \varphi_{11}\Gamma + \varphi_{12}\Gamma^2 + \cdots$$

unter möglichster Herabdrückung des Grades in Bezug auf Γ dar, so müssen die φ_{11}, φ_{12} ... sich auf Constanten reduciren. Man darf deshalb die mit Γ multiplicirten Terme unterdrücken oder φ_1 als rational aus den m, a, b, k, h gebildet voraussetzen. Dies festgestellt führen wir an Stelle von h die Variable p durch die Gleichung

$$0 = h + pH_1 + H_2$$

ein, und erhalten dann φ_1 in der Form

$$R(p, q, p_\alpha, q_\alpha) :$$

während φ in ein Integral des Systems 8. O. übergeht.

In dem System 8. O. lässt sich nun die allgemeine Lösung durch Reihen, welche nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreiten, darstellen, indem man die p, q nach dem Taylor'schen Satze mit Hülfe der Differentialgleichungen entwickelt. Diese Reihen convergiren innerhalb eines bestimmten Bereiches für t, sobald man festsetzt, dass für $t = 0$ die Variablen endliche, und im Besondern die q_α von Null verschiedene Werthe besitzen. Substituirt man diese Reihenentwickelungen in den Zähler Z und den Nenner N von φ_1 und ebenso in $q_1 H_1$ und Q, so erhält man ähnliche Potenzreihen. Die Coefficienten sind sämmtlich nach den p, q, p_α ganz rational, nach den q_α dagegen rational, jedoch so, dass in den Nennern als Theiler nur die q_α auftreten. Der so entstehende Ausdruck

$$\frac{Z}{N} + \log\frac{q_1 H_1}{Q}$$

muss nun von t unabhängig sein, wie man auch innerhalb der angegebenen Einschränkungen die Anfangswerthe der Variablen variiren mag. Lassen wir nun diese Anfangswerthe so variiren, dass $q_1 H_1$ für $t = 0$ den Werth Null annimmt, so können in den vier Reihenentwickelungen nicht sämmtliche Coefficienten

verschwinden, da $q_4 H_1$, wie wir wissen, nicht Integralgleichung des Systems 8. O. ist. Setzt man ausserdem fest, dass für die gewählten Anfangswerthe Q nicht verschwindet, so entspringt, wenn man φ_1 und φ_2 nach Potenzen von t entwickelt, aus φ_2 ein Glied von der Form

$$n \log t\ , \quad (n > 0)\ ,$$

welches sich nicht fortheben kann. Die Annahme, dass ein Integral der hier betrachteten Form existire, führt also auf einen Widerspruch oder m. a. W. es existiren zu dem System 7. O. keine Abel'schen Integrale, und ebenso auch nicht zu dem System 8. O.

Bei den vorstehenden Entwickelungen waren wir von einer besonderen Form der Bewegungsgleichungen für das Dreikörper-Problem ausgegangen, nämlich dem hier benutzten System 7. O. Da jedoch ein Abel'sches Integral durch eine algebraische Transformation der Variablen wiederum in ein Abel'sches Integral übergeht, so gilt das gefundene negative Resultat für alle Formen der Bewegungsgleichungen, welche aus den ursprünglichen durch rein algebraische Umformungen entstehen. Das gefundene Resultat gilt ferner auch für das Vielkörper-Problem. Reducirt man nämlich beim Vielkörper-Problem die Ordnung des Systems ähnlich wie bei dem Dreikörper-Problem durch Benutzung der bekannten Integrale, so erhält man algebraische Differentialgleichungen. Existirt zu diesen ein Abel'sches Integral, so enthält der Ausdruck, über welchen die Quadratur auszuführen ist, die Massen nur in algebraischer Weise; man müsste also unter allen Umständen durch das Verschwindenlassen einer oder mehrerer Massen zu einem Abel'schen Integral für das Dreikörper-Problem gelangen, was nicht sein darf.

Die vorstehend hergeleiteten negativen Ergebnisse enthalten, wie mir scheint, eine hinreichende Erklärung für die Thatsache, dass man bei der Aufsuchung neuer Integrale des Dreikörper-Problems seither nicht über den bereits vor einem Jahrhundert erreichten Standpunkt hinausgelangt ist.

Leipzig, 18. Juli 1887.

Berichtigung.

S. 62, Z. 13 v. u. $2\Sigma s_2 s_3 - \Sigma s_1^2 = \Sigma s_2' s_3'$.

S. 62, Z. 11 v. u. 4-fache Quadrat.

Sophus Lie, *Die Begriffe Gruppe und Invariante.*

In einer Abhandlung von *Sylvester* im *American journal of mathematics* Bd. 9, No. 2 findet sich ein Brief von Halphen, Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Paris. In diesem Briefe betrachtet Halphen eine Schaar von algebraischen Transformationen

(1) $x_\varkappa' = f_\varkappa(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r) \quad (\varkappa = 1 \dots n)$

mit r Parametern $a_1 \dots a_r$ zwischen den Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ und $x_1' \dots x_n'$, stellt die Frage nach allgemeinen Kriterien dafür, ob eine solche Schaar von Transformationen Invarianten besitzt oder nicht und verspricht dieses noch nicht in voller Allgemeinheit behandelte Problem vollständig zu erledigen[1].

Soviel ich sehe ist das ihm doch nicht gelungen. Im Laufe seines Briefes macht er nämlich verschiedene Annahmen, die wirkliche Beschränkungen des Problems nach sich ziehen. Und selbst das hiermit beschränkte Problem hat er, wie mir scheint, nicht vollständig erledigt. Die von ihm formulirten Kriterien sind zwar hinreichend aber nicht nothwendig[2].

1. Zunächst schicke ich einige Bemerkungen voraus über die eigenthümliche Bedeutung, in welcher Halphen das Wort *Gruppe* braucht.

---

1) Halphen drückt sich so aus: »*Dans des théories diverses on a rencontré des Invariants sans qu'on ait pénétré la cause générale de leur existence. C'est cette lacune qu'il s'agit ici de faire disparaître.*«

2) Es scheint Halphen unbekannt zu sein, dass ich das im Texte besprochene Problem für den Fall, dass die Schaar der vorgelegten Transformationen (1) von infinitesimalen Transformationen erzeugt ist (oder sich erzeugen lässt) vollständig erledigt habe. Meine alten Untersuchungen über diesen und verwandte Gegenstände sind resumirt in den Math. Ann. Bd. XXIV, 1884.

Halphen sagt, dass die Gleichungen (1) eine Gruppe bestimmen, wenn sich aus den beiden Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} x_\varkappa' &= f_\varkappa(x_1 \dots x_n\, a_1 \dots a_r) \\ x_\varkappa'' &= f_\varkappa(x_1 \dots x_n\, b_1 \dots b_r) \end{aligned} \quad (\varkappa = 1 \dots n)$$

durch Elimination der Grössen $x_\varkappa$ Relationen von der Form

$$x_\varkappa'' = f_\varkappa(x_1' \dots x_n', A_1 \dots A_r)$$

ableiten lassen. Dabei macht er nicht wie ich in meiner Note in den Göttinger Nachrichten 1874 und in vielen späteren Arbeiten die Annahme, dass die Grössen $A_\varkappa$ nur von den a_i und b_j abhängen, sondern er lässt sie ganz beliebige Grössen bedeuten. Diese seine Definition des Begriffes Gruppe scheint mir indess nicht naturgemäss.

Es unterliegt ja keinem Zweifel, dass der Begriff Transformationsgruppe sich allgemeiner fassen lässt, als in meiner oben citirten Note geschehen. In der That habe ich schon im Jahre 1871 (Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, S. 243) die folgende allgemeine Definition aufgestellt: *Eine Schaar von Transformationen bildet eine Gruppe, wenn zwei Transformationen, nach einander ausgeführt, immer eine Transformation der Schaar ergeben.* Diese Definition giebt, scheint es mir, die richtige und allgemeine Uebertragung des Gruppenbegriffes der Substitutionentheorie auf die Transformationstheorie. Unter den Transformationsgruppen giebt es aber mehrere verschiedene Kategorien, für die ich besondere Bezeichnungen benutze. Insbesondere bezeichne ich eine Gruppe dann als *endlich* und *continuirlich*, wenn ihre Transformationen durch *ein* Gleichungssystem mit r Parametern: $x_\varkappa' = f_\varkappa(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r)$ bestimmt werden.

Was Halphen's Definition des Begriffes Gruppe angeht, so möchte ich fast glauben, dass dieselbe nicht nach dem Wortlaute zu verstehen ist. Vielleicht sind einige Voraussetzungen nicht mit angegeben, z. B. dass sich zwischen den Gleichungen (1) die Parameter $a_\varkappa$ eliminiren lassen sollen. Es scheint mir nämlich undenkbar, dass Halphen jedes System Transformationsgleichungen (1), aus welchen sich die Parameter nicht eliminiren lassen, als eine Gruppe bezeichnen will, und doch ist er nach dem Wortlaute seiner Definition dazu gezwungen. — Will Halphen auf der anderen Seite zu seiner Definition des Begriffes Gruppe etwa die Forderung hinzufügen, dass sich die Parameter elimi-

niren lassen sollen, so folgt z. B., dass die Schaar aller projectiven Transformationen eines Raumes keine Gruppe von Punkttransformationen dieses Raumes bildet.

Es scheint wünschenswerth, dass Halphen den Sinn seiner Definition präcisirt, wenn er sich nicht der von mir benutzten Terminologie anschliessen kann.

Nehme ich seine Definition nach dem Wortlaute und nenne ich ferner eine Function $\varphi(x_1 \dots x_n)$ dann eine Invariante der Transformationen (1), wenn die Identität

$$\varphi(x_1' \dots x_n') = \varphi(x_1 \dots x_n)$$

besteht, so ist sein Hauptsatz: *Les invariants sont l'apanage exclusif des substitutions formant groupe* unrichtig. Das werden uns später zwei Beispiele zeigen.

2. Indem Halphen das von ihm gestellte Problem in Angriff nimmt, macht er erstens und zwar ausdrücklich die Annahme, dass die Zahl n der Veränderlichen grösser ist, als die Zahl r der Parameter. Da aber schon das Beispiel

$$x_1' = x_1 , \quad x_2' = \frac{x_2 + a_1}{a_2 x_2 + a_3}$$

zeigt, dass Invarianten sehr gut vorkommen können, wenn $r \gtreqless n$ ist, so ist seine Annahme eine Beschränkung des Problems. — Er macht noch zwei weitere Annahmen, nämlich, dass die Elimination der Parameter gerade $n - r$ Relationen zwischen den $x_\varkappa$ und $x_\varkappa'$ liefert und dass die Gleichungen (1), wenn sie Invarianten besitzen, deren gerade $n - r$ haben.

Dass auch diese letzten Annahmen wesentliche Beschränkungen des Problems sind, liesse sich ebenfalls leicht an Beispielen zeigen. Darauf gehe ich jedoch hier nicht ein, sondern wende mich zu dem von Halphen behandelten *reducirten* Probleme.

3. Halphen behauptet, dass ein System von algebraischen Transformationsgleichungen

$$(1') \qquad x_\varkappa' = f_\varkappa(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r) , \; n > r ,$$

aus welchem sich durch Elimination der Parameter gerade $n - r$ Relationen zwischen den $x_\varkappa$ und $x_\varkappa'$ ergeben, (dann und) nur dann gerade $n - r$ unabhängige Invarianten besitzt, wenn es in seinem Sinne des Wortes eine Gruppe bestimmt.

Aber diese Regel stimmt doch, wie ich sie verstehe, nicht mit dem Beispiele:

(2) $$x_1' = x_1 + a\ , \quad x_2' = -x_2\ .$$

Hier ist $n = 2$, $r = 1$, also $n > r$; die Elimination des Parameters a giebt $n - r = 1$ von a freie Relation; die Gleichungen (2) haben andererseits gerade $n - r = 1$ unabhängige Invariante, nämlich x_2^2. Nach Halphen's Regel müssten also die Gleichungen (2) in seinem Sinne des Wortes eine Gruppe bilden. Aber aus

$$x_1' = x_1 + a\ , \quad x_2' = -x_2$$

und

$$x_1'' = x_1 + b\ , \quad x_2'' = -x_2$$

folgt

$$x_1'' = x_1' + b - a\ , \quad x_2'' = x_2'$$

und diese Gleichungen haben die Form (2) nicht.

Betrachten wir andererseits das Beispiel

(3) $$x_1' = x_1 + 1\ , \quad x_2' = x_2 + a\ .$$

Hier ist wiederum $n = 2$, $r = 1$. Die Elimination des Parameters a giebt wiederum $n - r = 1$ Relation zwischen den x und x'. Andererseits haben die Transformationsgleichungen (3) gerade $n - r = 1$ unabhängige Invariante nämlich $\operatorname{tg}(\pi x_1)$. Es ist ja

$$\operatorname{tg}(\pi x_1') = \operatorname{tg}(\pi x_1 + \pi) = \operatorname{tg}(\pi x_1)\ .$$

Unsere Gleichungen bilden aber keine Gruppe in Halphen's Sinne des Wortes; denn aus

$$x_1' = x_1 + 1\ , \quad x_2' = x_2 + a$$

und

$$x_1'' = x_1 + 1\ , \quad x_2'' = x_2 + b$$

folgen die Gleichungen

$$x_1'' = x_1'\ , \quad x_2'' = x_2' + b - a\ ,$$

welche nicht die Form (3) haben.

4. Will man das von Halphen gestellte Problem in voller Allgemeinheit behandeln, so dürfte es zweckmässig sein, die Ausdrucksweise der Mannigfaltigkeitslehre zu benutzen, also $x_1 \ldots x_n$ als Punktcoordinaten eines n-fachen Raumes zu betrachten. Hier werde ich jedoch die Beschränkung einführen, dass die Transformationen

(1) $$x_\varkappa' = f_\varkappa(x_1 \ldots x_n,\ a_1 \ldots a_r)$$

Cremona'sche Transformationen sein sollen.

Bei jeder Transformation einer derartigen Schaar geht ein Punkt $x_\varkappa$ von allgemeiner Lage in einen bestimmten neuen

Punkt $x_\varkappa'$ über. Dieser neue Punkt hängt von den Parametern $a_\varkappa$ ab. Der Inbegriff aller Punkte $x_\varkappa'$ bildet daher eine algebraische Mannigfaltigkeit, die höchstens r-fach ausgedehnt ist. Werden nun weiter auf einen beliebigen Punkt $x_\varkappa'$ noch einmal die Transformationen (1) ausgeführt, so nimmt derselbe neue Lagen $x_\varkappa''$ an u. s. w.

Wir nehmen zu der Schaar der Transformationen (1) noch die Schaar der inversen Transformationen hinzu und denken uns jede von diesen Schaaren von Transformationen eine Reihe von Malen hintereinander ausgeführt. Dann können zwei verschiedene Fälle eintreten. Es ist denkbar, dass ein Punkt $x_\varkappa$ von allgemeiner Lage durch wiederholte Ausführung jener Transformationen in jeden Punkt von allgemeiner Lage im Raume übergeführt werden kann. Dann giebt es keine Invarianten.

Kann dagegen der Punkt $x_\varkappa$ nicht in alle Punkte des Raumes übergeführt werden, so bildet der Inbegriff aller Lagen, welche derselbe bei wiederholter Anwendung der betreffenden Transformationen annehmen kann, einen geometrischen Ort, der allerdings aus verschiedenen, ja sogar aus unendlich vielen irreducibeln algebraischen Mannigfaltigkeiten bestehen kann.

Jeder Punkt des Raumes gehört einem ganz bestimmten derartigen Orte an. Der Raum wird also in dieser Weise in unendlich viele Oerter zerlegt, wobei jeder Ort unter Umständen aus mehreren algebraischen Mannigfaltigkeiten besteht.

Lässt sich nun diese Zerlegung des Raumes in geometrische Oerter analytisch definiren durch die Gleichungen

$$\Omega_1(x_1 \dots x_n) = C_1 \dots, \quad \Omega_m(x_1 \dots x_n) = C_m,$$

in denen die C_k willkürliche Constanten bedeuten, so sind die $\Omega_\varkappa(x_1 \dots x_n)$ Invarianten der Schaar von Transformationen, und zwar erhält man so ein vollständiges System Invarianten. Es ist hierbei keineswegs sicher, dass die $\Omega_\varkappa$ algebraische Functionen von den x sind, sie können sehr gut transcendente*)

1) Es ist daher unrichtig, wenn Halphen behauptet, dass die Invarianten immer durch Elimination gefunden werden können. Dass die zu einer *continuirlichen endlichen Gruppe* gehörigen Invarianten, Differentialinvarianten, ja sogar alle zugehörigen invarianten Gleichungssysteme durch Elimination gefunden werden, habe ich längst bei vielen Gelegenheiten hervorgehoben. Und auch die Ausdehnung dieser Bemerkung auf eine jede vorgelegte Schaar von Transformationen $x_\varkappa' = f_\varkappa(x, a)$, die sich von infinitesimalen Transformationen erzeugen lässt, rührt von mir her.

Functionen sein. Die Ω_x brauchen nach dem Vorangehenden nur so beschaffen zu sein, dass die Gleichungen (4) für jedes specielle Werthsystem der a_x eine discrete, endliche oder unendliche Anzahl von algebraischen Mannigfaltigkeiten darstellen, deren Inbegriff bei den Transformationen (1) invariant bleibt.

Entsprechende Ueberlegungen geben zugleich alle invarianten Gleichungssysteme.

An einer anderen Stelle werde ich auf die hier skizzirten Theorien näher eingehen. Insbesondere werde ich Gruppen behandeln, die sich nicht durch *ein* Gleichungssystem, sondern erst durch mehrere Gleichungssysteme definiren lassen, von denen jedes Gleichungssystem gewisse willkürliche Parameter enthält und werde eine Invariantentheorie von derartigen Gruppen entwickeln. Das gelingt leicht, indem ich meine allgemeine Invariantentheorie der endlichen continuirlichen Gruppen mit der Invariantentheorie der discontinuirlichen Gruppen verbinde.

Leipzig, Juli 1887.

Friedrich Engel, *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie.*

I. Der Sinn der Jacobi'schen Identität.

Die berühmte Jacobi'sche Identität hat durch Lie's Untersuchungen eine ganz neue Bedeutung gewonnen. Sie erscheint jetzt als eine Identität zwischen infinitesimalen Transformationen, und so aufgefasst bildet sie eine der wichtigsten Grundlagen für Lie's Theorie der Transformationsgruppen. Freilich der eigentliche Sinn der Identität ist damit noch nicht enthüllt; dass dieselbe besteht, bleibt vielmehr immer noch eine unverstandene, nur deshalb um so merkwürdigere Thatsache.

Aber je öfter man die Jacobi'sche Identität in der Theorie der Transformationsgruppen anwendet, desto stärker muss man das Bedürfniss fühlen, mit dieser Identität eine andere Vorstellung zu verbinden als die einer blossen Formel; um so weniger darf man sich damit begnügen, dass man die Richtigkeit der Identität auf so und so viele Weisen bewiesen hat, während man doch sozusagen noch nicht einmal über ihre »Existenzberechtigung in der Wissenschaft« im Reinen ist.

Durch sehr einfache Ueberlegungen habe ich erkannt, dass wenigstens die Jacobi'sche Identität zwischen infinitesimalen Punkttransformationen einen guten begrifflichen Sinn hat.

Zwischen drei beliebigen infinitesimalen Punkttransformationen:

$$Xf = \sum_1^n{}_i\, \xi_i\,(x_1 \dots x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$Yf = \sum_1^n{}_i\, \eta_i\,(x_1 \dots x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$Zf = \sum_1^n{}_i\, \zeta_i\,(x_1 \dots x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}:$$

besteht immer die Jacobi'sche Identität

$$(1) \qquad ((XY)Z) + ((YZ)X) + ((ZX)Y) \equiv 0;$$

dabei ist der Kürze wegen (XY) für $X(Y(f)) - Y(X(f))$ geschrieben.

Wollen wir den begrifflichen Sinn der Identität (1) ermitteln, so müssen wir unzweifelhaft davon ausgehen, dass wir eine Identität zwischen infinitesimalen *Transformationen* vor uns haben. Vermuthlich drückt dieselbe nichts anderes aus, als eine allgemeine Eigenschaft des Transformationsbegriffs für den besonderen Fall der *infinitesimalen* Transformationen.

Zwischen drei beliebigen *endlichen* Transformationen S, T, U müsste demnach eine Identität bestehen, aus welcher die Jacobi'sche folgt, sobald man für S, T, U bezüglich die drei infinitesimalen Transformationen Xf, Yf, Zf einsetzt und alle infinitesimalen Grössen bis zu einer gewissen Ordnung mitnimmt. Damit wäre dann die Jacobi'sche Identität auf eine Identität der Substitutionentheorie zurückgeführt.

Um diese Substitutionenidentität finden zu können, muss man vor allen Dingen wissen, was dem Klammerausdruck (XY) bei endlichen Transformationen entspricht; man muss also aus zwei endlichen Transformationen S und T eine neue Transformation herleiten können, welche auf die infinitesimale Transformation (XY) führt, wenn man S und T durch Xf und Yf ersetzt.

Aus LIE's Untersuchungen (vgl. z. B. Math. Ann. XXV, S. 92) geht hervor, dass $T^{-1}ST$ eine endliche Transformation von der gewünschten Beschaffenheit ist. Der Ausdruck $T^{-1}ST$ bedeutet nämlich diejenige endliche Transformation, in welche S übergeht, wenn man darin vermittelst der Transformation T neue Veränderliche einführt. Denken wir uns andererseits in dem Symbole Xf vermittelst der infinitesimalen Transformation Yf oder

$$x_i' = x_i + \eta_i(x_1 \ldots x_n)\,\delta\tau \quad (i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ eingeführt, so erhalten wir, wenn die Accente an den x' weggelassen werden, den Ausdruck

$$Xf + (XY)\,\delta\tau.$$

Also bestimmt (XY) die unendlich kleine Aenderung, welche die infinitesimale Transformation Xf bei der angegebenen Variabelnänderung erleidet. Darin liegt, dass der Ausdruck (XY)

für Xf und Yf eine ganz analoge Bedeutung hat, wie der Ausdruck $T^{-1}ST$ für S und T.

Diese Analogie zwischen den Ausdrücken $T^{-1}ST$ und (XY) legt die Vermuthung nahe, dass die gesuchte Substitutionenidentität zwischen den drei endlichen Transformationen S, T, U eine Relation zwischen Ausdrücken von der Form $T^{-1}ST$ sein wird, gerade so wie die Jacobi'sche Identität eine Relation zwischen Ausdrücken von der Form (XY) ist.

Die einfachste Relation zwischen Ausdrücken von der Form

$$T^{-1}ST\,,\quad U^{-1}SU\,,\quad U^{-1}TU \quad \text{u. s. w.}$$

ist diejenige, welche aussagt, dass der Ausdruck $T^{-1}ST$ sich als Invariante verhält, wenn man in die Transformationen S und T vermittelst der Transformation U neue Veränderliche einführt. Da S und T bei der angedeuteten Variabelnänderung sich bezüglich in $U^{-1}SU$ und $U^{-1}TU$ verwandeln, während $T^{-1}ST$ übergeht in $U^{-1}T^{-1}STU$, so lautet unsere Substitutionenidentität folgendermassen:

$$(U^{-1}TU)^{-1}\,U^{-1}SU\,U^{-1}TU \equiv U^{-1}\,T^{-1}STU. \tag{2}$$

Wir werden sehen, dass diese Identität wirklich der Jacobischen Identität entspricht.

Nach dem früher Gesagten müssen wir untersuchen, welche Identität sich zwischen Xf, Yf, Zf ergiebt, wenn in (2) die endlichen Transformationen S, T, U durch die infinitesimalen Xf, Yf, Zf ersetzt werden. Wir könnten das direct ausführen und also direct mit den infinitesimalen Grössen rechnen; wir ziehen es aber vor einen andern Weg einzuschlagen, welcher offenbar dasselbe Endergebniss liefert.

Nämlich wir wollen annehmen, dass die endlichen Transformationen S, T, U bezüglich den eingliedrigen Gruppen angehören, welche von den infinitesimalen Transformationen Xf, Yf, Zf erzeugt werden. Dann können wir S, T, U folgendermassen schreiben:

$$S: f' = f + \frac{t}{1}Xf + \frac{t^2}{1\cdot 2}XXf + \cdots$$

$$T: f' = f + \frac{\tau}{1}Yf + \frac{\tau^2}{1\cdot 2}YYf + \cdots$$

$$U: f' = f + \frac{\vartheta}{1}Zf + \frac{\vartheta^2}{1\cdot 2}ZZf + \cdots,$$

wobei f allgemeines Symbol einer Function von $x_1 \cdots x_n$ ist und f' das Symbol derselben Function von $x_1' \cdots x_n'$, während t, τ, ϑ Constanten bezeichnen. Die Identität (2) muss nun von den eben geschriebenen Transformationen S, T, U befriedigt werden, welche Werthe auch die Constanten t, τ, ϑ haben mögen; damit dies stattfindet, müssen zwischen Xf, Yf, Zf gewisse Identitäten bestehen, unter denen sich eben die Jacobi'sche befinden wird.

Die Aufstellung der Gleichungen für die Transformationen auf den beiden Seiten von (2) wäre freilich sehr umständlich; wir müssten in den Reihenentwickelungen nach den Grössen t, τ, ϑ die Grössen dritter Ordnung mitnehmen, wenn wir nachher durch Coëfficientenvergleichung die gewünschte Identität finden wollten. Zum Glücke brauchen wir aber jene beiden Transformationen nicht selbst zu berechnen. Es ist nämlich leicht zu sehen, dass beide Transformationen zwei gewissen eingliedrigen Gruppen angehören, deren infinitesimale Transformationen wir berechnen können. Diese beiden infinitesimalen Transformationen müssen natürlich für alle Werthe von t, τ, ϑ identisch sein; durch Vergleichung der Coëfficienten erhalten wir die gewünschte Identität und brauchen dabei nur bis zu den Gliedern zweiter Ordnung zu gehen.

Die hiermit angedeutete Rechnung wollen wir jetzt durchführen.

Wir bemerken zunächst, dass die Transformation $T^{-1} S T$ einer eingliedrigen Gruppe angehört, deren infinitesimale Transformation die Form hat:

$$(3) \qquad Af = Xf + \frac{\tau}{1}(XY) + \frac{\tau^2}{1 \cdot 2}((XY)Y) + \cdots,$$

sowie, dass die Transformation $T^{-1} S T$ selbst lautet:

$$(4) \qquad f' = f + \frac{t}{1} Af + \frac{t^2}{1 \cdot 2} AAf + \cdots.$$

Mit diesen beiden von LIE herrührenden Formeln, deren Beweis keine Schwierigkeit darbietet und füglich übergangen werden kann, reichen wir im Folgenden überall aus.

Wollen wir nun die infinitesimale Transformation derjenigen eingliedrigen Gruppe berechnen, welcher $U^{-1} T^{-1} S T U$ angehört, so haben wir nur in der Formel (3) Af für Xf, Zf für Yf

und ϑ für τ einzusetzen. Dann erhalten wir für die gewünschte infinitesimale Transformation den folgenden Ausdruck:

$$\Omega f = Af + \frac{\vartheta}{1}(AZ) + \frac{\vartheta^2}{1\cdot 2}(A(AZ)) + \cdots,$$

oder entwickelt:

$$(5)\quad \begin{cases} \Omega f = Xf + \frac{\tau}{1}(XY) + \frac{\vartheta}{1}(XZ) + \\ \qquad + \frac{\tau^2}{1\cdot 2}((XY)Y) + \frac{\tau\cdot\vartheta}{1}((XY)Z) + \\ \qquad\qquad + \frac{\vartheta^2}{1\cdot 2}(X(XZ)) + \cdots. \end{cases}$$

Die Transformation $U^{-1}SU$ gehört einer eingliedrigen Gruppe an, deren infinitesimale Transformation lautet:

$$Bf = Xf + \frac{\vartheta}{1}(XZ) + \frac{\vartheta^2}{1\cdot 2}((XZ)Z) + \cdots,$$

während $U^{-1}SU$ selbst die Form hat:

$$f' = f + \frac{t}{1}Bf + \frac{t^2}{1\cdot 2}BBf + \cdots.$$

In entsprechender Weise gehört zu $U^{-1}TU$ die infinitesimale Transformation

$$Cf = Yf + \frac{\vartheta}{1}(YZ) + \frac{\vartheta^2}{1\cdot 2}((YZ)Z) + \cdots,$$

während $U^{-1}TU$ selbst lautet:

$$f' = f + \frac{\tau}{1}Cf + \frac{\tau^2}{1\cdot 2}CCf + \cdots.$$

Folglich ist die Transformation

$$(6)\qquad (U^{-1}TU)^{-1}\; U^{-1}SU\; U^{-1}TU$$

von der infinitesimalen Transformation

$$\bar{\Omega} f = Bf + \frac{\tau}{1}(BC) + \frac{\tau^2}{1\cdot 2}((BC)C) + \cdots$$

erzeugt. Bei der Ausrechnung ergiebt sich

$$(7)\quad \begin{cases} \bar{\Omega} f = Xf + \frac{\vartheta}{1}(XZ) + \frac{\tau}{1}(XY) + \\ \qquad + \frac{\vartheta^2}{1\cdot 2}((XZ)Z) + \frac{\tau\cdot\vartheta}{1}\{(X(YZ)) - (Y(XZ))\} + \\ \qquad\qquad + \frac{\tau^2}{1\cdot 2}((XY)Y) + \cdots. \end{cases}$$

Nunmehr haben wir die beiden infinitesimalen Transformationen Ωf und $\overline{\Omega} f$ einander gleich zu setzen und sodann die Coëfficienten zu vergleichen, denn Ωf und $\overline{\Omega} f$ müssen für alle Werthe von t, τ und ϑ mit einander identisch sein. Führen wir die angedeutete Vergleichung aus, so erhalten wir eine Reihe formeller Identitäten und ausserdem noch die Relation

$$(8) \qquad ((XY)Z) = (X(YZ)) - (Y(XZ)) \ ,$$

welche nach dem Gesagten identisch befriedigt sein muss. Die Gleichung (8) ist aber nichts anderes als eben die Jacobi'sche Identität.

Die *Jacobi'sche Identität* (1) ist also auf die *Substitutionenidentität* (2) zurückgeführt. Die eben beendigten Rechnungen zeigen deutlich, dass die Identität (2) uns die Jacobi'sche Identität liefert, wenn wir die drei beliebigen endlichen Transformationen S, T, U durch die drei beliebigen infinitesimalen Xf, Yf, Zf ersetzen.

Es ist bemerkenswerth, dass wir die Jacobi'sche Identität nicht in der symmetrischen Form (1), sondern in der unsymmetrischen (8) erhalten haben. Das hat seinen Grund darin, dass die Identität (2) nicht symmetrisch gebaut ist. Zwischen S, T, U kann man eine ganze Menge Identitäten von der Form (2) angeben, welche nicht aufeinander zurückführbar sind. Dagegen besteht zwischen drei beliebigen infinitesimalen Transformationen Xf, Yf, Zf keine andere Identität als die Jacobi'sche und die daraus folgenden; selbst wenn wir in den Formeln (5) und (7) die Glieder dritter und höherer Ordnung mitnähmen, würden wir nur solche Identitäten finden, die aus der Jacobi'schen folgen.

Man sieht hier, wie einfach der Begriff der infinitesimalen Transformation ist im Vergleich zu dem der endlichen.

Durch die vorstehenden Entwickelungen ist der Sinn der Jacobi'schen Identität zwischen infinitesimalen Punkttransformationen vollkommen klar. Unsere früher ausgesprochene Vermuthung bestätigt sich: die Jacobi'sche Identität drückt wirklich eine allgemeine Eigenschaft des Transformationsbegriffes für den besonderen Fall der infinitesimalen Transformation aus; für endliche Transformationen findet diese Eigenschaft des Transformationsbegriffes ihren Ausdruck in der nahezu selbstverständlichen Substitutionenidentität (2).

II. Zur Theorie der Zusammensetzung.

In Band III seines Norwegischen Archives, auf Seite 112 bis 116 beschäftigt sich LIE mit r-gliedrigen Gruppen $X_1 f \dots X_r f$ von einer ganz eigenthümlichen Zusammensetzung. Er setzt nämlich voraus, dass die bekannten Relationen

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} X_s f$$

$$(i, k = 1 \dots r)$$

die besondere Form haben:

$$(1) \qquad (X_i X_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s \, c_{i\,i+ks} X_s f$$

$$(i = 1 \dots r-1 \;;\; k = 1 \dots r-i) \,.$$

Die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ enthält also eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe: $X_1 f \dots X_{r-1} f$; diese letztere enthält eine $(r-2)$ gliedrige invariante Untergruppe: $X_1 f \dots X_{r-2} f$ und so fort.

LIE zeigt nun, dass sich unter den gemachten Voraussetzungen r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$ der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ angeben lassen, welche paarweise in den Beziehungen stehen:

$$(2) \qquad (Y_i Y_{i+k}) = \sum_1^{i} {}_s \, \bar{c}_{i\,i+ks} Y_s f$$

$$(i = 1 \dots r-1 \;;\; k = 1 \dots r-i) \,.$$

Mit anderen Worten: Jede Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ oder kurz G_r von der Zusammensetzung (1) enthält eine invariante G_{r-1}: $Y_1 f \dots Y_{r-1} f$; eine in dieser G_{r-1} steckende invariante G_{r-2}: $Y_1 f \dots Y_{r-2} f$; eine in dieser G_{r-2} steckende invariante G_{r-3}: $Y_1 f \dots Y_{r-3} f$ und so fort.

Hieraus folgert Lie noch, dass jede r-gliedrige projective Gruppe eines n-fach ausgedehnten Raumes, welche die Zusammensetzung (1) besitzt, jedenfalls einen Punkt invariant lässt, ferner eine durch den Punkt gehende Gerade, eine durch die Gerade gehende Ebene M_2 und so weiter. —

Der Zweck des Folgenden ist, zu zeigen, dass die r-gliedrigen Gruppen von der Zusammensetzung (1) sich in einer sehr einfachen Weise charakterisiren lassen.

Wir gehen davon aus, dass jede Gruppe mit mehr als drei Parametern dreigliedrige Untergruppen enthält und dass es zwei verschiedene Arten von dreigliedrigen Gruppen giebt: *erstens* diejenigen, welche mit der allgemeinen projectiven Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gleichzusammengesetzt sind und *zweitens* alle übrigen. Die Gruppen der ersten Art sind bekanntlich auch gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectiven Gruppe eines Kegelschnitts in der Ebene, sie sollen daher Gruppen von Kegelschnittszusammensetzung oder auch kurz *Kegelschnittsgruppen* heissen.

Aus dem Gesagten erhellt, dass sich die sämmtlichen r-gliedrigen Gruppen in zwei verschiedene Classen eintheilen lassen: in solche, welche wenigstens eine Kegelschnittsgruppe enthalten und in solche, welche keine Kegelschnittsgruppe enthalten. *Die zweite dieser beiden Classen besteht, wie wir zeigen werden, aus den Gruppen von der Zusammensetzung* (1).

Wir behaupten also, dass einerseits *keine Gruppe von der Zusammensetzung* (1) *eine Kegelschnittsgruppe enthält* und dass andererseits *jede Gruppe, die keine Kegelschnittsgruppe enthält, eben die Zusammensetzung* (1) *hat.* Diese beiden Behauptungen werden wir der Reihe nach beweisen.

Es sei $X_1 f \dots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe, welche die Zusammensetzung (1) hat und dabei eine Kegelschnittsgruppe G_3 enthält.

Wenn wir die ganze Zahl n gross genug wählen, giebt es immer im Raume von n Dimensionen eine r-gliedrige projective Gruppe Γ_r, welche mit der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ gleichzusammengesetzt oder holoëdrisch isomorph ist (vgl. LIE in den Math. Ann. XXV S. 94). Diese Gruppe Γ_r lässt alsdann jedenfalls einen Punkt invariant, ferner eine durch den Punkt gehende Gerade und so weiter.

Natürlich lässt auch die in Γ_r enthaltene Kegelschnittsgruppe G_3 den betreffenden Punkt, die hindurchgehende Gerade etc. invariant; sie transformirt dabei die Punkte der invarianten Geraden durch eine isomorphe, projective Gruppe. Nun aber ist die Kegelschnittsgruppe G_3 bekanntlich einfach; jede mit ihr isomorphe Gruppe ist daher entweder dreigliedrig oder nullgliedrig, wenn wir eine Gruppe, die blos aus der identischen Transformation besteht, als nullgliedrig bezeichnen. In unserem Falle kann die G_3 die Punkte der invarianten Geraden nicht dreigliedrig transformiren, weil ein Punkt der Geraden invariant

ist, folglich muss sie diese Punkte nullgliedrig transformiren, das heisst sie sämmtlich stehen lassen.

Man überzeugt sich ferner leicht, dass die G_3 auch alle Punkte der invarianten Ebene, welche durch die Gerade hindurchgeht, stehen lässt; desgleichen alle Punkte der durch die Ebene gehenden invarianten ebenen M_3 und so weiter. Schliesslich erkennt man, dass die G_3 überhaupt alle Punkte des n-fach ausgedehnten Raumes stehen lässt. Das aber ist offenbar unmöglich, also ist unsere Voraussetzung, dass die Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ eine Kegelschnittsgruppe enthält, falsch.

Damit ist die erste der beiden oben aufgestellten Behauptungen bewiesen. Bevor wir zum Beweise der zweiten übergehen, erst noch einige Hülfssätze:

Hülfssatz 1. *Enthält eine $(r+m)$gliedrige Gruppe $X_1 f \dots X_{r+m} f$ eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung*

$$(X_i\, X_{i+k}) = \sum_{1}^{i+k-1} s\; c_{i\,i+k\,s}\, X_s f$$

$$(i = 1 \dots r_1 - 1\; ; \quad k = 1 \dots r - i)\;,$$

so enthält sie auch eine $(r+1)$gliedrige Gruppe, welcher die Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ angehört.

Dieser Satz rührt von Lie her; ich will daher seinen Beweis unterdrücken.

Hülfssatz 2. *Enthält eine G_r ohne Kegelschnittsgruppe eine G_{r-1}, so enthält sie stets auch eine invariante G_{r-1}.*

Den Beweis dieses Satzes will ich wenigstens andeuten.

Wenn die G_r eine nicht invariante G_{r-1} enthält, so enthält sie zugleich ∞^1 verschiedene $(r-1)$gliedrige Untergruppen, diejenigen nämlich, welche innerhalb der G_r mit der betreffenden G_{r-1} gleichberechtigt sind. Interpretiren wir die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen der G_r als Punkte eines $(r-1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{r-1}, so werden jene ∞^1 $(r-1)$-gliedrigen Untergruppen durch eine Schaar von ∞^1 $(r-2)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten M_{r-2} dargestellt.

Denken wir uns jetzt den R_{r-1} durch die adjungirte Gruppe der G_r transformirt (vgl. über dieselbe: diese Berichte Jahrgang 1886 S. 86). Dann werden die besprochenen ∞^1 M_{r-2} unter einander vertauscht und ihr Inbegriff wird durch eine mit der G_r isomorphe Gruppe transformirt. Diese Gruppe ist ent-

weder ein- oder zweigliedrig; denn eine Schaar von ∞^1 Elementen kann höchstens dreigliedrig transformirt werden und wenn sie dreigliedrig transformirt wird, so geschieht das durch eine Kegelschnittsgruppe: in unserem Falle ist das ausgeschlossen, weil die G_r keine Kegelschnittsgruppe enthält.

Die G_r ist nach dem Vorhergehenden entweder mit einer eingliedrigen oder mit einer zweigliedrigen Gruppe isomorph, folglich enthält sie entweder eine $(r-1)$gliedrige oder eine $(r-2)$gliedrige invariante Untergruppe. Wir brauchen daher blos noch nachzuweisen, dass auch in dem zweiten dieser beiden Fälle eine $(r-1)$gliedrige invariante Untergruppe vorhanden ist.

Das hat keine Schwierigkeit. Der $(r-2)$gliedrigen invarianten Untergruppe entspricht eine ebene M_{r-3} des R_{r-1}, welche bei der adjungirten Gruppe der G_r invariant bleibt. Durch diese ebene M_{r-3} gehen ∞^1 ebene M_{r-2}, welche von der adjungirten Gruppe unter einander vertauscht werden und zwar höchstens durch eine zweigliedrige Gruppe.

Unter allen Umständen bleibt daher bei der adjungirten Gruppe eine von den betreffenden M_{r-2} invariant. Da nun jede ebene M_{r-2}, welche bei der adjungirten Gruppe invariant bleibt, eine $(r-1)$gliedrige invariante Untergruppe der G_r darstellt, so ist hiermit der Beweis des Hülfssatzes 2 erbracht. —

Nunmehr können wir ohne Schwierigkeit unsere Behauptung beweisen, dass jede r-gliedrige Gruppe G_r, welche keine Kegelschnittsgruppe enthält, die besondere Zusammensetzung (1) besitzt.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass unsere Behauptung in den Fällen $r = 2$ und $r = 3$ richtig ist.

Jede 2-gliedrige Gruppe enthält ja eine eingliedrige invariante Untergruppe, hat also die Zusammensetzung (1).

Jede 3-gliedrige Gruppe enthält zweigliedrige Untergruppen; ist sie insbesondere keine Kegelschnittsgruppe, so enthält sie nach Hülfssatz 2 eine invariante 2-gliedrige Untergruppe, welche ihrerseits eine eingliedrige invariante Untergruppe enthält. Damit ist der Beweis für den Fall $r = 3$ geliefert.

Um nun die Richtigkeit unserer Behauptung für beliebiges r nachzuweisen, brauchen wir blos zu zeigen, dass die Behauptung auch für $r = q + 1$ richtig ist, sobald sie es für alle Zahlen $r \leqq q$ ist.

Wir nehmen demnach als bewiesen an, dass jede Gruppe mit $r \leqq q$ Parametern, welche keine Kegelschnittsgruppe enthält, die besondere Zusammensetzung (1) besitzt. Aus Hülfssatz 1 ergiebt sich dann sofort: jede Gruppe, welche eine Untergruppe mit $r \leqq q$ Parametern aber ohne Kegelschnittsgruppe enthält, hat zugleich eine Untergruppe mit $r + 1$ Parametern, in welcher die r-gliedrige enthalten ist. Wenn daher insbesondere eine G_{q+1} ohne Kegelschnittsgruppe eine h-gliedrige Untergruppe enthält, so ist diese letztere stets in einer $(h + 1)$-gliedrigen Untergruppe der G_{q+1} enthalten.

Jede Gruppe, auch jede G_{q+1} ohne Kegelschnittsgruppe enthält zweigliedrige Untergruppen. Nach der soeben gemachten Bemerkung ist jede zweigliedrige Untergruppe der G_{q+1} in einer dreigliedrigen enthalten, jede dreigliedrige in einer viergliedrigen und so weiter. Folglich enthält jede G_{q+1} ohne Kegelschnittsgruppe eine q-gliedrige Untergruppe und nach Hülfssatz 2 sogar eine invariante q-gliedrige Untergruppe. Diese q-gliedrige Untergruppe hat aber unter den gemachten Voraussetzungen die Zusammensetzung (1), also hat auch die G_{q+1} diese besondere Zusammensetzung. —

Hiermit ist vollständig bewiesen, dass die Gruppen von der Zusammensetzung (1) mit denjenigen Gruppen identisch sind, welche keine Kegelschnittsgruppen enthalten.

Wir können dieses Ergebniss in sehr einfacher Weise folgendermassen ausdrücken:

Satz. *Jede r-gliedrige Gruppe ohne Kegelschnittsgruppe enthält eine $(r - 1)$gliedrige invariante Untergruppe.*

Ausserdem haben wir auch noch den

Satz. *Enthält eine projective Gruppe des R_n keine Kegelschnittsgruppe, so lässt sie jedenfalls einen Punkt des R_n invariant, ferner eine durch den Punkt gehende Gerade, eine durch die Gerade gehende Ebene und so weiter.*

Als ich die Entwickelungen der SS. 95—99 vor einiger Zeit Herrn Professor Killing in Braunsberg mittheilte, schrieb mir derselbe, dass er einen Theil meiner Resultate auch seinerseits gefunden habe, natürlich auf ganz anderem Wege, doch sei es ihm noch nicht gelungen, die ganze von mir besprochene Classe von Gruppen zu umfassen.

Leipzig, am 31. Juli 1887.

SITZUNG AM 24. OCTOBER 1887.

J. Thomae, *Bemerkung über Thetafunctionen vom Geschlecht* 3.

Im 89. Bande des Crelle'schen Journals hat Herr Frobenius die Functionaldeterminante aus drei ungeraden Thetafunctionen vom Geschlecht 3 durch ein Product von fünf geraden Thetafunctionen dargestellt, wenn die Argumente Null sind. Diese Formel lässt sich benutzen, um $\vartheta(0, 0, 0)$ durch die Classenmoduln, d. h. die Coefficienten der Grundgleichung $F(s, z) = 0$, zu welcher die Thetafunctionen gehören, darstellen. Sind nämlich $\vartheta_1((v))$, $\vartheta_2((v))$, $\vartheta_3((v))$ drei ungerade Thetafunctionen, ist

$$v = u(s, z) - u(s_1, z_1) - u(s_2, z_2) - u(s_3, z_3)\ ,$$

und ist $\vartheta_{\mu\nu}$ der partielle Differentialquotient von $\vartheta_\mu((v))$ nach v_ν für verschwindende Argumente, ist die Determinante $|\vartheta_{\mu\nu}| = Q$, wo Q das Product, jener fünf geraden Thetafunctionen ist, so kann man folgende Schlussweise anwenden. — Es ist

$$\frac{\partial}{\partial z_\nu}\,\frac{\vartheta_\mu((v))}{\vartheta((v))} = -\sum_{(\varrho)} \frac{\partial}{\partial v_\varrho}\,\frac{\vartheta_\mu((v))}{\vartheta((v))}\cdot\frac{\partial u_\varrho(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu}$$

eine algebraische Function von z, z_1, z_2, z_3, die mittelst der Methoden des Herrn Weber vollständig darstellbar ist, und also ist auch

$$-\left|\frac{\partial}{\partial z_\nu}\,\frac{\vartheta_\mu((v))}{\vartheta((v))}\right| = \left|\frac{\partial u_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu}\right|\cdot\left|\frac{\partial}{\partial v_\nu}\,\frac{\vartheta_\mu((v))}{\vartheta((v))}\right|$$

eine algebraische Function U von z, z_1, z_2, z_3. Wählt man diese Grössen so, dass $((v)) \equiv ((0))$ wird, was die Bestimmung von z_1, z_2, z_3 durch z und die Klassenmoduln mittelst einer algebraischen Gleichung erfordert, so geht dadurch U in einen algebraischen Ausdruck V über, und es folgt

$$\left|\frac{\partial u_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu}\right|\cdot|\vartheta_{\mu\nu}| = \vartheta^3\cdot V = \left|\frac{\partial u_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu}\right|\cdot Q\,.$$

Da nun Q ein Product von fünf geraden Thetafunctionen mit verschwindenden Argumenten ist, von dem jeder einzelne Factor in der Form $W.\vartheta$ dargestellt werden kann, wo W wiederum eine algebraische Function der Klassenmoduln ist, so fliesst hieraus für ϑ^2 eine Gleichung, welche bis auf eine aus dem Factor $\left|\frac{\partial u_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu}\right|$ herauszuschälende Functionaldeterminante $|A|$ von Periodicitätsmoduln, die unten näher beschrieben wird, nur algebraische Functionen der Klassenmoduln enthält, weil z von selbst herausfallen muss. — Die Ausführung dieser Rechnung, die übrigens für zweiblättrige Flächen von beliebigem Geschlechte von mir im 72. Bande des Crelle'schen Journals geliefert ist, ist doch für den vorliegenden Fall wohl nicht ohne Complication. Aus diesem Grunde bin ich auf eine von mir im 66. Bande des Crelle'schen Journals gegebene Formel zurückgekommen, welche zwar zur Ermittelung des algebraischen Theiles in ϑ noch eine Quadratur erfordert, aber doch, besonders nachdem sie durch Herrn Fuchs, Crelle's Journal Band 73, von den Wurzeln der Gleichung

$$((u(s, z) - u(s_1, z_1) - u(s_2, z_2) - u(s_3, z_3))) \equiv ((0))$$

befreit worden ist, eine recht einfache Gestalt besitzt. Ein Mangel jedoch haftet ihr gerade in dieser neuen Gestalt an, nämlich der, dass sie, wenn die Formel sich auf das Geschlecht p bezieht, p willkürliche Grössen enthält, die nothwendig nur scheinbar in ihr enthalten sein können. Wie sich diese Formel von jenen willkürlichen Grössen befreien lasse, will ich hier mittheilen, wobei ich mich, um an ein bestimmtes Beispiel anzuknüpfen, auf den Fall $p = 3$ beschränke.

Da vorausgesetzt wird, dass die Verzweigungswerthe von einander unabhängig seien, so muss man die übliche Grundgleichung $F(s, z) = 0$ ein wenig beschränken, indem man annimmt, was durch lineare Transformation stets erreicht werden kann, und was daher der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, dass einer der unendlich fernen Punkte der Curve auf einer der Coordinatenaxen liege. Die Gleichung wird dann in Bezug auf diese Coordinate vom dritten Grade und kann in der Form angenommen werden

$$F(s, z) = a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0\,,$$

$$a_1(z) = a_1 = \mathfrak{a}_1 z + \mathfrak{b}_1 = z - z_\sigma\,,\ (\mathfrak{a}_1 = 1),\ a_2(z) = a_2 = \mathfrak{a}_2 z^2 + \mathfrak{b}_2 z + \mathfrak{c}_2\,,$$

$$a_3 = \mathfrak{a}_3 z^3 + \mathfrak{b}_3 z^2 + \mathfrak{c}_3 z + \mathfrak{d}_3\,,\ a_4 = \mathfrak{a}_4 z^4 + \mathfrak{b}_4 z^3 + \mathfrak{c}_4 z^2 + \mathfrak{d}_4 z + \mathfrak{e}_4$$

in welcher sie 13 Constanten enthält, von denen drei nicht zur Bestimmung der Verzweigungswerthe dienen können, weil für s eine ganze lineare Function von s und z gesetzt werden darf, ohne dass jene ihre Lage ändern. Die übrigen aber können so gewählt werden, dass die den Verzweigungspunkten entsprechenden Werthe von z, die Verzweigungswerthe $k_1, k_2, \ldots k_{10}$ jedwede Werthe annehmen. Eine solche Constantenabzählung allein bietet freilich kein völlig zuverlässiges Mittel, um die Existenz einer Function in der dreiblättrigen Fläche T mit zehn beliebigen Verzweigungspunkten nachzuweisen, die in den drei unendlich fernen Punkten und noch in einem Punkte der Fläche unendlich gross wird. Man überzeugt sich aber von der Existenz auf folgende Weise. Nach Riemann giebt es zunächst eine Function σ in T, welche in nur drei Punkten unendlich gross wird und welche mit z durch eine Gleichung vom dritten Grade in σ und dritten Grade in z,

$$G(\sigma, z) = 0 ,$$

verbunden ist. Diese kann zuerst als Fundamentalgleichung angesehen werden. Für σ ist dann ausser den zehn Verzweigungspunkten k noch ein sich aufhebender Verzweigungspunkt $\sigma = \gamma$, $z = \delta$ vorhanden. Eine »Function φ« hat die Form

$$A(\sigma - \gamma) + B(z - \delta) + C(\sigma z - \gamma\delta) ,$$

und wird ausser im Punkte $\gamma\delta$ noch in vier Punkten von T Null, von denen zwei willkürlich sind. Die Function

$$s = (A(\sigma - \gamma) + B(z - \delta) + C(\sigma z - \gamma\delta)) : (\sigma - \gamma)$$

wird in den drei unendlich fernen Punkten von T und in dem Punkte unendlich gross erster Ordnung, in welchem $\sigma - \gamma$ neben dem sich aufhebenden Verzweigungspunkte noch verschwindet. Sie ist die gesuchte Function s, welche einer Gleichung von der oben gegebenen Form $F(s, z) = 0$ genügt, und sie besitzt, wie es sein muss, drei willkürliche Constanten.

Der zu einem Verzweigungspunkte $z = k$ gehörige Werth von s sei s_k, während der zu $z = k$, aber nicht zum Verzweigungspunkte gehörende Werth von s s_k' sein soll. Wird das Argument (s, z) einer Function nur durch k gegeben, so soll allemal (s_k, k) gemeint sein. Die zu z gehörenden drei Werthe von s seien s, s', s''. Im Ganzen bediene ich mich der Bezeichnungsweise Riemann's, denke also namentlich die zu (s, z) gehörige Fläche T durch ein canonisches Schnittnetz $a_1, b_1; a_2; b_2,$

a_3, b_3 in eine einfach zusammenhängende T' zerschnitten und $u_1(s, z) = u_1$, u_2, u_3 als Normalintegrale erster Gattung in T'. Eine »Function φ« ist hier linear in s und z, und drei specielle unter ihnen, die hier besonders gebraucht werden, sind

$$f_1(s, z) = s\,, \quad f_2(s, z) = z\,, \quad f_3(s, z) = 1\,.$$

Andere specielle unter ihnen sind die sogenannten Abel'schen Functionen, genauer Quadrate von Abel'schen Functionen $ab(s,z)$, $ab_1(s, z)$, ..., deren Nullpunkte $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$; $\varepsilon_1^{(1)}$, $\varepsilon_2^{(2)}$; ... doppelte sind, und denen in bekannter Weise eine bestimmte Charakteristik zugeordnet ist. Durch F_1, F_2, F_{11} werden bez. die partiellen Differentialquotienten $\partial F : \partial s$, $\partial F : \partial z$, $\partial^2 F : \partial s^2$ abgekürzt und statt der drei Argumente (v_1, v_2, v_3) wird $((v))$, für $F_{(1)} + F_{(2)} + F_{(3)}$ wird $\Sigma F_{(\mu)}$, für $F_{(1)} F_{(2)} F_{(3)}$ wird $\Pi F_{(\mu)}$ geschrieben, und wenn hinter den Thetafunctionen das Argument fehlt, so ist $((0))$ zu ergänzen.

Ist $\tilde{\omega}$ die ungerade Charakteristik, welche der Function ab(s, z) zukommt, so ist

$$\frac{\vartheta((u(s, z) - u(k)))}{\vartheta\tilde{\omega}((u(s, z) - u(k)))} = \sqrt{Z_k}$$

eine in T zweiwerthige Function von (s, z) mit derselben Charakteristik, und Z_k ist in T einwerthig, wird in den Punkten k, $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ unendlich gross zweiter Ordnung und in drei Punkten η_1, η_2, η_3 unendlich klein zweiter Ordnung, und bleibt sonst überall endlich. Die Punkte η_1, η_2, η_3 aber befriedigen die Congruenz

$$((\Sigma u(\eta_\mu))) \equiv ((u(k)))\,.$$

Diese Function lässt sich in der Form darstellen*)

---

*) Ist p beliebig, und die Grundgleichung $F(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) = 0$ so beschaffen, wie es bei Riemann im Allgemeinen stattfindet, dass s und z nicht gleichzeitig unendlich werden, und ist $Z\zeta$ eine Function, die in den (wesentlichen) Nullpunkten der Function ab(s, z) doppelt, im Punkte σ, ζ ebenfalls doppelt unendlich gross und in p Punkten doppelt unendlich klein wird, so kann $Z\zeta$ in die Form

$$\psi\zeta(s, z) : (l_0 + l_1 s + l_2 z + l_3 sz)\,\text{ab}\,(s, z)$$

gebracht werden, in der die l so einzurichten sind, dass der Nenner im Punkte σ, ζ unendlich klein zweiter Ordnung wird. Er enthält dann noch einen willkürlichen Nullpunkt $s = \gamma$, $z = \delta$. Der Zähler ψ vom Grade $n - 1$ in s vom Grade $m - 1$ in z ist so einzurichten, dass er in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten, im Punkte γ, δ und den $n + m - 3$ übrigen von σ, ζ verschiedenen Nullpunkten der Function $l_0 + l_1 s + l_2 z + l_3 sz$ verschwindet. Er ist dann eine Function von $p + 1$ Constanten, die sich

$$Z_k = \frac{\psi_k(s, z)}{(z-k)\,\mathrm{ab}(s, z)} = \frac{s - s_k' + (z-k)\,\varphi_k(s, z)}{(z-k)\,\mathrm{ab}(s, z)},$$

worin

$$\varphi_k(s, z) = s\varphi_{k1} + z\varphi_{k2} + \varphi_{k3}$$

ist, und die Constanten $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \varphi_{k3}$ so einzurichten sind, dass Z_k in drei Punkten doppelt verschwindet. Diese Function ist bei gegebener Charakteristik bekanntlich eine bis auf einen constanten Factor völlig bestimmte. Bildet man das Integral

$$J_k(s, z) = \int \frac{\psi_k(s, z)\,dz}{(z-k)\,F_1(s, z)},$$

so ist es ein Integral zweiter Gattung, welches nur im Punkte k unendlich gross erster Ordnung wird. Man sieht zwar nicht ohne Weiteres ein, dass in der Entwickelung des Integranden nach Potenzen von $\sqrt{(z-k)}$

$$\frac{\psi_k(s, z)}{(z-k)\,F_1(s, z)} = \frac{K}{\sqrt{(z-k)^3}} + \frac{K'}{z-k} + \frac{K''}{\sqrt{z-k}} + K''' + \cdots$$

K' verschwindet, allein dies ist doch der Fall, weil das Integral einer in T einwerthigen Function nicht in nur einem Punkte logarithmisch unendlich gross werden kann. Der Coefficient K hat den Werth

$$K = \psi_k(k) : X(k) = (s - s_k')\lim \sqrt{(z-k)} : F_1(s, z) = (s_k - s_k') : \sqrt{-2F_{11}(k)F_2(k)}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $\sqrt{Z_k} = 0$, die Punkte η sollen hier, da eine Verwechselung nicht zu befürchten ist, einfach mit s_1, z_1; s_2, z_2; s_3, z_3 bezeichnet werden. Kämen verschiedene k in Betracht, so müsste man noch eine diesbezügliche Marke anhängen, dies ist aber augenblicklich nicht der Fall. Dagegen sollen σ_1, ζ_1; σ_2, ζ_2; ... beliebige Werthepaare s, z sein. Die von mir zur Bestimmung von ϑ gegebene Formel schreibt sich dann

$$(1.)\qquad \frac{2\,\partial \log \vartheta}{\partial k} = -\frac{\partial'}{\partial k}\log\left|\frac{\partial u_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu}\right|,$$

---

so einrichten lassen, dass die noch übrigen Nullpunkte doppelte sind. Wird noch die Charakteristik gegeben, so ist ψ_ζ und also Z_ζ bis auf einen constanten Factor durch die vorausgegangenen Daten völlig bestimmt, und muss deshalb die Constante γ, δ nur scheinbar enthalten. Fällt σ, ζ auf einen Verzweigungspunkt k, so geht $l_0 + l_1 s + l_2 z + l_3 sz$ in $(z-k)(l_0 + l_1 s)$ über, und der Factor $l_0 + l_1 s$ muss auch im Zähler stehen, so dass er sich, und damit die scheinbare Constante, forthebt.

worin die z_1, z_2, z_3 vor der Differentiation von k unabhängig sind, und erst nach Ausführung derselben die Wurzelwerthe der Gleichung $\sqrt{Z_k} = 0$ annehmen, was durch den Strich am Differentialzeichen ausgedrückt werden mag. Für Z_k würde eine andere ganz ähnliche Function einzutreten haben, wenn für ϑ eine andere Thetafunction mit gerader Charakteristik gesetzt würde. — Nun werde

$$\varphi_\varrho(s, z) = F_1(\sigma_\varrho, \zeta_\varrho) \Sigma f_\mu(s, z) \overline{f_\mu}(\sigma_\varrho, \zeta_\varrho) : | f(\sigma, \zeta)$$

gesetzt, wo $\overline{f_\mu}(\sigma_\varrho, \zeta_\varrho)$ den Coefficienten von $f_\mu(\sigma_\varrho, \zeta_\varrho)$ in der Determinante

$$| f(\sigma, \zeta) | = | f_\mu(\sigma_\varrho, \zeta_\varrho) |$$

bedeutet. Dann hat

$$\partial W_\varrho(s, z) : \partial z = \varphi_\varrho(s, z) : F_1(s, z)$$

die Eigenschaft, für $(s, z) \doteq (\sigma_\varrho, \zeta_\varrho)$ den Werth Eins, für $(s, z) = (\sigma_{\varrho'}, \zeta_{\varrho'})$ den Werth Null anzunehmen. Die Periodicitätsmoduln der Function $W_\varrho(s, z)$ an der Schnitten a_1, a_2, a_3 seien bez. $A_{\varrho 1}'$, $A_{\varrho 2}'$, $A_{\varrho 3}'$, die der Function

$$w_\varrho(s, z) = \int \frac{f_\varrho(s, z)\, dz}{F_1(s, z)}$$

aber seien bez. $A_{\varrho 1}$, $A_{\varrho 2}$, $A_{\varrho 3}$, sodass die Beziehungen statthaben

$$| A' | = | A | \,\Pi\, F_1(\sigma_\mu, \zeta_\mu) : | f(\sigma, \zeta) | ,$$

$$\left| \frac{\partial u_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu} \right| = (i\pi)^3 \left| \frac{\partial W_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu} \right| : | A' |$$

$$= (i\pi)^3 \left| \frac{\partial W_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu} \right| \cdot | f(\sigma, \zeta) | : | A | \,\Pi F_1(\sigma_\mu, \zeta_\mu) ,$$

durch welche die Formel (1.) in die Gleichung übergeht

$$(2.) \qquad \frac{\partial}{\partial k} \log(\vartheta : \sqrt{| A |}) =$$

$$\frac{\partial \log \Pi F_1(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{\partial k} - \frac{\partial \log | f(\sigma, \zeta) |}{\partial k} - \frac{\partial'}{\partial k} \log \left| \frac{\partial W_\mu(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu} \right| .$$

Aus dieser Formel kann man die Wurzeln der Gleichung $\sqrt{Z_k} = 0$, die Grössen $s_1, z_1; \ldots$ gänzlich entfernen, indem man die Gleichung ansetzt

$$\frac{\partial W_\varrho(s, z)}{\partial k} = C_\varrho \int \frac{\psi_k(s, z)\, dz}{(z - k)\, F_1(s, z)} - \Sigma t_{\mu\varrho} W_\mu(s, z) = \text{Const.}$$

Diese nach z differenziert liefert durch Entwickelung nach Potenzen von $\sqrt{(z-k)}$, $z-\zeta_1$, $z-\zeta_2$ und $z-\zeta_3$ für C_ϱ und $t_{\varrho\varrho'}$ die Werthe

$$C_\varrho = \varphi_\varrho(k) : 2\psi_k(k) = \varphi_\varrho(k) : 2(s_k - s_k') \,,$$

$$t_{\varrho\varrho'} = \frac{-\varphi_\varrho(k)}{2\psi_k(k)} \cdot \frac{\psi_k(\sigma_{\varrho'}, \zeta_{\varrho'})}{(\zeta_{\varrho'} - k)\, F_1(\delta_{\varrho}', \zeta_{\varrho}')} \,.$$

Wird nun für s, z ein Wurzelwerthepaar der Gleichung $\sqrt{Z_k} = 0$, oder $\psi_k = 0$ gesetzt, so ergiebt sich

$$\frac{\partial'}{\partial k} \frac{\partial W_\varrho(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu} = \Sigma t_{\mu\varrho}\, W_\mu(s_\nu, z_\nu) \,,$$

und wenn man dies in die Formel (2.) einsetzt, so gewinnt jene die Gestalt

$$(3.) \quad \frac{\partial \log (\vartheta : \sqrt{|A|})}{\partial k} =$$

$$\frac{\partial}{\partial k} \log \frac{\Pi F_1(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{|f(\sigma, \zeta)|} + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\psi_k(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{F_1(\sigma_\mu, \zeta_\mu)} \cdot \frac{\varphi_\mu(k)}{(\zeta_\mu - k)(s_k - s_k')}$$

$$= \frac{\partial}{\partial k} \log \frac{\Pi F_1(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{|f(\sigma, \zeta)|} + \tfrac{1}{2} \sum \frac{\psi_k(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{(\zeta_\mu - k)(s_k - s_k')} \cdot \sum_{(\nu)} \frac{f_\nu(k) \bar{f}_\nu(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{|f(\sigma_\mu, \zeta_\mu)|} \,.$$

Diese muss von $\sigma_1, \zeta_1;\ \sigma_2, \zeta_2;\ \sigma_3, \zeta_3$ unabhängig sein. Dadurch dass wir für $\psi_k(s, z)$ die oben gegebene Form $s_k - s_k' + (z-k)\varphi_k(s, z)$ setzen, fallen aus einem grösseren Ausdrucke darin diese drei Werthpaare ganz allgemein von selbst fort. Es ist nämlich

$$\sum \frac{\psi_k(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{\zeta_\mu - k} \sum_{(\nu)} f_\nu(k) \bar{f}_\nu(\sigma_\mu, \zeta_\mu) : |f(\sigma, \zeta)|$$

$$= \sum \frac{\sigma_\mu - s_k'}{\zeta_\mu - k} \sum_{(\nu)} \frac{f_\nu(k) \bar{f}_\nu(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{|f(\sigma, \zeta)|} + \sum \frac{\varphi_k(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{|f(\sigma, \zeta)|} \sum_{(\nu)} f(k) \bar{f}_\nu(\sigma_\mu, \zeta_\mu)$$

$$= \sum \frac{\sigma_\mu - s_k'}{\zeta_\mu - k} \sum_{(\nu)} \frac{f_\nu(k) \bar{f}_\nu(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{|f(\sigma, \zeta)|} + \sum \sum_{(\varrho)} \sum_{(\nu)} \frac{\varphi_{k\varrho} f_\varrho(\sigma_\mu, \zeta_\mu) f_\nu(k) \bar{f}_\nu(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{|f(\sigma, \zeta)|}$$

$$= \sum \frac{\sigma_\mu - s_k'}{\zeta_\mu - k} \sum_{(\nu)} \frac{f_\nu(k) \bar{f}_\nu(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{|f(\sigma, \zeta)|} + \varphi_k(k) \,,$$

wodurch die Formel (3.) die neue Gestalt gewinnt

$$(4.)\qquad \frac{2\partial\log(\vartheta : \gamma\,|A|)}{\partial k} - \frac{\varphi_k(k)}{2(s_k - s_k')} =$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\log\frac{\Pi F_1(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{|f(\sigma, \zeta)|} + \frac{1}{2}\sum\frac{\sigma_\mu - s_k'}{\zeta_\mu - k}\sum_{(\nu)}\frac{f_\nu(k)\bar{f}_\nu(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{(s_k - s_k')\cdot|f(\sigma, \zeta)|}\,.$$

Hierin müssen rechts die Werthepaare σ_1, ζ_1; σ_2, ζ_2; σ_3, ζ_3 immer wieder nur scheinbar enthalten sein. Wollte man dies direct nachweisen, so würde man Relationen zwischen den Coefficienten der Grundgleichung und ihren Differentialquotienten nach k heranziehen müssen, wozu die Discriminante derselben helfen könnte. Man kann aber auch umgekehrt aus der a priori gewissen Unabhängigkeit solche Relationen herleiten, und es wird wenigstens eine derselben hier folgen. Wir können nämlich wegen dieser Unabhängigkeit σ_1, ζ_1; σ_2, ζ_2; σ_3, ζ_3 auf drei übereinander liegende Punkte von T auf σ, ζ; σ', ζ; σ'', ζ rücken lassen. Führt man dies jedoch auf einmal aus, so wird $|f(\sigma, \zeta)| = 0$, und wir enthalten eine unbestimmte Form, weshalb wir zuerst nur

$$\sigma_2, \zeta_2 = \sigma', \zeta; \quad \sigma_3, \zeta_3 = \sigma'', \zeta$$

setzen, wodurch

$$|f(\sigma, \zeta)| = \sigma_1(\zeta_2 - \zeta_3) + \sigma_2(\zeta_3 - \zeta_1) + \sigma_3(\zeta_1 - \zeta_2)$$

in

$$(\zeta_1 - \zeta)(\sigma'' - \sigma')$$

übergeht. Aber aus

$$\sum\frac{\sigma_\mu - s_k'}{\zeta_\mu - k}\cdot\sum_{(\nu)}\frac{f_\nu(k)\bar{f}_\nu(\sigma_\mu, \zeta_\mu)}{|f(\sigma, \zeta)|}$$

wird

$$\frac{(\sigma_1 - s_k')}{\zeta_1 - k}\cdot\frac{k - \zeta}{\zeta_1 - \zeta} + \frac{\sigma' - s_k'}{\zeta - k}\cdot\frac{\sigma_1(k - \zeta) + \sigma''(\zeta_1 - k) + s_k(\zeta - \zeta_1)}{(\sigma'' - \sigma')(\zeta_1 - \zeta)}$$

$$+ \frac{\sigma'' - s_k'}{\zeta - k}\cdot\frac{\sigma_1(\zeta - k) + \sigma'(k - \zeta_1) + s_k(\zeta_1 - \zeta)}{(\sigma'' - \sigma')(\zeta_1 - \zeta)}$$

$$= \frac{\sigma_1 - s_k'}{\zeta_1 - k}\cdot\frac{k - \zeta}{\zeta_1 - \zeta} + \frac{\sigma_1(\zeta - k)(\sigma'' - \sigma') + s_k(\zeta_1 - \zeta)(\sigma'' - \sigma') - s_k')(\sigma'' - \sigma')}{(\zeta - k)(\zeta_1 - \zeta)(\sigma'' - \sigma')}$$

$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_k'}{\zeta_1 - k}\cdot\frac{k - \zeta}{\zeta_1 - k} + \frac{\sigma_1(\zeta - k) - s_k'(\zeta_1 - k)}{(\zeta - k)(\zeta_1 - \zeta)} + \frac{s_k}{\zeta - k}$$

$$= \frac{(\sigma_1 - s_k')}{\zeta_1 - \zeta}\cdot\frac{k - \zeta}{\zeta_1 - k} + \frac{\sigma_1 - s_k'}{\zeta_1 - \zeta} + \frac{s_k - s_k'}{\zeta - k}$$

$$= \frac{(\sigma_1 - s_k')(k - \zeta + \zeta_1 - k)}{(\zeta_1 - \zeta)(\zeta_1 - k)} + \frac{s_k - s_k'}{\zeta - k} = \frac{\sigma_1 - s_k'}{\zeta_1 - k} + \frac{s_k - s_k'}{\zeta - k}\,.$$

Ferner wird

$$\frac{\partial}{\partial k}\log\frac{\Pi F_1(\sigma_\mu,\zeta_\mu)}{|f(\sigma,\zeta)|}=\frac{\partial\log F_1(\sigma',\zeta)F_1(\sigma'',\zeta):(\sigma''-\sigma')}{\partial k}+\frac{\partial\log F_1(\sigma_1,\zeta_1)}{\partial k}$$

$$=-\frac{1}{2(\zeta-k)}+\frac{\partial\log F_1(\sigma_1,\zeta_1)}{\partial k}.$$

Lässt man nun, wo dies ohne Weiteres möglich ist σ_1, ζ_1 auf σ, ζ fallen, so erhält (4.) die Gestalt

(5.) $$\frac{2\partial\log(\vartheta:\sqrt{|A|})}{\partial k}-\frac{\varphi_k^{(k)}}{2(s_k-s_k')}=$$

$$\frac{\partial\log F_1(\sigma,\zeta)}{\partial k}+\frac{\frac{1}{2}(\sigma-s_k')}{(s_k-s_k')(\zeta-k)}=$$

$$\frac{1}{2(\zeta-k)}+\frac{\partial\log F_1(\sigma,\zeta)}{\partial k}+\frac{\frac{1}{2}(\sigma-s_k)}{(s_k-s_k')(\zeta-k)}.$$

Noch enthält die rechte Seite eine willkürliche Grösse, von der sie unabhängig sein muss. Bilden wir die Gleichung (5.) dreimal, indem wir der Reihe nach für σ, ζ setzen σ, ζ, σ', ζ, σ'', ζ, addiren und dividiren mit 3, so gewinnen wir die Gleichung

(5ª.) $$\frac{2\partial\log(\vartheta:\sqrt{|A|})}{\partial k}-\frac{\varphi_k(k)}{2(s_k-s_k')}=$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial\log a_1(\zeta)F_1(\sigma,\zeta)F_1(\sigma',\zeta)F_1(\sigma'',\zeta)}{\partial k}-\frac{1}{3}\partial\log a_1(\zeta)$$

$$+\frac{1}{2(\zeta-k)}+\frac{1}{6}\frac{\sigma+\sigma'+\sigma''-3s_k}{(s_k-s_k')(\zeta-k)}=$$

$$-\frac{1}{3}(\zeta-k)-\frac{1}{3}\frac{\partial\log a_1(\zeta)}{\partial k}+\frac{1}{2(\zeta-k)}+\frac{1}{6}\frac{\sigma+\sigma'+\sigma''-2s_k-s_k'}{(s_k-s'_k)(\zeta-k)}-\frac{1}{6(\zeta-k)})$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{\partial\log a_1(\zeta)}{\partial k}+\frac{1}{6}\frac{a_2(k)a_1(\zeta)-a_2(\zeta)a_1(k)}{a_1(k)a_1(\zeta)(s_k-s_k')(\zeta-k)}.$$

Setzen wir hierin Unendlich für ζ, so erhalten wir die *erstrebte, von den willkürlichen Grössen ζ_1, ζ_2, ζ_3 freie* Formel

(6.) $$\frac{2\partial\log(\vartheta:\sqrt{|A|})}{\partial k}-\frac{\varphi_k(k)}{2(s_k-s_k')}=\frac{\mathfrak{a}_2}{6(s_k-s_k')},$$

deren rechte Seite dadurch gleich Null gemacht werden kann, dass $\mathfrak{a}_2$ gleich Null angenommen wird, was durch Einführung einer neuen Variablen

$$s-\tfrac{1}{3}\mathfrak{a}_2 z$$

für s immer erreicht werden kann.

Eine gewisse Willkür liegt allerdings noch in der Wahl der Functionen f_1, f_2, f_3. Führt man statt der hier gebrauchten andere ein, so hat dies nur auf den Theil unserer Formel Einfluss, der ein vollständiger Differentialquotient ist, welche Eigenschaft er behält, so dass eine solche Transformation als unwesentlich anzusehen ist.

Um aber in der erwähnten Relation zwischen Coefficienten der Grundgleichung und dem Differentialquotienten eines der Coefficienten nach k zu gelangen, bilden wir die Differenz der Gleichung (5ª.) und (6.), wodurch wir die Identität erhalten

$$0 = -\frac{1}{3}\frac{\partial \log a_1(\zeta)}{\partial k} + \frac{a_2(k)\,a_1(\zeta) - a_1(k)\,a_2(\zeta)}{6a_1(\zeta)a_1(k)(s_k - s_k')\,(\zeta - k)} + \frac{\mathfrak{a}_2}{6(s_k - s_k')},$$

und wenn wir dies mit $3\,a_1(\zeta)$ multipliciren, so erhalten wir die Gleichung

$$0 = \frac{\partial z_\infty}{\partial k} + \frac{a_2(k)a_1(\zeta_1) - a_2(\zeta)a_1(k) + \mathfrak{a}_2 a_1(k)\,(\zeta - k)\,a_1(\zeta)}{2\,(s_k - s_k')\,a_1(k)\,(\zeta - k)}$$

$$= \frac{\partial z_r}{\partial k} + \frac{a_2(k) - (2\,\mathfrak{a}_2\,k + \mathfrak{b}_2)\,a_1(k) + \mathfrak{a}_2\,a_1(k)\,a_1(k)}{2\,(s_k - s_k')\,a_1(k)},$$

$$\text{(7.)} \qquad 0 = \frac{\partial z_\infty}{\partial k} + \frac{a_2(z_\infty)}{2\,a_1(k)\,(s_k - s_k')},$$

welche die gesuchte Relation ist. Man gelangt zu derselben auch dadurch, dass man in (5.) $\zeta = z_\infty$ macht, und das gleich Null setzt, was beiderseits mit $1 : \zeta - z_\infty$ multiplicirt ist.

Will man s_k, s_k' entfernen, durch k und die Coefficienten der Grundgleichung ausdrücken, so eliminirt man s^2 aus den beiden Gleichungen

$$a_2 s^2 + 2\,a_3\,s + 3a_4 = 0\,,\quad 3\,a_1 s^2 + 2\,a_2 s + a_3 = 0\,,$$

und erhält für alle Doppelwurzeln der Grundgleichung:

$$s\,(6\,a_1\,a_3 - 2\,a_2\,a_2) + 9\,a_1\,a_4 - a_2\,a_3 = 0\,,$$

und mithin

$$s_k = \frac{a_2(k)\,a_3(k) - 9\,a_1(k)\,a_4(k)}{6\,a_1(h)\,a_3(h) - 2\,a_2(k)\,a_2(h)},$$

$$s_k - s_k' = \frac{a_2(k)}{a_1(k)} + 3\,\frac{a_2(h)\,a_3(k) - 9\,a_1(k)\,a_4(k)}{6\,a_1(k)\,a_3(k) - 2\,a_2(h)\,a_2(k)}.$$

Man könnte die Gleichung (6.) aus (5.) auch dadurch herleiten, dass man die rechte Seite von (5.) nach Potenzen von $\sqrt{(\zeta - k)}$ entwickelte. Dies Verfahren ist jedoch complicirter als das ange-

wandte. Da es aber zur Controle der Rechnung dienen kann, so wollen wir wenigstens die Entwickelung so weit vornehmen, dass man erkennt, die rechte Seite von (5.) bleibe für $\zeta = k$ endlich, d. h. wir wollen in der Entwickelung die den Grössen $1 : (\zeta - k)$, $1 : \sqrt{(\zeta - k)}$ proportionalen Glieder suchen. Es ist

$$\frac{1}{2(\zeta-k)} + \frac{\partial \log F_1(\sigma_1 \zeta)}{\partial k} + \frac{\frac{1}{2}(\sigma - s_k)}{(s_k - s_k')(\zeta - k)} =$$

$$\frac{1}{2(\zeta-k)} + \frac{\partial \log a_1(\zeta)(\sigma-\sigma')(\sigma-\sigma'')}{\partial k} + \frac{\frac{1}{2}(\sigma - s_k)}{(s_k - s_k')(\zeta - k)},$$

oder da

$$a_1^2(\zeta)(\sigma-\sigma')(\sigma-\sigma'')(\sigma''-\sigma') = \sqrt{(\zeta-k_1)(\zeta-k_2)\ldots(\zeta-k_{10})},$$

ist, gleich

$$-\frac{\partial \log a_1(\zeta)(\sigma''-\sigma')}{\partial k} + \frac{\frac{1}{2}(\sigma - s_k)}{(s_k - s_k')(\zeta - k)}.$$

Es kommt also der Term $1 : (\zeta - k)$ in der Entwickelung *nicht* vor. Der letzte Ausdruck kann aber wiederum geschrieben werden

$$-\frac{\partial \log a_1(\zeta)}{\partial k} + \frac{F_2(\sigma'',\zeta)}{F_1(\sigma'',\zeta)(\sigma''-\sigma')} - \frac{F_2(\sigma',\zeta)}{F_1(\sigma',\zeta)(\sigma''-\sigma')} + \frac{\frac{1}{2}(\sigma-s_k)}{(s_k-s_k')(\zeta-k)}.$$

Nun bringen wir den Punkt σ, ζ so in die Nähe des Verzweigungspunktes k, dass auch σ', ζ sich eben demselben nähert. Lassen wir ihn schliesslich in k hineinfallen, so geben die beiden anderen Glieder des obigen Ausdruckes den endlichen Werth

$$\frac{\partial z_\infty}{\partial k\, a_1(\zeta)} + \frac{F_2(s_k', \zeta)}{F_1(s_k', \zeta)(s_k' - s_k)},$$

die beiden letzten aber werden jedes für sich proportional $1 : \sqrt{(\zeta - k)}$ unendlich gross. $F_1(\sigma', \zeta)$ ist aber bis auf Glieder höherer Ordnung gleich $-\sqrt{(\zeta - k)} \cdot \sqrt{-2F_{11}(k) \cdot F_2(k)}$ und also ist das erste Glied der Entwickelung von

$$-F_2(\sigma', \zeta) : F_1(\sigma', \zeta)(\sigma'' - \sigma')$$

gleich

$$\sqrt{\frac{-F_2(k)}{2F_{11}(k)}} : \sqrt{(\zeta-k)}(s_k' - s_k),$$

und $\sigma - s_k$ ist bis auf Glieder höherer Ordnung gleich

$$\sqrt{\zeta - k} \cdot \sqrt{-2F_2(k) : F_{11}(k)}$$

und also ist das erste Glied die Entwickelung von

$$\tfrac{1}{2}(\sigma - s_k) : (s_k - s_k')(\zeta - k)$$

$$\sqrt{\frac{-F_2(k)}{2F_{11}(k)}} : \sqrt{(\zeta - k)}\,(s_k - s_k')\,.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass in der Entwickelung der rechten Seite von (5.) nach Potenzen von $\sqrt{(\zeta-k)}$ das Glied $1 : \sqrt{(\zeta-k)}$ ebenfalls fehlt, und der Ausdruck für $\zeta = k$ endlich bleibt, was wir erweisen wollten.

David Hilbert, *Ueber die Büschel von binären Formen mit der nämlichen Functionaldeterminante.*

Eine einfach unendliche lineare Mannigfaltigkeit von binären Formen $\varkappa\varphi + \mu\psi$ der νten Ordnung hängt von $2\nu - 2$ wesentlichen Constanten ab und diese Zahl ist zugleich die Ordnung ihrer Jacobi'schen Covariante $f = (\varphi, \psi)_1$. Gehen wir daher von der letzteren Form als gegeben aus, so entsteht die Frage nach *der Zahl und Art der Formenbüschel mit gleicher Functionaldeterminante* f, oder, was auf dasselbe hinausläuft, es handelt sich um die Ermittelung *der Involutionen* ν *ter Ordnung, deren* $2\nu - 2$ *Doppelelemente gegeben sind.* Das gekennzeichnete Problem hat in neuerer Zeit vielfaches Interesse erweckt, aber nur in den einfachsten Fällen $\nu = 3$ und $\nu = 4$ durch C. Stephanos[1]) und A. Brill[2]) erfolgreiche Behandlung gefunden.

Grundlegend für unser Problem ist vor Allem der von A. Brill[3]) streng erbrachte Beweis für die allgemeine Natur der Form f. Diese Thatsache lässt nämlich unmittelbar erkennen, dass zu jeder Form f nothwendig eine endliche Anzahl N von Büscheln $\varkappa\varphi + \mu\psi$ zugehören muss. Ein weiterer Fortschritt ist die Berechnung dieser Anzahl durch F. Meyer[4]), H. Schubert[5]) und C. Stephanos[6]), welche dieselbe in Ueber-

---

1) Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même Jacobienne. Mémoires présentés à l'académie des sciences de l'institut de France. Bd. 27.

2) Ueber binäre Formen und die Gleichung 6ten Grades, Mathematische Annalen. Bd. 20.

3) l. c. S. 334.

4) Apolarität und rationale Curven. Tübingen 1883, S. 391.

5) Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 1884.

6) Sur la theorie des formes binaires et sur l'élimination, Annales de l'école normale. Sér. III Bd. 1. S. 351.

einstimmung miteinander gleich $\frac{(2\nu - 2)!}{(\nu - 1)!\,\nu!}$ finden. *Im Folgenden wird nun das so begründete und anzahltheoretisch in Angriff genommene Problem algebraisch verfolgt und in einer für jede Ordnung ν gültigen Weise zur Lösung gebracht.*

Bereits C. Stephanos[1]) hat die beiden folgenden Sätze aufgestellt:

Damit zwei Formen φ und ψ von der Ordnung ν beziehungsweise zu zwei Büscheln mit der nämlichen Functionaldeterminante gehören, ist es nothwendig und hinreichend, dass eine gewisse Simultaninvariante J_ν vom Grade $\nu - 2$ in den Coefficienten jeder der beiden Formen verschwinde. Gleichzeitig tritt der Umstand ein, dass das Büschel $\varkappa\varphi + \mu\psi$ selber in der Reihe der Büschel mit der nämlichen Functionaldeterminante $(\varphi, \psi)_1$ doppelt zählt.

Enthält ein Büschel die Form φ der νten Ordnung, während gleichzeitig in der Functionaldeterminante desselben eine andere Form χ von der νten Ordnung als Factor auftritt, so verschwindet eine gewisse Simultaninvariante K_ν vom Grade $\nu - 1$ in den Coefficienten jeder der beiden Formen φ und χ. Umgekehrt ist die letztere Bedingung auch hinreichend für das Vorhandensein eines solchen Büschels.

Ferner ergeben sich auf Grund eines demnächst in den Mathematischen Annalen zur Veröffentlichung gelangenden Theorems die weiteren Thatsachen:

Das Verschwinden der Simultaninvariante J_ν für zwei Formen φ und ψ der νten Ordnung ist zugleich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass denselben eine Form ϑ der $2\nu - 2$ten Ordnung mit den invarianten Beziehungen:

$$(\varphi, \vartheta)_{\nu-1} = 0\ , \quad (\psi, \vartheta)_{\nu-1} = 0$$

zugehört. Die Invariante J_ν ist folglich eine Combinante der beiden Formen φ und ψ.

Das Verschwinden der Simultaninvariante K_ν für zwei Formen φ und χ der νtenOrdnung ist zugleich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass denselben eine Form ϑ von der $2\nu - 2$ten Ordnung mit den invarianten Beziehungen:

$$(\varphi, \vartheta)_{\nu-1} = 0\ , \quad (\chi, \vartheta)_\nu = 0$$

zugehört.

1) Sur les faisceaux etc. S. 38 und 50.

Nehmen wir für den Augenblick an, dass die beiden Formen φ und ψ mit verschwindender Combinante J_ν einen gemeinsamen Linearfactor τ enthielten, so lässt sich zeigen, dass dann nothwendigerweise entweder die Combinante $J_{\nu-1}$ der beiden Formen $\frac{\varphi}{\tau}$ und $\frac{\psi}{\tau}$ verschwindet oder die Jacobi'sche Covariante der beiden letzteren Formen den Linearfactor τ enthält. Dieses Ergebniss lässt erkennen, dass die Combinante J_ν der beiden Formen:

$$\varphi = \alpha_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \alpha_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \cdots + \alpha_\nu x_2^\nu ,$$

$$\psi = \beta_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \beta_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \cdots + \beta_\nu x_2^\nu$$

die Eigenschaft besitzt, nach Einsetzung der Werthe:

$$\alpha_0 = 0 \,,\; \alpha_1 = \alpha_0' \,,\; \alpha_2 = 2\alpha_1' \,,\; \cdots \alpha_\nu = \nu\alpha'_{\nu-1} \,;$$
$$\beta_0 = 0 \,,\; \beta_1 = \beta_0' \,,\; \beta_2 = 2\beta_1' \,,\; \cdots \beta_\nu = \nu\beta'_{\nu-1}$$

überzugehen in die Combinante $J_{\nu-1}$ der beiden Formen $\nu-1$ ter Ordnung:

$$\varphi' = \alpha_0' x_1^{\nu-1} + \binom{\nu-1}{1} \alpha_1' x_1^{\nu-2} x_2 + \cdots + \alpha'_{\nu-1} x_2^{\nu-1} ,$$

$$\psi' = \beta_0' x_1^{\nu-1} + \binom{\nu-1}{1} \beta_1' x_1^{\nu-2} x_2 + \cdots + \beta'_{\nu-1} x_2^{\nu-1} ,$$

multiplicirt mit der Quelle $\alpha_0' \beta_1' - \alpha_1' \beta_0'$ ihrer Jacobi'schen Covariante. Bezeichnet daher $[J_{\nu-1}]$ denjenigen Ausdruck, welcher aus $J_{\nu-1}(\varphi', \psi')$ durch Einführung der ungestrichenen Coefficienten entsteht, so erhalten wir *die charakteristische Recursionsformel*:

$$J_\nu = [J_{\nu-1}] \, (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + \alpha_0 A + \beta_0 B ,$$

worin A und B so zu bestimmen sind, dass der ganze Ausdruck rechter Hand eine Simultaninvariante der beiden Formen φ und ψ wird, d. h. der bekannten Differentialgleichung einer solchen genügt. Die Grössen A, B sind nur auf eine einzige Weise angebbar. Denn erfüllten etwa A', B' ebenfalls jene Bedingungen, so besässen wir in dem Ausdrucke:

$$\alpha_0 \, (A - A') + \beta_0 \, (B - B')$$

eine Simultaninvariante vom Grade $\nu - 2$ in den Coefficienten jeder der beiden Formen φ und ψ, welche gleichzeitig mit der Resultante dieser beiden Formen verschwinden müsste; eine

solche Invariante ist aber augenscheinlich unmöglich. *Die angegebene Methode gestattet eine successive Berechnung der Combinanten J_ν*; so finden wir beispielsweise:

$$J_3 = (\varphi, \psi)_3,$$
$$J_4{}^{1)} = 8(\varrho, \varrho)_2 + [(\varphi, \psi)_4]^2 - (\varphi, \varphi)_4 (\psi, \psi)_4,$$

wo ϱ die dritte Ueberschiebung $(\varphi, \psi)_3$ bezeichnet.

Analoge Ueberlegungen führen zur Darstellung der Simultaninvarianten K_ν. Nehmen wir nämlich an, dass die beiden Formen φ und:

$$\chi = \gamma_0 x_1{}^\nu + \binom{\nu}{1} \gamma_1 x_1{}^{\nu-1} x_2 + \cdots + \gamma_\nu x_2{}^\nu$$

mit verschwindender Invariante K_ν einen gemeinsamen Linearfactor τ enthielten, so lässt sich zeigen, dass dann nothwendigerweise entweder die Simultaninvariante $K_{\nu-1}$ der beiden Formen $\frac{\varphi}{\tau}$ und $\frac{\chi}{\tau}$ verschwindet oder τ in einer der beiden Formen φ oder χ als Doppelfactor enthalten ist. Bei entsprechender Substitution und Bezeichnungsweise wie vorhin wird folglich K_ν in das Product der Ausdrücke $K_{\nu-1}(\varphi', \chi')$ und $\alpha_0' \gamma_0'$ übergehen. Auch zeigt sich in gleicher Weise, dass *die entspringende Recursionsformel*:

$$K_\nu = [K_{\nu-1}] \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_0 A + \gamma_0 \Gamma$$

bei successiver Anwendung zur eindeutigen Bestimmung der Simultaninvarianten K_ν ausreicht. Dieselbe erscheint, wie man sieht, in Bezug auf die Coefficienten der Form φ einerseits und der Form χ andererseits symmetrisch gebaut, wodurch der interessante Reciprocitätssatz von C. Stephanos [2]) Bestätigung findet. Unsere Methode liefert beispielsweise:

$$K_2 = (\varphi, \chi)_2,$$
$$K_3{}^{3)} = 4[(\varphi, \chi)_3]^2 - 9(h, k)_2,$$
$$K_4 = 3(\varphi, \varphi)_4 (\chi, \chi)_4 (\varphi, \chi)_4 - 8(\varphi, \chi)_4 N_6$$
$$+ 3[(\varphi, \chi)_4]^3 - 96 N_7 N_8,$$

worin h und k die Hesse'schen Covarianten $(\varphi, \varphi)_2$ beziehungsweise $(\chi, \chi)_2$ der beiden cubischen Formen und N_6, N_7, N_8 diejenigen Simultaninvarianten der beiden Formen vierter Ordnung,

---

1) Diese Werthe sind bereits von C. Stephanos auf anderem Wege berechnet worden: l. c. pag. 50.

2) l. c. pag. 39.

3) Auch diesen Werth hat C. Stephanos mittelst directer Rechnung gefunden: l. c. pag. 43.

welche in der Tabelle von Faà di Bruno[1]) beziehungsweise mit den Nummern 5, 7, 8 aufgeführt sind.

Die behandelten Simultaninvarianten J_ν und K_ν weisen eigenthümliche *Beziehungen zu der Discriminante* einer binären Form auf. Bilden wir nämlich die Combinante J_ν für ein solches Büschel von der νten Ordnung, dessen Formen sämmtlich durch eine bestimmte Form der $\nu-1$ten Ordnung theilbar sind, so resultirt die Discriminante der letzteren Form. Die Invariante K_ν geht unmittelbar nach Identificirung der beiden Formen φ, χ in die Discriminante über.

Einen neuen Einblick in den Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen Lösungen unseres Problems gewährt es, wenn wir von zwei Büscheln $\varkappa\varphi + \varkappa'\varphi'$ und $\mu\psi + \mu\psi'$ mit gleicher Jacobischen Covariante zu den beiden conjugirten $(\nu-2)$-fach unendlichen aus den Formen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{\nu-1}$ und $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_{\nu-1}$ zusammengesetzten linearen Mannigfaltigkeiten übergehen, welche bekanntlich die nämliche Functionalinvariante:

$$(\varphi, \varphi')_1 = (\psi, \psi')_1 =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^{\nu-2}\varphi_1}{\partial x_1^{\nu-2}} & \ldots & \frac{\partial^{\nu-2}\varphi_{\nu-1}}{\partial x_1^{\nu-2}} \\ \frac{\partial^{\nu-2}\varphi_1}{\partial x_1^{\nu-3}\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^{\nu-2}\varphi_{\nu-1}}{\partial x_1^{\nu-3} x_2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial^{\nu-2}\varphi_1}{\partial x_2^{\nu-2}} & \ldots & \frac{\partial^{\nu-2}\varphi_{\nu-1}}{\partial x_2^{\nu-2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{\nu-2}\psi_1}{\partial x_1^{\nu-2}} & \ldots & \frac{\partial^{\nu-2}\psi_{\nu-1}}{\partial x_1^{\nu-2}} \\ \frac{\partial^{\nu-2}\psi_1}{\partial x_1^{\nu-3}\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^{\nu-2}\psi_{\nu-1}}{\partial x_1^{\nu-3}\partial x_2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial^{\nu-2}\psi_1}{\partial x_2^{\nu-2}} & \ldots & \frac{\partial^{\nu-2}\psi_{\nu-1}}{\partial x_2^{\nu-2}} \end{vmatrix}$$

besitzen. Die nothwendige und einzige Beziehung zwischen zwei solchen Formenmannigfaltigkeiten wird durch den folgenden Satz in grelles Licht gerückt:

Den beiden aus den Formen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{\nu-1}$ und $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_{\nu-1}$ zusammengesetzten linearen Mannigfaltigkeiten mit gleicher Functionalinvariante ist eine $(\nu-4)$-fach unendliche lineare Formenmannigfaltigkeit gemeinsam, welche die Eigenschaft besitzt, $2\nu-6$ Formen mit $(\nu-2)$-fachem Linearfactor zu enthalten. Die Functionalinvariante der letzteren Formenmannigfaltigkeit ist mithin das vollständige Quadrat einer Form von der $(2\nu-6)$ten Ordnung.

---

1) Einleitung in die Theorie der binären Formen, deutsch bearbeitet von Th. Walter, pag. 362—363.

Die genannte Eigenschaft repräsentirt $2\nu-6$ Bedingungen, welche in der That gerade genügen, um aus einer vorgelegten $(\nu-2)$-fach unendlichen linearen Formenmannigfaltigkeit eine endliche Zahl von $(\nu-4)$-fach unendlichen Formenmannigfaltigkeiten auszuschneiden. Diese endliche Zahl ist offenbar gleich $N-1$. Dem einfachsten Falle $\nu = 4$ entspricht der bekannte von C. STEPHANOS und A. BRILL entdeckte Satz.

Die Combinante J_ν ist für die Fortentwickelung des in Rede stehenden Problems *von fundamentaler Bedeutung* und bedarf daher einer eingehenderen Beachtung. Wir setzen sie in der Gestalt an:

$$J(\varphi, \psi) =$$
$$\sum(-1)^{i_1+i_2+\cdots}\binom{\nu}{1}^{i_1}\binom{\nu}{2}^{i_2}\cdots\frac{(\nu-2)!}{i_0!\,i_1!\cdots i_\nu!}\,\alpha_0^{i_0}\alpha_1^{i_1}\cdots\alpha_\nu^{i_\nu}G_{i_0 i_1\cdots i_\nu}(\psi),$$

wo die Summe über alle Potenzexponenten $i_0, i_1, \cdots i_\nu$ mit der Bedingung:

$$i_0 + i_1 + \cdots + i_\nu = \nu - 2$$

auszuführen ist und $G_{i_0 i_1\cdots i_\nu}(\psi)$ die bezüglichen Glieder vom Grade $\nu-2$ und vom Gewichte $\nu i_0 + (\nu-1)\,i_1 + \cdots + i_{\nu-1}$ in den Coefficienten der Form ψ umfasst. Nach Einführung der abkürzenden Differentiationssymbole:

$$\psi\frac{\partial}{\partial\varphi} = \beta_0\frac{\partial}{\partial\alpha_0} + \beta_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \cdots + \beta_\nu\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu},$$

. . . .

folgen aus der Combinanteneigenschaft unserer Simultaninvariante:

$$J(\varphi + q\psi, p\varphi + \psi) = (1 - pq)^{\nu-2}\,J(\varphi, \psi)$$

die weiteren Formeln:

$$\left[\varphi\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{\varkappa}\left[\psi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]^{\mu} J(\varphi, \psi) = 0, \quad (\varkappa \neq \mu),$$

$$\left[\varphi\frac{\partial}{\partial\psi}\right]^{\varkappa}\left[\psi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]^{\varkappa} J(\varphi, \psi) = (-1)^{\varkappa}\frac{\varkappa!\,(\nu-2)!}{(\nu-\varkappa-2)!}J(\varphi, \psi).$$

Es mögen nun $\varkappa^{(1)}\varphi^{(1)}+\mu^{(1)}\psi^{(1)}$; $\varkappa^{(2)}\varphi^{(2)}+\mu^{(2)}\psi^{(2)}$; $\cdots$ die Gesammtheit derjenigen Formenbüschel νter Ordnung darstellen, welche eine vorgelegte Form f der $2\nu-2$ten Ordnung zur Jacobischen Covariante besitzen. Setzen wir dann zur Abkürzung:

$$\varphi_\xi^{(1)} = \alpha_0^{(1)}\xi_\nu - \binom{\nu}{1}\alpha_1^{(1)}\xi_{\nu-1} + \cdots \pm \alpha_\nu^{(1)}\xi_0,$$

$$\varphi_\eta^{(1)} = \alpha_0^{(1)}\eta_\nu - \binom{\nu}{1}\alpha_1^{(1)}\eta_{\nu-1} + \cdots \pm \alpha_\nu^{(1)}\eta_0 ,$$

. . . .

so ist offenbar die Summe:

$$(\varphi_\xi^{(1)}\psi_\eta^{(1)} - \varphi_\eta^{(1)}\psi_\xi^{(1)})^{\nu-2} + (\varphi_\xi^{(2)}\psi_\eta^{(2)} - \varphi_\eta^{(2)}\psi_\xi^{(2)})^{\nu-2} + \cdots$$

eine rationale Function der Coefficienten von f und daher einem Bruche gleich, dessen Zähler eine ganze Simultaninvariante der Form f und der beiden Formen:

$$\xi = \xi_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1}\xi_1 x_1^{\nu-1}x_2 + \cdots + \xi_\nu x_2^\nu ,$$

$$\eta = \eta_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1}\eta_1 x_1^{\nu-1}x_2 + \cdots + \eta_\nu x_2^\nu ,$$

dessen Nenner eine ganze Invariante der Form f allein darstellt. Die letztere Invariante ε ist aber nothwendigerweise eine constante Zahl; denn im anderen Falle müsste wenigstens eines der Büschel $\varkappa\varphi + \mu\psi$ für $\varepsilon = 0$ unendlich grosse Coefficienten erhalten. Greifen wir ein solches Büschel heraus und denken uns die Coefficienten desselben nicht, wie ursprünglich, als algebraische Functionen der Coefficienten $a_0, a_1, \cdots a_{2\nu-2}$ der gegebenen Form f, sondern als algebraische Functionen von $a_0, a_1 \cdots a_{2\nu-3}$ und ε, so ist die Annahme berechtigt, dass die Form φ beim Grenzübergange $\varepsilon = 0$ in die endliche und nicht verschwindende Form φ' übergehe, während die Form ψ erst nach Multiplication mit ε^p $(p > 0)$ für $\varepsilon = 0$ einen endlichen und von Null verschiedenen Werth ψ' ergiebt. Da trotzdem die Functionaldeterminante beider Formen einen für $\varepsilon = 0$ endlich bleibenden Werth besitzen soll, so folgt zunächst, dass ψ' mit φ' bis auf einen endlichen constanten Factor c übereinstimmen muss. Substituiren wir daher für ψ die Form $\psi - c\varepsilon^{-p}\varphi$, so wird nunmehr beim Grenzübergange das Büschel von einem niederen Grade unendlich als vorhin. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt auf einen Widerspruch, welcher nur durch die Annahme $\varepsilon =$ const. beseitigt werden kann. Dann stellt jene Summe eine ganze Simultaninvariante vom Grade $\nu - 2$ in den Coefficienten einer jeden der drei Formen f, ξ, η dar. Setzen wir in dieser Invariante allgemein an Stelle des Productes $\xi_\nu^{i_0}\,\xi_{\nu-1}^{i_1} \cdots \xi_0^{i_\nu}$ das Aggregat $G_{i_0 i_1} \cdots {}_{i_\nu}(u)$ und an Stelle

des Productes $\eta_\nu^{i_0}\,\eta_{\nu-1}^{i_1}\cdots\eta_0^{i_\nu}$ das Aggregat $G_{i_0 i_1\cdots i_\nu}(v)$, so entsteht eine neue Simultaninvariante $S(f,u,v)$, welche ebenfalls vom Grade $\nu-2$ in den Coefficienten der Form f, sowie in den Coefficienten der beiden weiteren Formen:

$$u = u_0\,x_1^\nu + \binom{\nu}{1} u_1\,x_1^{\nu-1}x_2 + \cdots + u_\nu x_2^\nu,$$

$$v = v_0\,x_1^\nu + \binom{\nu}{1} v_1\,x_1^{\nu-1}x_2 + \cdots + v_\nu x_2^\nu$$

ausfällt. Die Benutzung der im Bisherigen entwickelten Eigenschaften der Combinante J führt schliesslich zu der Relation:

$$S(f,\,\varphi,\,v) = J(\varphi,\,\psi)\,J(\varphi,\,v)\,,$$

welche nach Einsetzung des Werthes $f = (\varphi,\,\psi)_1$ identisch für alle φ, ψ, v erfüllt ist und *infolge dieses Umstandes für jeden besonderen Werth von ν das Mittel zur wirklichen Aufstellung der Simultaninvariante $S(f,\,u,\,v)$ bietet.* Vor Allem aber beruht die Bedeutung der gefundenen Identität darin, dass vermöge derselben der Form φ des Büschels $\varkappa\varphi + \mu\psi$ die Eigenschaft zukommt, *nach Anwendung des invarianten Processes S ein Resultat zu ergeben, welches, abgesehen von der Proportionalitätsconstante:*

$$\lambda = J(\varphi,\,\psi)\,,$$

von den anderen Formen ψ des Büschels unabhängig ist. Zerfällen wir daher die gewonnene Identität:

$$S(f,\,\varphi,\,v) = \lambda\,J(\varphi,\,v)$$

durch Vergleichung der Coefficienten aller Potenzen und Producte von $v_0,\ v_1,\ \ldots\ v_\nu$ in die $\frac{(2\nu-2)!}{(\nu-2)!\,\nu!}$ einzelnen Gleichungen und betrachten in diesen die Grösse λ und die weiteren homogen und linear auftretenden $\frac{(2\nu-2)!}{(\nu-2)!\,\nu!}$ Grössen:

$$\alpha_0^{i_0}\,\alpha_1^{i_1}\ldots\alpha_\nu^{i_\nu}\qquad (i_0+i_1+\cdots+i_\nu = \nu-2)$$

als Unbekannte, so resultirt nach Elimination der letzteren eine einzige Gleichung in Gestalt einer verschwindenden $\frac{(2\nu-2)!}{(\nu-2)!\,\nu!}$-reihigen Determinante $\Delta(\lambda)$, welche nur noch die eine Unbekannte λ enthält. Aber da die benutzte Relation in gleicher

Weise für alle Formen des Büschels $\varkappa\varphi + \mu\psi$ Gültigkeit besitzt. so bestehen die weiteren $\nu-2$ Identitäten:

$$\left[\psi \frac{\partial}{\partial\varphi}\right] S(f, \varphi, v) = \lambda \left[\psi \frac{\partial}{\partial\varphi}\right] J(\varphi, v)$$

. . . .

$$\left[\psi \frac{\partial}{\partial\varphi}\right]^{\nu-2} S(f, \varphi, v) = \lambda \left[\psi \frac{\partial}{\partial\varphi}\right]^{\nu-2} J(\varphi, v)$$

und λ ist folglich eine $(\nu - 1)$-fache Wurzel der gefundenen Gleichung d. h. $\varDelta(\lambda)$ wird die vollständige $(\nu - 1)$te Potenz eines Ausdruckes, dessen Berechnung die folgende Gleichung für λ liefert:

$$\lambda^N + A_1\lambda^{N-1} + \cdots + A_{N-3}\lambda^3 + A_{N-2}\lambda^2 + A_N = 0.$$

Die Coefficienten derselben A_1, A_2, $\cdots$ sind ganze Invarianten der gegebenen Form f beziehungsweise vom Grade $\nu - 2$, $2(\nu - 2)$, $\cdots$, während der Grad der Gleichung:

$$N = \frac{1}{\nu - 1} \frac{(2\nu - 2)!}{(\nu - 2)!\,\nu!} = \frac{(2\nu - 2)!}{(\nu - 1)!\,\nu!}$$

in der That mit der zu Anfang erwähnten anzahltheoretisch berechneten Zahl übereinstimmt.

Einer jeden Wurzel der gefundenen Gleichung entsprich eines der gesuchten Formenbüschel. Rändern wir nämlich die Determinante $\varDelta(\lambda)$ in geeigneter Weise unten beziehungsweise an der Seite mit den Gliedern:

$$\xi_0^{i_0}\, \xi_1^{i_1} \cdots \xi_\nu^{i_\nu} \quad \text{beziehungsweise:} \quad \eta_0^{i_0}\, \eta_1^{i_1} \cdots \eta_\nu^{i_\nu},$$

so ist die so entstandene Determinante durch die $(\nu - 2)$te Potenz des Ausdruckes auf der linken Seite der obigen Gleichung theilbar. Der übrig bleibende Factor nimmt die Gestalt an:

$$T(\lambda) = T_0\lambda^{N-1} + T_1\lambda^{N-2} + \cdots + T_{N-1},$$

wo T_0, T_1, T_2, $\cdots$ simultane Invarianten vom Grade 0, $(\nu-2)$, $2(\nu - 2)$, $\cdots$ in den Coefficienten von f und vom Grade $\nu - 2$ in den Coefficienten jeder der beiden Formen ξ und η sind. Die eingehendere Untersuchung führt zu der Relation:

$$T(\lambda^{(k)}) = \varDelta(\lambda^{(k)}) (\varphi_\xi^{(k)} \psi_\eta^{(k)} - \varphi_\eta^{(k)} \psi_\xi^{(k)})^{\nu-2},$$

wo

$$\varDelta(\lambda) = N\lambda^{N-2} + (N - 1)A_1\lambda^{N-3} + \cdots + 3A_{N-3}\lambda + 2A_{N-2}$$

bedeutet. *Diese Relation ermöglicht die gewünschte Con-*

struction des zu dem Wurzelwerthe $\lambda^{(k)}$ gehörigen Formenbüschels $\varkappa^{(k)}\varphi^{(k)} + \mu^{(k)}\psi^{(k)}$.

Es ist bemerkenswerth, dass die mitgetheilte Lösung unseres Problems im Grunde auf die Anwendung des in der Habilitationsschrift des Verfassers[1]) zum ersten Male eingehend behandelten und seitdem nach verschiedenen Richtungen hin erweiterten[2]) Gesichtspunktes hinausläuft. Wie dort so erfordert auch das hier behandelte Problem zur vollständigen Erledigung eine Untersuchung sämmtlicher möglichen Ausartungen, wie sie durch das Zusammenfallen mehrerer Wurzeln der Gleichung für λ bedingt sind. Schon der Fall einer blossen Doppelwurzel giebt zur Unterscheidung zweier völlig verschiedenen Ausartungen Anlass, je nachdem die Bedingung $A_N = 0$ den Werth $\lambda = 0$ zu einer Doppelwurzel macht, oder wenn ein Wurzelwerth $\lambda^{(k)}$ zugleich den Ausdruck Δ zum Verschwinden bringt. Wie die zu Anfang erwähnten Resultate zeigen, fallen im ersteren Falle wirklich zwei der gesuchten Büschel zusammen, während im letzteren Falle der Doppelwurzel $\lambda^{(k)}$ zwei untereinander verschiedene Büschel $\varkappa\varphi + \mu\psi$ und $\varkappa'\varphi' + \mu'\psi'$ zugehören, deren Construction vermöge der Formel:

$$\frac{\partial T(\lambda^{(k)})}{\partial \lambda^{(k)}} = \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda^{(k)}} \left[(\varphi_\xi \psi_\eta - \varphi_\eta \psi_\xi)^{\nu-2} + (\varphi_\xi' \psi_\eta' - \varphi_\eta' \psi_\xi')^{\nu-2}\right]$$

durch Auflösung einer quadratischen Gleichung ermöglicht wird.

Das einfachste Beispiel für die bisherigen allgemeinen Entwickelungen liefert der Fall $\nu = 3$[3]). Die zur Lösung des Problems erforderliche Simultaninvariante lautet in symbolischer Schreibweise:

$$S(f, u, v) = (au)^2 (av)^2 (uv) ,$$

wo:

$$f = a_x^4 , \quad u = u_x^3 , \quad v = v_x^3$$

gesetzt ist. Den weiteren Specialfall $\nu = 4$ hat C. Stephanos in der citirten Arbeit sehr ausführlich, jedoch mittelst einer wohl kaum verallgemeinerungsfähigen und mehr rechnenden Methode behandelt. Die von ihm aufgestellte Gleichung fünften Grades[4])

---

1) Mathematische Annalen, Bd. 28, pag. 381.

2) Vergl. den demnächst in dem Journal de Mathématiques erscheinenden Brief des Verfassers an Ch. Hermite.

3) Vergl. die citirte Habilitationsschrift des Verfassers, pag. 436—437.

4) l. c. pag. 80.

geht durch eine sehr einfache Substitution in diejenige Gleichung desselben Grades über, auf welche die Anwendung unserer allgemeinen Theorie führt; ebenso dienen die übrigen von C. STEPHANOS für diesen Specialfall berechneten invarianten Bildungen vortrefflich zur Bestätigung unserer allgemeinen Entwickelungen.

Königsberg i/Pr., den 7. October 1887.

A. Mayer, *Ueber ein Bewegungsproblem.*

Das Problem der Bewegung eines schweren Punktes auf fester Oberfläche ist nur in den einfachsten Fällen vollständig lösbar, für eine beliebige Rotationsfläche z. B. nur dann, wenn die Rotationsaxe vertical steht. Bildet also die Rotationsfläche etwa die Wand einer Höhlung in einem starren Körper, dessen Schwerpunkt auf der Rotationsaxe liegt und dessen Basis eine ebene, von der Rotationsaxe senkrecht getroffene Fläche ist, und wird dieser Körper mit seiner Basis auf eine schiefe Ebene fest aufgeschraubt, so vermag man die Bewegung eines schweren Punktes, der ohne Reibung und bei beliebiger Richtung der Anfangsgeschwindigkeit auf jener Wand herabfällt, noch nicht genau zu bestimmen.

Nun kann man aber den Körper auch bloss auf die schiefe Ebene stellen und ihn auf dieser herabgleiten lassen. Lässt man dann gleichzeitig wieder einen schweren Punkt längs der Höhlenwand herabfallen, so beeinflussen sich jetzt Körper und Punkt gegenseitig in ihren Bewegungen; das ursprüngliche Problem hat sich in ein complicirteres verwandelt, aber dieses complicirtere Problem ist, wenn man immer jede Reibung vernachlässigt, nunmehr vollständig lösbar.

Diese Bemerkung, welche allerdings in der Mechanik durchaus nicht vereinzelt dasteht, hebe ich als auffälligstes Resultat der nachstehenden allgemeineren Untersuchungen besonders hervor. Die letzteren dürften aber auch an und für sich insofern einiges Interesse darbieten, als überhaupt solche Aufgaben über die Bewegung eines schweren Punktes auf einem starren Körper, in denen dem Körper selbst eine gewisse Beweglichkeit gestattet ist, und es sich nun darum handelt, die gleichzeitige und einander wechselseitig bedingende Bewegung

von Körper und Punkt zu bestimmen, soweit mir bekannt ist, bisher immer nur in solchen Fällen behandelt worden sind, wo in Folge besonderer Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten der Punkt beständig in einer und derselben Verticalebene bleibt. —

Die allgemeine Aufgabe, welche hier soweit als möglich gelöst werden soll, ist folgende:

Ein schwerer starrer Körper gleitet mit seiner ebenen Basis reibungslos auf einer festen schiefen Ebene. Der Körper besitzt überdies eine Höhlung von gegebener geometrischer Gestalt, an deren Wandfläche ein schwerer Punkt ebenfalls ohne Reibung herabfällt. Es handelt sich darum, die gleichzeitige Bewegung des Körpers und des Punktes zu bestimmen.

Dabei setze ich selbstverständlich voraus, dass der Körper nicht umkippen kann und dass der Punkt auf der Höhlenwand bleibt, dass letzterer also entweder zwischen zwei starren, einander unendlich nahen, parallelen und mit dem Körper fest verbundenen Flächen herabfällt, oder aber seine Bewegung nur so lange verfolgt werden soll, als sie längs der Wandfläche vor sich geht, oder als der Druck zwischen Punkt und Wandfläche nicht negativ geworden ist.

Um diese Aufgabe zu lösen, nehme ich die schiefe Ebene zur XY- Ebene eines festen rechtwinkligen Axensystens XYZ, dessen X-Axe horizontal liege und dessen Z-Axe von der schiefen Ebene aus nach oben gehe. Nennt man dann $X\ Y\ Z$ die Coordinaten des schweren Punktes m, $X_h\ Y_h\ Z_h$ die Coordinaten eines beliebigen Massentheilchens m_h des Körpers und α die Neigung der schiefen Ebene, so ist jedes Z_h constant und daher

$$T = \tfrac{1}{2}\sum\nolimits^h m_h(X_h'^2 + Y_h'^2) + \frac{m}{2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)$$

die gesammte lebendige Kraft von Körper und Punkt, während die Kräftefunction U sich auf

$$U = -g\sum\nolimits^h m_h Y_h \sin\alpha - gm\,(Y\sin\alpha + Z\cos\alpha)$$

reducirt.

Bezeichnet man weiter mit M die Masse des Körpers und mit A, B, C die Coordinaten seines Schwerpunktes S und setzt:

$$(1.)\quad \begin{aligned} X &= A + x\ , & Y &= B + y\ , & Z &= C + z\ , \\ X_h &= A + x_h\ , & Y_h &= B + y_h\ , & Z_h &= C + z_h\ , \end{aligned}$$

sodass C, sowie jedes z_h constant ist, während $x\,y\,z$ und $x_h\,y_h\,z_h$ die Coordinaten der Punkte m und m_h in einem Axensysteme darstellen, dessen Axen $x\,y\,z$ parallel zu den festen Axen $X\ Y\ Z$ vom Körperschwerpunkt S ausgehen, so erhalten die lebendige Kraft und der wirksame Theil der Kräftefunction die Werthe:

$$(2.)\quad \begin{cases} T = \dfrac{M+m}{2}(A'^2 + B'^2) + m\,(A'x' + B'y') \\ \qquad + \frac{1}{2}\sum^h m_h\,(x_h'^2 + y_h'^2) + \dfrac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\ , \\ U = -\,g\,(M+m)\,B\sin\alpha - gm\,(y\sin\alpha + z\cos\alpha). \end{cases}$$

Legt man endlich in der xy-Ebene durch den Schwerpunkt S zwei mit dem Körper fest verbundene Axen ξ und η, die zur Zeit $t=0$ mit den Axen x und y zusammenfallen mögen, und nennt Θ den, je nach dem Sinne der Drehung positiv oder negativ gerechneten Winkel, um den sich nach der Zeit t die ξ-Axe gegen die x-Axe gedreht hat, so bestehen zwischen den Coordinaten $x\,y\,z$ und $\xi\,\eta\,\zeta$ eines und desselben Punktes in den beiden rechtwinkligen Axensystemen $x\,y\,z$ und $\xi\,\eta\,\zeta$, welche die z-Axe gemein haben, zur Zeit t die Relationen:

$$(3.)\quad \begin{cases} x = \xi\cos\Theta - \eta\sin\Theta\ , \\ y = \xi\sin\Theta + \eta\cos\Theta\ , \\ z = \zeta\ . \end{cases}$$

Dabei sind die Coordinaten $\xi_h\,\eta_h$ eines jeden Körperpunktes m_h unabhängig von t; in den Gleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} x_h = \xi_h\cos\Theta - \eta_h\sin\Theta\ , \\ y_h = \xi_h\sin\Theta + \eta_h\cos\Theta \end{cases}$$

ist also rechts nur Θ mit der Zeit veränderlich, während in den Gleichungen (3.), wenn man sie auf den Punkt m bezieht, auch ξ, η, ζ mit t sich ändern.

Der Punkt m soll aber auf einer gegebenen, mit dem starren Körper fest verbundenen Oberfläche bleiben. Seine Coordinaten ξ, η, ζ können also als gegebene Functionen zweier Parameter q_1 und q_2 betrachtet werden. Die Gleichungen (3.) liefern dann die Coordinaten $x\,y\,z$ des Punktes m als Functionen der drei Variabelen Θ, q_1, q_2 und die Lage unseres ganzen Systems wird durch die fünf unabhängigen Grössen:

$$A,\ B,\ \Theta,\ q_1\ ,\ q_2$$

bestimmt.

Nach dem Hamilton'schen Principe führt die vorgelegte Aufgabe daher zunächst auf die fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial A'} - \frac{\partial(T+U)}{\partial A} = 0\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial B'} - \frac{\partial(T+U)}{\partial B} = 0 \text{ und}$$

$$(5.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q} = 0\ ,$$

worin für das nur zur Abkürzung eingeführte q der Reihe nach Θ, q_1 und q_2 zu setzen ist.

Nach (2.) reduciren sich aber die beiden ersten Gleichungen auf:

$$(6.)\qquad \begin{cases} (M+m)A'' + mx'' = 0\ , \\ (M+m)B'' + my'' + g(M+m)\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

und ergeben also integrirt sofort die Schwerpunktssätze:

$$(7.)\qquad \begin{cases} A = a + a_1 t - \dfrac{mx}{M+m}\ , \\ B = b + b_1 t - \dfrac{my}{M+m} - g\dfrac{t^2}{2}\sin\alpha\ . \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man A und B aus den Gleichungen (5.) eliminiren und damit die Aufgabe zurückführen auf drei Differentialgleichungen 2. O. zwischen Θ, q_1, q_2 und t allein.

Diese drei Differentialgleichungen sind aber wiederum die Differentialgleichungen eines Problems von der Form

$$\delta\int(T+U)\,dt = 0\ .$$

Nach (2.) enthält nämlich $T+U$ nur das Eine Glied

$$F \equiv m(A'x' + B'y')\ ,$$

welches sowohl von A und B, wie von den Variabelen q abhängt.

Dieses Glied liefert zur Gleichung (5.) den Beitrag:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q'} - \frac{\partial F}{\partial q} \equiv \frac{dm\left(A'\dfrac{\partial x'}{\partial q'} + B'\dfrac{\partial y'}{\partial q'}\right)}{dt} - m\left(A'\frac{\partial x'}{\partial q} + B'\frac{\partial y'}{\partial q}\right),$$

d. i. wegen $\dfrac{\partial x'}{\partial q'} \equiv \dfrac{\partial x}{\partial q}$, $\dfrac{d\dfrac{\partial x}{\partial q}}{dt} \equiv \dfrac{\partial x'}{\partial q}$, ...

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q'} - \frac{\partial F}{\partial q} = m\left(A''\frac{\partial x}{\partial q} + B''\frac{\partial y}{\partial q}\right).$$

Eliminirt man hieraus A'' und B'' mit Hülfe der Gleichungen (6.), so ergiebt sich:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q'} - \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{m^2}{M+m}\left(x''\frac{\partial x}{\partial q} + y''\frac{\partial y}{\partial q}\right) - gm\frac{\partial y}{\partial q}\sin\alpha\,.$$

Dieser Werth aber lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q'} - \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Pi}{\partial q'} - \frac{\partial \Pi}{\partial q},$$

worin:

$$\Pi = -\frac{m^2}{M+m}(x'^2 + y'^2) + gmy\sin\alpha\,.$$

Um also jene drei Differentialgleichungen zu bilden, die aus den Gleichungen (5.) durch Elimination von A und B entstehen, kann man gleich von vornherein in $T + U$ das Glied F durch Π ersetzen und somit, da überdies bei den partiellen Differentiationen nach q und q' alle Glieder von selbst wegfallen, die nicht von diesen Grössen abhängen, nach (2.) nunmehr

$$T + U =$$

$$\frac{1}{2}\sum^h m_h(x_h'^2 + y_h'^2) + \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \Pi - gm(y\sin\alpha + z\cos\alpha)$$

nehmen; oder, da unsere Gleichungen unverändert bleiben, wenn wir $T + U$ mit einem constanten Factor multipliciren, können wir jetzt T und U ersetzen durch:

$$(8.)\left\{\begin{aligned} &T_1 = \frac{M+m}{2}\sum^h m_h(x_h'^2 + y_h'^2) + \frac{Mm}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{m(M+m)}{2}z'^2 \\ &\text{und:} \\ &U_1 = -gm(M+m)\,z\cos\alpha\,, \end{aligned}\right.$$

worin nun die Werthe (3.) und (4.) zu substituiren sind.

Aus diesen Werthen folgt aber:

$$x_h'^2 + y_h'^2 = (\xi_h^2 + \eta_h^2)\Theta'^2\,,$$

$$x'^2 + y'^2 = (\xi^2 + \eta^2)\Theta'^2 + \xi'^2 + \eta'^2 + 2\Theta'(\xi\eta' - \eta\xi')\,.$$

Setzt man daher noch:

$$(9.)\quad\left\{\begin{aligned} &\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2 \quad \text{und:} \\ &\sum^h m_h(\xi_h^2 + \eta_h^2) = M\varkappa^2\,, \end{aligned}\right.$$

sodass $M\varkappa^2$ das Trägheitsmoment des Körpers um die senkrecht zur Basis durch seinen Schwerpunkt gehende z-Axe darstellt, so kann man bei der Bildung der drei Differentialgleichungen (5.) den Ausdrücken (2.) die folgenden:

$$(10.)\begin{cases} T_1 = \frac{M}{2}\{[(M+m)\varkappa^2 + m\varrho^2]\,\Theta'^2 + 2m\,\Theta'(\xi\eta' - \eta\xi') \\ \qquad + m(\xi'^2 + \eta'^2)\} + \frac{m(M+m)}{2}\,\zeta'^2\,, \\ U_1 = -\,gm(M+m)\,\zeta\cos\alpha \end{cases}$$

substituiren, in denen nunmehr für ξ, η, ζ diejenigen Functionen der beiden Parameter q_1, q_2 zu setzen sind, welche die Oberfläche im Körper fixiren, auf der der Punkt m herabfällt.

Damit ist unsere Aufgabe zurückgeführt auf die Integration der drei Differentialgleichungen 2. O. zwischen Θ, q_1, q_2 und t allein:

$$(11.)\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial\Theta'} - \frac{\partial(T_1+U_1)}{\partial\Theta} = 0\,, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q_1'} - \frac{\partial(T_1+U_1)}{\partial q_1} = 0\,, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q_2'} - \frac{\partial(T_1+U_1)}{\partial q_2} = 0\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten keine Integrationsconstante und lehren somit, dass die relative Bewegung von Körper und Punkt um den Körperschwerpunkt S ganz unabhängig von der Bewegung des letzteren vor sich geht.

Ferner kommt Θ selbst in $T_1 + U_1$ nicht vor. Die Gleichungen (11.) besitzen daher das Integral:

$$(12.)\quad \frac{1}{M}\frac{\partial T_1}{\partial\Theta'} \equiv [(M+m)\varkappa^2 + m\varrho^2]\,\Theta' + m(\xi\eta' - \eta\xi') = c\,,$$

welches, wie leicht zu sehen, nichts anderes ist als der Flächensatz der XY-Ebene in der relativen Bewegung unseres Systems um seinen Gesammtschwerpunkt.

Da endlich $T_1 + U_1$ auch frei von t, und T_1 selbst eine homogene Function 2. O. der Differentialquotienten Θ', q_1', q_2' ist, so hat man noch das zweite, dem Satz der lebendigen Kraft entsprechende Integral der Gleichungen (11.):

(13.) $$T_1 - U_1 = h\,.$$

Durch Anwendung der Hamilton-Jacobi'schen Methode folgt hieraus sofort, dass man die Aufgabe auf eine partielle Differentialgleichung 1. O. mit nur zwei unabhängigen Variabeln zurückführen kann, auf diejenige Gleichung:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2, c_1) = h$$

nämlich, welche man erhält, wenn man aus dem Integrale (13.) die Differentialquotienten Θ', q_1', q_2' mit Hülfe der Substitutionen:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \Theta'} = \text{const.} \equiv c_1\,, \quad \frac{\partial T_1}{\partial q_1'} = \frac{\partial V}{\partial q_1} \equiv p_1\,, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = \frac{\partial V}{\partial q_2} \equiv p_2$$

eliminirt.

Zur vollständigen Lösung dieser partiellen Differentialgleichung genügt aber die Kenntniss irgend einer von H unabhängigen Lösung f der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(Hf) \equiv \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial f}{\partial q_2} = 0\,,$$

d. h. nur in anderen Worten: Die vorgelegte Aufgabe lässt sich mit Hülfe von algebraischen Operationen und blossen Quadraturen vollständig lösen, so oft man noch irgend ein drittes, von den Integralen (12.) und (13.) unabhängiges und, wie diese, von t und Θ freies Integral der Differentialgleichungen (11.) zu finden vermag; ein Resultat, welches man übrigens auch daraus ableiten kann, dass man einen von Θ und t freien Jacobi'schen Multiplicator des Systems (11.) kennt, nämlich den Multiplicator:

$$N = \sum \pm \frac{\partial^2 T_1}{\partial \Theta' \partial \Theta'}\,\frac{\partial^2 T_1}{\partial q_1' \partial q_1'}\,\frac{\partial^2 T_1}{\partial q_2' \partial q_2'}\,.$$

Nimmt man z. B. an —, und hier komme ich eben zu dem vorangestellten Beispiele —, dass die Wand der Körperhöhlung von einer Rotationsfläche gebildet werde, deren Axe die z-Axe ist, also senkrecht zur ebenen Basis des Körpers durch seinen Schwerpunkt geht, so kann man

(14.) $$\xi = \varrho \cos q\,, \quad \eta = \varrho \sin q\,, \quad \varrho = \varrho(\zeta)$$

setzen, wobei also q und ζ die Rolle der früheren Parameter q_1 und q_2 spielen. Durch diese Substitutionen geht, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{d\varrho}{d\zeta} \equiv \varrho_1$$

setzt, T_1 über in:

$$T_1 = \frac{M}{2}\{[(M+m)\,x^2 + m\varrho^2]\Theta'^2 + 2m\varrho^2\Theta' q' + m\,\varrho^2\,q'^2\}$$

$$+ \frac{m}{2}(M+m+M\varrho_1^2)\,\zeta'^2,$$

während U_1 unverändert bleibt.

$T_1 + U_1$ wird also auch frei von q selbst und man erhält daher neben den Integralen (12.) und (13.) noch das dritte neue Integral:

$$\frac{1}{mM}\frac{\partial T_1}{\partial q'} \equiv \varrho^2(\Theta' + q') = c_1\,;$$

das Integral (12.) ferner wird:

$$(M+m)\,x^2\,\Theta' + m\varrho^2(\Theta' + q') = c$$

und durch diese beiden Integrale geht das Integral (13.) über in:

$$\frac{M}{2}(c\Theta' + mc_1\,q') + \frac{m}{2}(M+m+M\varrho_1^2)\,\zeta'^2 + gm(M+m)\,\zeta\cos\alpha = h\,.$$

Unter Einführung von zum Theil neuen Integrationsconstanten γ, γ_1, γ_2 erhält man aus diesen Gleichungen:

$$\Theta' = \gamma\,,\quad q' = \frac{\gamma_1}{\varrho^2} - \gamma\,,$$

$$\frac{1}{2}(M+m+M\varrho_1^2)\,\zeta'^2 + g(M+m)\,\zeta\cos\alpha + \frac{M}{2}\frac{\gamma_1^2}{\varrho^2} = \gamma_2$$

oder:

$$(15.)\quad \begin{cases} \Theta = \gamma t\,, \\[4pt] \left(\dfrac{dt}{d\zeta}\right)^2 = \dfrac{(M+m+M\varrho_1^2)\,\varrho^2}{2(\gamma_2 - g\,(M+m)\,\zeta\cos\alpha)\,\varrho^2 - M\gamma_1^2}\,, \\[4pt] \dfrac{dq}{d\zeta} = \dfrac{\gamma_1 - \gamma\varrho^2}{\varrho^2}\cdot\dfrac{d\zeta}{dt}\,. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen, in denen ϱ eine gegebene Function von ζ, und ϱ_1 ihren Differentialquotienten bezeichnet, bestimmen sich mittelst zweier Quadraturen t und q als Functionen von ζ, womit also umgekehrt auch ζ und q als Functionen von t definirt sind, und die erste Gleichnng, welche Θ unmittelbar durch t ausdrückt, lehrt, dass der Körper sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit um die z-Axe dreht, im Besondern also sich selbst immer parallel bleibt, wenn er keine anfängliche Drehung erhalten hatte.

Hat man die Variabelen Θ, ζ, q als Functionen von t ermittelt, so bestimmen unmittelbar die Gleichungen (14.) die Bahn des schweren Punktes m auf dem Körper und nach (3.) und (14.) die Gleichungen:

$$x = \varrho \cos(q + \Theta), \quad y = \varrho \sin(q + \Theta), \quad z = \zeta$$

die relative Bewegung dieses Punktes um den Körperschwerpunkt S, worauf die Gleichungen (7.) die absolute Bewegung von S, und endlich die Gleichungen (1.) auch die absolute Bewegung von m im Raume ergeben.

Hiermit ist die Anfangs aufgestellte Behauptung bewiesen.

Man sieht sofort, dass die Gleichungen (11.) keineswegs dieselben sind, als ob der Körperschwerpunkt S fest wäre, der Körper sich also nur um die, senkrecht zur schiefen Ebene durch S gelegte z-Axe drehen könnte, und erkennt daraus, dass die Lösbarkeit des Problems in dem betrachteten Beispiele wesentlich der Annahme zu verdanken ist, dass der Körper auf der schiefen Ebene gleiten kann.

Ich füge noch hinzu, dass die allgemeine Aufgabe immer lösbar wird, wenn sich die Körperhöhlung auf eine blosse Rinne oder einen blossen Kanal reducirt. Denn dann werden die Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes m, indem diesem eine bestimmte Curve auf oder in dem Körper vorgeschrieben ist, Functionen eines einzigen Parameters q, das Integral (12.) liefert daher Θ' als blosse Function von q und q', und indem man diesen Werth von Θ' in das Integral (13.) substituirt, erhält man eine in q' quadratische Gleichung zwischen q' und q allein, womit das Problem auf eine blosse Quadratur zurückgeführt ist.

Endlich, wenn man die Gleichung

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

derjenigen Oberfläche im starren Körper, auf welcher der schwere Punkt m herabfällt, nicht durch Einführung der Parameter q_1 und q_2 identisch erfüllt, so treten an die Stelle der beiden letzten Gleichungen (11.) die drei Gleichungen:

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T_1}{\partial \xi'} - \dfrac{\partial (T_1 + U_1)}{\partial \xi} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T_1}{\partial \eta'} - \dfrac{\partial (T_1 + U_1)}{\partial \eta} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T_1}{\partial \zeta'} - \dfrac{\partial (T_1 + U_1)}{\partial \zeta} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0\,. \end{cases}$$

In dem Falle, wo der Punkt die Oberfläche etwa nach der durch $\varphi < 0$ markirten Seite zu verlassen vermag, gelten diese Gleichungen ebenso wie die Gleichungen (11.) nur so lange, als der Punkt wirklich auf der Oberfläche bleibt. In den Gleichungen (16.) ist aber dann, bis auf einen stets positiven Factor, λ dem Drucke gleich, den der Punkt auf die Fläche ausübt. Die Berechnung von λ nach Integration der Gleichungen (11.) und die Untersuchung seines Vorzeichens giebt daher Aufschluss darüber, ob und wann der Punkt die Oberfläche verlässt.

SITZUNG VOM 14. NOVEMBER 1887.

Dr. Johannes Walther, *Die Entstehung von Kantengeröllen in der Galalawüste.* (*Vorgelegt von H. Credner.*) *Mit einer Tafel.*

Die Frage nach der Bildung jener eigenthümlichen »*Dreikanter*« oder »*Kantengerölle*«, welche sich im Diluvium der norddeutschen Tiefebene finden, ist in den letzten Jahren in sehr verschiedenem Sinne erörtert worden, ohne eine allseitig anerkannte Beantwortung erfahren zu haben.

Jeder, wenn auch kleine Beitrag zur Lösung des Problems dürfte daher willkommen sein. Ich zögere deshalb nicht, über einige Beobachtungen in der Galalawüste zu berichten, welche mit der Bildungsweise der norddeutschen Kantengerölle in Zusammenhang zu stehen scheinen.

Die sogenannte arabische Wüste zwischen Nil und Rothem Meer ist ein Bergland von überaus complicirtem Bau. Ein System von Dislocationen hat das ursprünglich einförmige Tafelland zerbrochen. Staffelbrüche und Grabenversenkungen, Flexuren und weite Aufbrüche lassen unter den eozänen Kalken sowohl Kreidemergel und Rudistenbänke, wie die fossilleeren Schichten des nubischen Sandsteins heraustreten. An manchen Stellen nimmt sogar der liegende Granit einen wichtigen Antheil an dem grossartigen Landschaftsgemälde. Das Fehlen jeder älteren als cretaceischen Schichtenreihe bot ein ungelöstes Räthsel, welches nur noch räthselhafter wurde, als vor einigen Jahren Schweinfurth im nubischen Sandstein des Uadi Arabah am Fusse der nördlichen Galala eine Kalkbank entdeckte mit Crinoidenstielen und vielen Brachiopoden, welche durch E. Beyrich als Spirigerina concentrica bestimmt wurden. Das Auftreten von devonischen Brachiopoden in der sonst fossilleeren über 400 m mächtigen Schichtengruppe beansprucht ein hervorragendes

Interesse und mit Freuden nahm ich die Einladung von Prof. SCHWEINFURTH an, mit ihm gemeinsam jene Localität zu untersuchen.

Nach mehrtägigem Sturm erreichte ich mit einem arabischen Fischerboot die afrikanische Küste und traf in der Nähe des Leuchtthurms von Zafarane am 25. April mit Prof. SCHWEINFURTH zusammen, um mehrere Tage lang die Lagerung der paläozoischen Schichten, wie sie eine Tagereise vom Kloster St. Anton entfernt hervortreten, zu untersuchen.

Am 28. April verliess ich zu Kameel das Lager, um die Verbreitung der Crinoidenbank nach Süden festzustellen. Eine Reihe von Staffelbrüchen mit steilen Abfällen veranlassten mich, das Kameel mit dem Beduinen zurückzuschicken und zu Fuss weiter vorzudringen. Nachdem ich einige der heteroklinen Thäler gekreuzt hatte, kam ich in ein Uadi von etwa 1 km Breite mit synklinalem Einfallen der Schichten. Einige verdorrte Salsulabüsche und Geröllablagerungen deuteten an, dass hier einstmals Wasser geflossen sei, allein die Vertheilung der Gerölle im Rinnsal liess erkennen, dass die Wasserführung desselben überaus unregelmässig erfolgt sein müsse. Das heutige Rinnsal war etwas eingeschnitten in ein älteres Geröllager, welches auf einen früher grösseren Wasserreichthum dieses Uadi's hindeutet.

Da in jener Gegend am 5. April bedeutende Regengüsse niedergegangen waren, so trugen alle Gerölle des inneren kleineren Rinnsals die Spuren der transportirenden Thätigkeit des Wassers. Sie waren in Folge dessen gerundet, aber doch rauh anzufühlen und entbehrten durchaus jenes höchst charakteristischen *speckigen Glanzes*, welchen das Sandgebläse der Chamsinstürme fast allen Gesteinen in der Wüste giebt. Im Gegensatz zu diesen jüngst vom Wasser neu bearbeiteten Geröllen waren diejenigen der älteren Kiesablagerungen an den Gehängen des Uadi schon eine geraume Zeit hindurch vom Wasser nicht mehr bespült worden, denn oberflächlich trugen sie alle die Politur von Seiten des Flugsandes. Gerölle, welche nur zur Hälfte aus dem sandigen Zwischenmittel herausragten, waren in ihrer unteren Hälfte gerundet, aber rauh, und nur soweit vom Sande polirt, als sie aus der Erde herausschauten. Ich hatte diese Erscheinung auf meinen Reisen durch die Sinaiwüsten schon mehrfach beobachtet, allein hier fiel mir ein Charakterzug an den Geröllen auf, den ich bis dahin noch niemals gesehen hatte. Viele vom Sande polirten Gerölle von hartem, klingenden Kalk-

stein zeigten nämlich mehr oder minder deutliche *Kanten* auf ihrer Oberfläche. Bald waren dieselben nur angedeutet, bald so scharf ausgeprägt, dass man einen Carchariaszahn vor sich zu haben meinte.

Ich verfolgte das Uadi eine Strecke lang bis zu seiner flachen Ausmündung in die weite Wüstenebene und fand überall dieselben *Facetten* an den Kalkgeröllen, durchweg aber nur an den vom Sand polirten, nie an den vom Wasser gerollten Stücken.

Bei Verfolgung dieser Entdeckung hatte ich mich von meinem Wege verirrt, dazu trat gegen Mittag Sandsturm ein, und da ich keine Nahrungsmittel mitgenommen hatte, musste ich die interessante Localität verlassen und nach dem Lager zu gelangen suchen. Nach zweistündigem Wandern erreichte ich das Hauptthal der Gegend, das eigentliche Uadi Arabah, in dem die Zelte aufgeschlagen waren. Zu meiner Freude fand ich auch hier auf den flachen Schotterterrassen an den Gehänge des Thales dieselben oberflächlich polirten Gerölle und wiederum waren auf vielen derselben *deutliche Kanten* angeschliffen. Am Nachmittag wurde der Sandsturm so stark, dass das eine Zelt umgerissen wurde, das andere aber von 12 Beduinen gehalten werden musste, um es vor dem gleichen Schicksal zu bewahren. Jetzt bot sich die beste Gelegenheit, zu beobachten, wie die Sandwolken über die Gerölle dahinzogen und dieselben polirten. An manchen vorher sandfreien Stellen war fusshoch der feine Quarzsand aufgeweht und überall wirbelte er schleifend zwischen den Geröllen. Von Bedeutung für die Entstehung der Kanten schien zu sein, dass die Gerölle nahe aneinander lagen, indem dadurch Hindernisse und Interferenzstreifen geschaffen wurden für die Bewegung des wirbelnden Sandes. Nicht alle Gerölle trugen Kanten, und wirkliche *Drei*kanter dürften kaum 1 % darunter gewesen sein. Dahingegen liessen sich alle möglichen Uebergänge beobachten, von völlig runden Flächen zu kaum bemerkbaren Kanten und endlich bis zu schneidenden Schärfen. Ob diese scharfen Kanten alle gleichmässig zur Windrichtung orientirt waren, darüber finde ich leider keine Aufzeichnung in meinen Tagebüchern.

Auf beifolgender Tafel ist eine Anzahl charakteristischer Kantengerölle aus der Galalawüste zur Darstellung gebracht. Sie gleichen in ihrer Gestalt solchen aus dem norddeutschen Diluvium zum Verwechseln. Namentlich möchte ich darauf noch-

mals besonders hinweisen, dass eine Anzahl der abgebildeten Kantengerölle nur mit ihrer oberen Hälfte aus dem Boden herausragten und nur hier die angeschliffenen Kanten zeigen, während die untere von Erde bedeckte Hälfte keinerlei Kanten erkennen lässt und völlig der Sandpolitur entbehrt. Ich glaube, dass gerade diese Stücke sichere Beweise dafür liefern, dass es nur die schleifende Thätigkeit des Wüstensandes ist, welche hier die facettirte Oberfläche erzeugte.

Dr. Ed. Study, *Ueber den Begriff der Invariante algebraischer Formen.* (*Vorgelegt von A. Mayer.*)

1.

Die vorliegende Note erhebt keinen Anspruch darauf, die Wissenschaft um irgend welche neue Theoreme zu bereichern; was an ihrem materiellen Inhalt vielleicht neu sein mag, ist ganz elementarer Natur. Sie bezweckt theils eine schärfere Umgrenzung, theils eine Erweiterung, theils auch eine von der bisherigen principiell abweichende Fassung der Grundbegriffe der Invariantentheorie.

Ihre Veranlassung war das Bedürfniss nach einer scharf umschriebenen Bestimmung des Begriffes der »irrationalen Covariante«, welches sich mir bei verschiedenen Untersuchungen aufgedrängt hatte. In der mir bekannten Litteratur fand ich dasselbe nicht befriedigt, ja ich fand sogar überhaupt keine Definition dieses Begriffes, wiewohl man das Wort mehrfach gebraucht. Um zu einer solchen Definition zu gelangen, schien mir nun der gewöhnliche Begriff der rationalen Covariante kein geeigneter Ausgangspunkt zu sein. Auch war es mir bereits aus anderen Gründen wünschenswerth erschienen, die Fassung der Grundbegriffe der Theorie der Invarianten etwas abzuändern.

In einer Reihe von Untersuchungen, die ich demnächst der Oeffentlichkeit zu übergeben gedenke, sah ich mich häufig veranlasst, solche Formen zu betrachten, von welchen gewisse Invarianten von vorn herein gleich *Zahlen* gesetzt sind. So zeigt sich zum Beispiel, dass für das Studium der Gruppe von linearen und dualistischen Transformationen, welche einen festen Kegelschnitt in sich selbst überführen, die Betrachtung einer ternären quadratischen Form von Wichtigkeit ist, deren Invariante einen numerischen Werth hat.

Solche Formen verlieren nun im Allgemeinen ihre Eigenthümlichkeit, sobald man auf sie lineare Transformationen anwendet, deren Determinante von der Einheit verschieden ist; denn jene Invarianten erhalten ja dann einen Factor, welcher eine Potenz der Transformationsdeterminante ist.

Es erscheint mir daher zweckmässig, in der Invariantentheorie im Allgemeinen nur von solchen linearen Transformationen Gebrauch zu machen, deren Determinante den Werth Eins hat.

Eben dahin führt auch der naheliegende Wunsch, die Definition der Invariante in der Formentheorie so einzurichten, dass sie sich aus dem allgemeinen Invariantenbegriff, welchen LIE in seiner Theorie der Transformationsgruppen zu Grunde legt, durch Specialisirung ergiebt. Das ist aber mit dem bisherigen Begriffe der Invarianten algebraischer Formen bekanntlich nicht der Fall.

Ferner lässt mir noch ein dritter Grund eine Abweichung von der gebräuchlichen Fassung des Invariantenbegriffes wünschenswerth erscheinen.

Man definirt bekanntlich als »Invariante« eine ganze rationale Function der Coefficienten algebraischer Formen, welche sich nach Ausführung einer linearen Transformation mit einem Factor reproducirt, von welchem man entweder verlangt, dass er eine Potenz der Transformationsdeterminante ist, oder auch nur, dass er allein von den Constanten der Transformation abhängt. Im letzteren Falle *beweist* man, dass dieser Factor eine Potenz der Transformationsdeterminante ist.

Hat man es nun nur mit Functionen der Coefficienten einer einzigen Grundform zu thun, so folgt sofort, dass eine jede Invariante eine *homogene* Function ihrer Argumente ist. Derselbe Schluss kann aber im Allgemeinen nicht mehr gemacht werden, sobald es sich um simultane Invarianten mehrerer Formen handelt. Seien zum Beispiel (ax), (bx), (cx) drei binäre lineare Formen, so ist bereits $(ab) + (bc)$ eine Invariante, welche obiger Definition vollkommen genügt, aber nicht in Bezug auf die Coefficienten jeder einzelnen Grundform homogen ist. Für das Studium der Gruppe aller linearen Transformationen, deren Invariantentheorie eben die Theorie der algebraischen Formen ist, haben aber derartige Bildungen keinerlei Bedeutung; hier interessiren nur solche Eigenschaften der algebraischen Formen, welche allein

von den *Verhältnissen* der Coefficienten einer jeden abhängen. Man sieht sich daher jetzt genöthigt, den Begriff der Invariante nachträglich einzuschränken, und die Homogeneïtät nun ausdrücklich zu verlangen, während man sie im besonderen Falle noch beweisen konnte. Es scheint mir aber zweckmässiger, von vornherein einen *einheitlichen* Begriff der Invariante zu Grunde zu legen.

Eine Abweichung von dem seitherigen Invariantenbegriff wird aber geradezu zur Nothwendigkeit, wenn man auch irrationale Invarianten mit in Betracht ziehen will. Während nämlich hinsichtlich der rationalen Invarianten wenigstens das Theorem besteht, dass eine jede eine ganze Function von homogenen Invarianten ist, gibt es hinsichtlich der irrationalen Invarianten kein ähnliches Theorem; man muss also jetzt entweder auch nicht-homogene Invarianten zulassen, was im Allgemeinen keinen Zweck hat, oder man muss die Homogeneïtät mit in den Begriff der irrationalen Invariante aufnehmen. Dann aber muss man dasselbe doch offenbar auch hinsichtlich der rationalen Invarianten thun.

Was endlich die *Umgrenzung* des Invariantenbegriffes anlangt, so lässt sich geltend machen, dass die übliche Definition der Invariante umfassender ist, als man sie in Wirklichkeit gebraucht und gebrauchen kann. Seien z. B. A und B irgend zwei Invarianten gleichen Grades, so bezeichnet man auch $A + \lambda B$ als eine Invariante, wo λ irgend eine Zahl sein kann, z. B. auch $= \pi$. In Wirklichkeit operirt man aber in allen Fällen, wo man einen solchen Parameter specialisirt, nur mit rationalen Zahlen, und es wird sich auch niemals ein Bedürfniss herausstellen können, in der Theorie der rationalen, bezüglich algebraischen Invarianten andere als rationale, bezüglich algebraische Zahlen zu gebrauchen[1]). Es scheint mir gut, die Bestimmung der Grössengebiete, in welchen man sich bewegt, auch sogleich mit in den Begriff der Invariante aufzunehmen.

---

1) Vgl. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Festschrift, Berlin 1882. § 3, S. 7. Die in diesem Werke niedergelegten Ideen sind für die ganze Gestaltung der nachher aufzustellenden Grundbegriffe massgebend gewesen; auch habe ich mich der in demselben angewendeten Terminologie im Wesentlichen angeschlossen.

2.

Ich will nun versuchen, ein System von Begriffsbildungen zu entwickeln, welches den genannten Bedürfnissen Rechnung trägt, und sich auch auf irrationale Invarianten erstreckt. Um jedoch dem ganzen Gebäude die nöthige Einfachheit zu wahren, und seinen Plan besser hervortreten zu lassen, gebe ich die aufzustellenden Begriffe nicht sogleich in ihrer grössten Allgemeinheit, und auch nicht genau in der Form, in welcher sie später verwendet werden sollen. Alle Definitionen sind daher so zu verstehen, dass nachträgliche, besonderen Bedürfnissen entsprechende Erweiterungen vorbehalten bleiben.

Wenn im Folgenden von einer »*linearen Transformation*« schlechtweg die Rede ist, so ist damit immer eine solche von der Determinante Eins gemeint. Eine lineare Transformation, deren Determinante einen unbestimmt gelassenen Werth hat, wird als eine »*allgemeine lineare Transformation*« bezeichnet. Die Coefficienten der Transformation werden im letzteren Falle als völlig unbestimmte Veränderliche[1]) gedacht, ebenso aber auch im ersteren, mit Ausnahme der einen angegebenen Beschränkung. Es versteht sich von selbst, und wird im Folgenden nicht wieder hervorgehoben, dass bei Ausführung einer linearen Transformation die Coefficienten der Transformation immer als rational bekannte Grössen anzusehen sind.

»*Invarianteneigenschaft*« (in der Gruppe aller linearen Transformationen) heisst die Eigenschaft einer Function der Coefficienten algebraischer Formen, sich nach Ausführung einer linearen Transformation (von der Determinante Eins) unverändert zu reproduciren.

Ich beginne mit der Umgrenzung des für die Theorie der Invarianten *natürlichen Rationalitätsbereiches*, welchem alle in ihr zu untersuchenden Grössengattungen entstammen.

Gebiet I. (Stammbereich). Als rational bekannt angesehen wird eine jede ganze rationale Function[2]) *der Coefficienten einer oder mehrerer algebraischer Formen und gewisser, in jedem Falle aus-*

---

1) Die Probleme, mit welchen sich die *Invariantentheorie* beschäftigt, geben im Allgemeinen keine Veranlassung, die Transformationen mit rationalen Zahlencoefficienten auszuzeichnen. Dieselben besitzen auch geometrisch nichts Ausgezeichnetes.

2) Ich bediene mich des Ausdruckes »Function« statt des an sich bezeichnenderen Wortes »Form«, um Verwechselungen vorzubeugen.

drücklich zu adjungirender Parametersysteme, welche in den Coefficienten jeder einzelnen Form und den Parametern jedes einzelnen Systems homogen ist, und als Coefficienten nur positive oder negative ganze Zahlen hat. Die Coefficienten der gegebenen Formen werden dabei als völlig unbestimmte Grössen gedacht.

Anmerkung. Unter den Functionen des Gebietes I werden in bekannter Weise die ganzen Zahlen und die adjungirten Parameter mit einbegriffen. Sie sind homogene Functionen vom Grade Null in allen Coefficientensystemen.

Def. I. »Ganze Invariante« heisst jede Function des Gebietes I, welche die Invarianteneigenschaft besitzt.

»Ganze Covariante« gegebener Formen heisst jede ganze Invariante in dem simultanen System derselben und gewisser, einem jeden Systeme hinzuzufügender linearer Formen.

Zusatz 1. »Eine ganze Invariante« ist nach Def. I auch jede ganze Zahl, sowie jede ganze ganzzahlige homogene Function der adjungirten Parameter. Doch wird man diese in der Regel nicht als »Invarianten« bezeichnen, sondern dies Wort für die Functionen mit Invarianteneigenschaft vorbehalten, welche wirklich Coefficienten algebraischer Formen enthalten. Man betrachtet es dann als selbstverständlich, dass jene Constanten einem jeden System von Invarianten hinzugefügt werden.

Zusatz 2. Der Begriff der »ganzen Covariante« ist nach Def. I kein völlig bestimmter, sondern hängt von der Zahl und Art der dem betreffenden Systeme hinzugefügten linearen Formen ab. Welche Formen zu adjungiren sind, darüber wird das jedesmalige Bedürfniss entscheiden. Die Nothwendigkeit, überhaupt neben dem Begriffe der Invariante den der Covariante einzuführen, liegt darin, dass gewisse Grundprobleme aus dem Gebiete eines Systems von Formen nicht durch Betrachtung der »Invarianten« des Systems allein erledigt werden können. Eben dieser Umstand weist aber auch auf eine Begrenzung in der Zahl der zu adjungirenden linearen Formen hin. Für die meisten Zwecke genügt es bekanntlich, im Gebiete n^{ter} Stufe $n - 1$ Systeme solcher Formen einzuführen, welche bezüglich $1, 2, \ldots \varkappa \ldots n - 1$ Formen enthalten; wobei die Coefficienten des $\varkappa^{\text{ten}}$ Systems nur zu den $\varkappa$-reihigen Determinanten verbunden auftreten, welche man der aus ihnen gebildeten Matrix entnehmen kann. Man wird daher für gewöhnlich den Begriff der *»ganzen Covariante« im engeren Sinne* nur für *die simultanen Invarianten der gegebenen*

Grundformen mit jenen Systemen linearer Formen gebrauchen, und da, wo besondere Zwecke die Herbeiziehung weiterer linearer Formen erfordern, dies ausdrücklich festsetzen.

Zusatz 3. Eine ganze Covariante vom Grade Null in den Coefficienten der gegebenen Grundformen heisst »ganze identische Covariante«.

Zusatz 4. Ersetzt man in einer Grundform die in ihr auftretenden Veränderlichen-Reihen in geeigneter Weise durch die Coefficienten eben so vieler linearer Formen, so erhält man bekanntlich ganze Invarianten des simultanen Systems der Grundform und dieser linearen Formen. *Wir wollen nun festsetzen, dass dies immer geschehen soll, so dass also nunmehr die Grundformen selbst unter den Begriff der Invarianten, bezüglich Covarianten fallen. Die ursprünglichen Veränderlichen kommen durch diesen Schritt aus der Theorie der Invarianten ganz in Wegfall, und behalten nur noch eine zur Begriffsbildung dienende, vermittelnde Rolle*[1]). An ihre Stelle treten jene linearen Formen, deren Systeme (vgl. Zusatz 2) wir jetzt, ohne Missdeutungen fürchten zu müssen, als »*Veränderliche*« bezeichnen dürfen[2]). Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass diese Formen etwas Anderes wären, als die Grundformen selbst; es wird durch das Wort nur ihre Stellung in der Theorie jener Grundformen bezeichnet.

Zusatz 5. Darin, dass wir in der Definition des Stammbereiches festgesetzt haben, dass die Coefficienten der gegebenen Formen als völlig unbestimmte Grössen gedacht werden sollen,

1) Vgl. Kronecker, a. a. O. S. 95.

2) Im ternären Gebiete z. B. wird es nach dieser Definition zwei Arten von »Veränderlichen« geben. Eine erste Art von »Veränderlichen« besteht aus dem Inbegriff aller Coefficienten einer linearen Form, welche gleich Null gesetzt einen Punkt vorstellt; eine »Veränderliche« der zweiten Art ist der Inbegriff aller Determinanten, die man der Matrix der Coefficienten zweier Veränderlichen der ersten Art entnehmen kann. Diese Determinanten sind wieder Coefficienten einer (»contragredienten«) linearen Form, welche eine Linie vorstellt. Im quaternären Gebiete hat man drei wesentlich verschiedene Arten von »Veränderlichen«, entsprechend den geometrischen Begriffen Punkt, Gerade, Ebene, u. s. f. Der Unterschied unserer jetzigen Definition des Begriffes »Veränderliche« von der gebräuchlichen, von mir noch Anfangs benutzten, liegt einmal in der Zusammenfassung, wonach ganze Matrices von »Veränderlichen« der älteren Definition jetzt als eine einzige Veränderliche bezeichnet werden; dann aber vor Allem in ihrer Behandlung bei linearen Transformationen, die sich von der Behandlung der zu untersuchenden Formen nicht mehr unterscheidet.

liegt bereits, dass eine ganze ganzzahlige homogene Function dieser Grössen nur *dann* als eine »ganze Invariante« bezeichnet werden darf, wenn sie in dem *ganzen* Gebiete ihrer Argumente die Invarianteneigenschaft hat. Eine ganze ganzzahlige Function, die nur so lange die Invarianteneigenschaft hat, als ihre Argumente gewissen Relationen genügen, bezeichnen wir nicht als eine »ganze Invariante«, und zunächst überhaupt nicht als eine »Invariante«.

Eine solche Function kann aber sehr wohl innerhalb jenes Theilgebietes einer »ganzen Invariante« gleich sein.

Gebiet II. Hierher stellen wir alle Functionen, welche Quotienten zweier Grössen des Gebietes I sind.

Def. II. »Rationale Invariante« heisst jede Function des Gebietes II, welche die Invarianteneigenschaft besitzt.

»Rationale Covariante« der gegebenen Grundformen heisst jede rationale Invariante in dem erweiterten System der Grundformen und der hinzugefügten »Veränderlichen«, welche in Bezug auf die Coefficienten der letzteren eine ganze Function ist.

Die Theorie dieser rationalen Invarianten und Covarianten lässt sich ohne Weiteres auf die der ganzen Invarianten und Covarianten zurückführen:

Lehrsatz. Jede rationale Invariante ist der Quotient zweier ganzer Invarianten; jede rationale Covariante ist der Quotient einer ganzen Covariante und einer ganzen Invariante.

Bei dem Beweise dieser Behauptung dürfen wir uns auf den ersten Fall beschränken, da dieser den anderen mit umspannt.

Es seien a_i, $b_\varkappa$, ... die Coefficienten der gegebenen Formen, a_i', $b_\varkappa'$, ... die entsprechenden Coefficienten der transformirten Formen, also homogene lineare Functionen bezüglich der a_i, $b_\varkappa$, ... Nehmen wir nun an, dass die zu untersuchende Function als ein Bruch dargestellt ist, dessen Zähler $f(a_i, b_\varkappa, \dots)$ und Nenner $\varphi(a_i, b_\varkappa, \dots)$ dem Stammbereiche angehören, und in diesem keinen gemeinsamen Theiler haben. Es ist dann nach Voraussetzung

$$\frac{f(a', b', \dots)}{\varphi(a', b', \dots)} = \frac{f(a, b, \dots)}{\varphi(a, b, \dots)},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\frac{f(a', b', \dots) \cdot \varphi(a, b, \dots)}{\varphi(a', b', \dots)} = f(a, b, \dots).$$

Nun steht rechts eine ganze Function, welche in den Argumentreihen $a_i, b_\varkappa, \ldots$ homogen ist, also auch links. Da aber $f(a', b', \ldots)$ und $\varphi(a', b', \ldots)$ keinen gemeinsamen Theiler haben, so müssen $\varphi(a', b', \ldots)$ und $\varphi(a, b, \ldots)$ einen solchen besitzen, und zwar in der Function $\varphi(a', b', \ldots)$ selbst. Es ist also der Quotient $\varphi(a', b', \ldots) : \varphi(a, b, \ldots)$ eine Constante in Bezug auf die Argumente $a, b, \ldots$ Hieraus aber folgt, dass er eine Potenz der Transformationsdeterminante, und mithin der Einheit gleich ist. Es sind also die Functionen φ und f ganze Invarianten.

Wesentlich für diese Schlussweise ist, dass die Argumente $a_i, b_\varkappa, \ldots$ entweder von einander unabhängig sind, wie wir es in der Definition des Stammbereiches vorausgesetzt haben, oder doch, dass zwischen ihnen höchstens solche algebraische Relationen bestehen, deren Grad höher ist, als der des Productes $f.\varphi$.

Zusatz. In vielen Fällen ist es nützlich, für solche rationale Invarianten, die nicht zugleich ganze Invarianten sind, eine kurze Bezeichnung zu haben. Ich nenne sie »*gebrochene Invarianten*«. Eine gebrochene Invariante kann einer ganzen Invariante oder überhaupt einer Function des Gebietes I höchstens in einem Theile des Gebietes ihrer Argumente gleich sein.

Zu den gebrochenen Invarianten gehören insbesondere die »*absoluten Invarianten*«, zu welchen wir auch die sogenannten »absoluten Covarianten« zählen wollen. Sie sind rationale Invarianten, welche in den Coefficienten jeder betheiligten Grundform den Grad Null haben.

Gebiet III. Hierher stellen wir jede ganze algebraische Function der Grössen des Gebietes I, welche in den Coefficienten jeder einzelnen Grundform, und in den Parametern eines jeden adjungirten Parametersystems homogen ist.

Anmerkung. Dazu ist nothwendig, dass die Grade der Coefficienten der algebraischen Gleichung, durch welche die ganze algebraische Function definirt wird, in Bezug auf die Coefficienten jeder einzelnen Grundform und die Parameter jedes einzelnen Systems eine *arithmetische Reihe* bilden; sofern man nämlich diesen Begriff so weit fasst, dass er auch die fortgesetzte Wiederholung einer und derselben Zahl unter sich begreift.

Das Intervall einer solchen arithmetischen Reihe ist der *Grad* der homogenen Function, und ist nothwendig eine rationale Zahl. Ist dasselbe nicht zugleich eine ganze Zahl, so versteht es sich

von selbst, dass ein jeder Coefficient den Werth *Null* hat, auf welchen eine gebrochene Gradzahl fällt.

Def. III. »*Ganze algebraische Invariante*« *heisst jede Function des Gebietes III, welche die Invarianteneigenschaft besitzt.*

»*Ganze algebraische Covariante*« *der gegebenen Grundformen heisst jede ganze algebraische Invariante in dem erweiterten System der Grundformen und der hinzugefügten* »*Veränderlichen*«, *welche in Bezug auf die Coefficienten der letzteren eine ganze Function ist.*

Von ihnen gilt der leicht zu erweisende

Lehrsatz: Die Coefficienten der algebraischen Gleichung, durch welche eine ganze algebraische Invariante oder Covariante definirt wird, sind ganze Invarianten, bezüglich Covarianten.

Zusatz. Eine ganze algebraische Invariante oder Covariante, welche nicht zugleich eine ganze Invariante oder Covariante ist, heisst »*irrational*«. Eine irrationale ganze Invariante kann als Function der Coefficienten der an ihrer Bildung betheiligten Grundformen betrachtet höchstens in einem Theile des Gebietes ihrer Argumente einer ganzen Invariante, oder überhaupt einer Function des Gebietes I gleich sein.

Ist die algebraische Gleichung, welcher eine ganze irrationale Invariante genügt, im Gebiete I unzerlegbar (irreducibel), so heisst die Invariante selbst »*unzerlegbar*«. Eine unzerlegbare Invariante kann höchstens in einem Theile des Gebietes ihrer Argumente einer zerlegbaren Invariante, oder überhaupt einer zerlegbaren Function des Gebietes III gleich sein.

Der aufgestellte Lehrsatz ist hinsichtlich der Invarianten einer Umkehrung fähig, nicht aber hinsichtlich der Covarianten.

Gebiet IV. Hierher stellen wir jede ganze algebraische Function der Grössen des Gebietes II (oder was dasselbe ist, jede algebraische Function der Grössen des Stammbereiches), welche in den Coefficienten jeder einzelnen Grundform, und in den Parametern eines jeden adjungirten Parametersystems homogen ist.

Anmerkung. Ueber die Beschaffenheit der Gleichung, welcher eine solche Function genügt, ist dasselbe zu sagen, wie in der Anmerkung zur Definition des Gebietes III.

Definition IV. »*Algebraische Invariante*« *heisst jede Function des Gebietes IV, welche die Invarianteneigenschaft besitzt.*

»*Algebraische Covariante der gegebenen Grundformen heisst jede algebraische Invariante in dem erweiterten System der Grund-*

formen und der hinzugefügten »Veränderlichen«, welche in Bezug auf die Coefficienten der letzteren eine ganze Function ist.

Lehrsatz. Die Coefficienten der algebraischen Gleichung, durch welche eine algebraische Invariante oder Covariante definirt wird, sind rationale Invarianten, bezüglich Covarianten.

Zusatz. Ist eine algebraische Invariante oder Covariante nicht zugleich eine ganze algebraische Invariante oder Covariante, so heisst sie »*gebrochen*«. Ist sie nicht zugleich eine rationale Invariante, so heisst sie »*irrational*«. Ist die Gleichung, durch welche sie definirt wird, im Gebiete II unzerlegbar, so heist auch die Invariante »*unzerlegbar*«. Eine gebrochene — irrationale — unzerlegbare Invariante kann höchstens in einem Theile des Gebietes ihrer Argumente einer ganzen — rationalen — zerlegbaren Invariante gleich sein.

Ich glaube hiermit zu einem folgerichtigen System von scharfen Begriffen gelangt zu sein. Wie man sieht, ist der Fortschritt vom Begriffe der ganzen Invariante zu dem der rationalen und ganzen algebraischen Invariante, und von diesen wieder zum Begriffe der allgemeinen algebraischen Invariante genau entsprechend dem Fortschritte der Arithmetik von den ganzen Zahlen zu den rationalen und ganzen algebraischen Zahlen, und wieder von diesen zu den allgemeinen algebraischen Zahlen. Jeder Begriff der ersten Reihe fasst, in seiner weitesten Bedeutung genommen, den entsprechenden Begriff der zweiten Reihe unter sich. Allerdings werden wir sogleich sehen, dass diese Umgrenzung der Grundbegriffe nicht vollständig der Natur der Probleme entspricht, welche die Invariantentheorie sich stellt. Gleichwohl habe ich geglaubt, im Interesse grösserer Klarheit bei der ersten Begriffbildung diese Art der Systematik beibehaltenzu müssen.

Die Abänderung, welche wir nun nachträglich in der Umgrenzung des Invariantenbegriffes vornehmen wollen, betrifft nur einen untergeordneten Punkt.

Man achtet in der Theorie der Invarianten nur auf solche Eigenschaften algebraischer Formen, welche dadurch nicht zerstört werden, dass man die Coefficienten einer jeden Form mit je einer beliebigen Zahl multiplicirt. Es ist daher nur naturgemäss, zwei Formen, die sich nur um einen Zahlenfactor unterscheiden, als *gleichwerthig* (äquivalent) zu betrachten. Damit aber dies möglich sei, ist es nothwendig, die Definition der

»ganzen Invarianten« so einzurichten, dass jede ganze Invariante der einen von zwei gleichwerthigen Formen zugleich als eine »ganze Invariante« der anderen bezeichnet werden kann. Dazu ist aber erforderlich, den Grössen des Stammbereiches die rationalen Zahlen zu adjungiren.

Wir setzen also fest, dass nunmehr im Gebiete I auch rationale, nicht ganze Zahlen zugelassen werden sollen.

Dadurch verschiebt sich die Definition der ganzen Invarianten, und in Folge der gleichzeitig abgeänderten Umgrenzung des Gebietes III auch die der ganzen algebraischen Invarianten in etwas: Zu den ersteren gehören jetzt auch alle rationalen Zahlen, zu den letzteren alle algebraischen Zahlen überhaupt. Für die im neuen Sinne »ganzen« Invarianten und Covarianten, bei welchen also auch ein ganzzahliger Nenner zugelassen wird, werden wir auch die Worte »*Invariante*« und »*Covariante*« ohne bestimmendes Beiwort gebrauchen.

Dass die vorgenommene Erweiterung des Stammbereiches eine unwesentliche ist, liegt darin, dass es möglich ist, jede Grösse des erweiterten Bereiches durch Multiplication mit einer ganzen Zahl in eine Grösse des ursprünglichen Bereiches überzuführen. Ganz anders würde die Sache liegen, wollten wir auch irrationale algebraische Zahlen zulassen. Dadurch würden wesentlich neue Grössen entstehen, die *nicht* durch Multiplication mit einer algebraischen Zahl in Grössen des ursprünglichen Bereiches verwandelt werden können.

Algebraische Invarianten, deren Quotient überhaupt irgend eine (algebraische) Zahl ist, bezeichnen wir als »*proportional*«.

3.

Es wird sich nun darum handeln, zu untersuchen, in wieweit das Grössengebiet, welches durch unseren Invariantenbegriff umspannt wird, sich mit dem Gebiete deckt, in welchem sich der seither übliche Begriff der Invariante bewegt. Denn davon hängt es ab, ob die neue Definition der Invariante ebensowohl als eine Grundlage für die bis jetzt entwickelte Invariantentheorie wird dienen können, wie die ältere. Dass dies nun thatsächlich der Fall ist, beruht auf den folgenden beiden Sätzen:

1) *Wendet man auf eine algebraische Invariante eine allgemeine lineare Transformation an, so reproducirt sich dieselbe mit einem Faktor, welcher eine Potenz der Transformationsdeterminante mit rationalem Exponenten ist. Und zwar ist dieser Expo-*

nent eine positive Zahl, wenn die Invariante insbesondere eine ganze algebraische Invariante ist; er ist eine ganze Zahl, wenn sie eine rationale Invariante ist.

2) *Wenn eine Function des Gebietes IV die Eigenschaft besitzt, nach Ausführung einer allgemeinen linearen Transformation sich mit einem Factor zu reproduciren, der nur von den Constanten der Transformation abhängt, so ist dieselbe eine algebraische Invariante.*

Eine Function des Gebietes IV ist nach ihrer Definition die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten dem Gebiete I angehören. Diese Coefficienten müssen nun offenbar einzeln die in Satz 2) vorausgesetzte Eigenschaft besitzen. Für solche Functionen gilt aber bekanntlich der Satz, dass der Factor, welchen sie annehmen, eine ganze positive Potenz der Transformationsdeterminante ist. Nehmen wir diese gleich Eins, so folgt, dass jeder Coefficient unserer Gleichung eine ganze Invariante ist, die Wurzel der Gleichung also eine algebraische Invariante. Dies ist das Theorem 2).

Nehmen wir umgekehrt zunächst eine ganze Invariante, und wenden auf sie eine allgemeine lineare Transformation an. Dann können wir statt dessen ebensowohl zwei Transformationen hinter einander ausführen, von welchen die erste die Determinante Eins hat, die andere aber darin besteht, dass man alle Veränderlichen (das Wort in seinem ursprünglichen Sinne genommen) mit einem und demselben Factor r multiplicirt. Die Determinante der zusammengesetzten Transformation wird dann eine Potenz von r, die Grösse r selbst also eine Function der Coefficienten der zusammengesetzten Transformation. Die gegebene ganze Invariante bleibt nun bei der ersten Transformation überhaupt ungeändert, bei der zweiten nimmt sie wegen ihrer Homogeneïtät eine Potenz von r als Factor an; sie erhält also bei einer allgemeinen linearen Transformation einen Factor, der eine Function der Transformationscoefficienten allein, und mithin eine ganze positive Potenz der Transformationsdeterminante ist. Hiermit ist das Theorem 1) zunächst für den einfachsten Fall der ganzen Invarianten erwiesen. Darauf lässt sich aber der allgemeinere Fall sofort zurückführen. Eine ganze Invariante nimmt nämlich als Factor eine Potenz der Transformationsdeterminante an, deren Exponent leicht anzugeben ist. Derselbe hängt nur von den Gradzahlen der Invariante in den Coefficienten der betheiligten Formen ab, und ist eine lineare

Function dieser Gradzahlen mit positiven rationalen Zahlencoefficienten. Wenn also die sämmtlichen Gradzahlen einer Reihe von Invarianten je eine arithmetische Reihe bilden, so werden auch die zugehörigen Exponenten eine arithmetische Reihe bilden; und wenn alle jene Reihen positive Intervalle haben, so wird auch die letzte Reihe ein solches besitzen. Es werden also insbesondere auch diejenigen Exponenten eine arithmetische Reihe bilden, welche zu den Coefficienten der algebraischen Gleichung gehören, deren Wurzel eine algebraische Invariante ist. Daraus aber folgt sofort, dass diese selbst eine, im Allgemeinen gebrochene Potenz der Transformationsdeterminante als Factor erhält. Wann der Exponent der letzteren insbesondere eine ganze oder eine positive Zahl ist, entscheidet man nach dem Gesagten ebenfalls ohne Weiteres [1].

Betrachtet man die Theoreme 1) und 2) nur insoweit sie sich auf ganze Invarianten beziehen, so erkennt man in ihnen eine formale, in etwas eingeschränkter Form wiedergegebene Abänderung des auch seither in der Grundlegung der Invariantentheorie verwendeten Theorems. Darin liegt, dass der von uns eingeführte Invariantenbegriff sich inhaltlich mit dem üblichen Begriff der Invariante deckt, abgesehen natürlich von der Einschränkung, die durch die engere Umgrenzung des Kreises der zu betrachtenden Functionen herbeigeführt wird. Diese Einschränkung des Begriffes bedeutet aber, wie schon angedeutet, *nicht* zugleich eine Beschränkung des Stoffes der Invariantentheorie. Es werden daher auf Grund des neuen Invariantenbegriffes dieselben Sätze ausgesprochen werden können, wie bisher, mit geringen formalen Abänderungen.

Die von uns »algebraische Invarianten« genannten Functionen oder Formen bilden im Reiche aller algebraischen Grössen ein *abgeschlossenes Gebiet* für sich, welches durch seine zahlreichen und wichtigen Verbindungen mit anderen Zweigen der Mathematik eine erhöhte Bedeutung gewinnt. *Wie man nun die Forderung stellen muss, die Eigenschaften eines jeden Rationalitätsbereiches durch Operationen kennen zu lernen, welche ganz innerhalb dieses Bereiches verlaufen, so ist es auch wünschenswerth, die besonderen Eigenschaften eines überhaupt irgendwie natürlich abge-*

---

1) Es wird wohl in allen Fällen ausreichen, solche algebraische Invarianten zu betrachten, welche in den Coefficienten aller betheiligten Formen einen *positiven* Grad haben, und in Folge dessen auch bei einer allgemeinen linearen Transformation eine positive Potenz der Transformationsdeterminante als Factor annehmen.

grenzten Grössengebietes auf Wegen zu erforschen, welche die Grenzen desselben niemals überschreiten.

Dies leistet in unserem Falle die sogenannte *symbolische Methode*. Denn es wird zunächst durch die aufgestellten Sätze die Theorie der irrationalen und gebrochenen Invarianten auf die der ganzen zurückgeführt. Für diese aber besteht erstens der bei unserer Umgrenzung der Grundbegriffe keiner Einschränkung mehr unterworfene Satz:

Jede ganze Invariante ist symbolisch darstellbar, und umgekehrt ist jeder (allseitig homogene) *symbolische Ausdruck eine ganze Invariante.*

Ferner haben Gordan für binäre und der Verfasser für ternäre Formen gezeigt[1]), dass man durch Rechnen mit den sogenannten symbolischen Identitäten auch alle *Relationen* erhalten kann, welche zwischen ganzen Invarianten bestehen. Eine jede solche Relation stellt sich nothwendig dar als eine ganze, ganzzahlige Function von Invarianten, welche identisch den Werth Null hat. Diese Eigenschaft der betreffenden Function kann aber nur dadurch sichtbar gemacht werden, dass man die Invarianten in ihre Bestandtheile zerlegt, und damit das Gebiet der Invarianten verlässt. Bei der symbolischen Betrachtungsweise nun kann man diesen Uebelstand dadurch vermeiden, dass man eine gewisse, endliche Zahl solcher Relationen adjungirt. Mit Hülfe dieser kann man dann zu allen übrigen Relationen gelangen, ohne aus dem Gebiete der Invarianten heraustreten zu müssen[2]).

4.

Es soll nunmehr von einigen Erweiterungen des Invariantenbegriffes die Rede sein, zu deren Einführung sich nicht bei der ersten Grundlegung, sondern erst bei weitergehenden Entwickelungen ein Bedürfniss herausstellt.

Wie in der Einleitung bemerkt, wird es für gewisse Zwecke nothwendig, bestimmte Invarianten einzelner Grundformen gleich *Zahlen* zu setzen. Durch eine solche Substitution verlieren die

1) Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von Kerschensteiner, Bd. II, Nr. 117. S. 132. — »Ueber ternäre lineare Formen« Math. Ann. Bd. XXX, S. 120.

2) Innerhalb des Gebietes der Invarianten gibt es wieder abgeschlossene Gebiete, hinsichtlich deren man ähnliche Forderungen stellen kann. So zum Beispiel im binären Gebiete das Reich aller Formen gerader Ordnung, ferner die einzelnen Formensysteme. Hierauf werde ich später noch ausführlich zurückkommen.

Invarianten, welche die Coefficienten jener Grundformen enthalten, im Allgemeinen ihre Homogeneïtät: sie sind nicht mehr schlechtweg homogen, sondern, wenn der Ausdruck gestattet ist, nur noch homogen *modulo* jener Invarianten, die jetzt natürlich auch im Nenner zuzulassen sind. Wir werden auch diese Bildungen noch unter dem Begriffe der »Invarianten« zulassen; müssen uns aber bewusst bleiben, dass wir damit jenen Grundformen eine ausgezeichnete Stellung eingeräumt haben.

Ferner wird es manchmal nützlich sein, auch noch in einer anderen Richtung von der Forderung der Homogeneïtät abzugehen. So z. B., wenn man in der Theorie einer binären biquadratischen Form die Involution der Grundform f und ihrer Hesseschen Covariante h unter der Form $\varkappa f + \lambda h$ darstellt. In solchen Fällen macht man aber stillschweigend den Vorbehalt, dass die unbestimmt gelassenen Parameter $\varkappa$ und λ nachträglich durch solche Invarianten ersetzt werden sollen, dass der ganze Ausdruck wieder homogen wird; die Abweichung von der Homogeneïtät ist also hier nur scheinbar.

Eine weit wesentlichere Erweiterung unseres Stammbereiches bedeutet es, wenn wir auf die Unabhängigkeit der Coefficienten der einzelnen Grundformen verzichten, wie es in vielen und wichtigen Untersuchungen geschieht. Doch werden sich auch die Resultate der hierdurch erweiterten Theorie in eine solche Form kleiden lassen, dass man den Bereich der Invarianten nicht in Wirklichkeit zu verlassen braucht. Die Ergebnisse der einmal entwickelten Theorie werden nämlich nur durch solche Relationen zwischen den Coefficienten der einzelnen Grundformen abgeändert werden können, welche sich durch gleich Null gesetzte Invarianten oder Covarianten darstellen lassen. Man füge nun die linken Seiten jener Relationen den symbolischen Identitäten als neue *Moduln* hinzu, und betrachte nun statt der Identitäten zwischen Invarianten nur Congruenzen in Bezug auf diese Moduln. Setzt man diese gleich Null, so verwandeln sich die Congruenzen in wirkliche Gleichungen. Dabei kann es eintreten, dass eine algebraische Invariante der gegebenen Grundformen und der hinzugenommenen linearen Formen, welche vorher nicht die Eigenschaft der Covarianten hatte, nämlich eine *ganze* Function der Coefficienten der letztgenannten Formen zu sein, nunmehr diese Eigenschaft erhält. Wir werden auch noch solche Bildungen als »*algebraische Covarianten*« der durch Nullsetzen der Moduln specialisirten Formen bezeichnen; und zwar je nach der Möglich-

keit ihrer Darstellung durch gebrochene, rationale, ganze oder gebrochene irrationale Invarianten ebenfalls als »gebrochene rationale«, bezüglich »ganze« oder »gebrochene irrationale« Covarianten.

Neben den Formen, welche Veränderliche eines einzigen Gebietes enthalten, wird man als gleichwerthige Gebilde auch Formen zu betrachten haben, in welchen Veränderliche verschiedener Gebiete auftreten, deren lineare Transformationen von einander unabhängig sind.

Als »*Invarianten*« solcher Formen werden wir solche ganze rationalzahlige, allseitig homogene Functionen ihrer Coefficienten bezeichnen, welche in Bezug auf die gleichzeitig ausgeführten Transformationen sämmtlicher Gebiete die Invarianteneigenschaft haben; als »*Covarianten*« solche simultane Invarianten jener Formen mit linearen Formen, welche in Bezug auf mindestens eines jener Gebiete der Definition der Covarianten, in Bezug auf die anderen aber der Definition der Invarianten oder Covarianten genügen.

Unter die letzteren Begriffe fällt auch der der »Combinante«. Betrachtet man eine Anzahl von m Formen mit denselben Ordnungszahlen als Coefficienten einer linearen Form in einem neu hinzuzufügenden Gebiete m^{ter} Stufe, und bildet nun nur solche Invarianten und Covarianten der neu entstandenen Form, welche in Bezug auf das letztere Gebiet blosse Invarianten sind, so heissen diese »*Combinanten*« jener m Formen. Sie sind Invarianten oder Covarianten, welche nicht von den m Formen einzeln, sondern nur von der ganzen, durch sie bestimmten linearen Mannigfaltigkeit abhängen.

Man kann auch im System einer einzelnen Grundform von »Combinanten« reden. Es tritt nämlich sehr häufig ein, dass sich in den Ausdrücken von Invarianten und Covarianten die Coefficienten der Grundform derart zu Coefficienten gewisser Covarianten φ, χ, ψ zusammenziehen lassen, dass der Ausdruck auch dann noch eine Invariante oder Covariante (der Formen φ', χ', ψ') bleibt, wenn man die Coefficienten jener Covarianten durch die Coefficienten ebenso vieler völlig unabhängiger Formen φ', χ', ψ' ersetzt. Ist nun diese Invariante oder Covariante insbesondere eine Combinante der Formen φ', χ', ψ', so heisst der vorgelegte Ausdruck eine »*Combinante*« der Formen φ, χ, ψ.

Durch diese Definition der Combinanten von einander abhängiger Formen umgehen wir die Schwierigkeit, welche Gordan in seinen Vorlesungen über Invariantentheorie (herausgegeben von G. Kerschensteiner, Bd. II, Nr. 69, S. 73) hervorhebt.

C. **Neumann**, *Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper.*[1])

Die Mechanik handelt von den *Bewegungen der im Universum vorhandenen Materie.* Das Bestreben der Mechanik, diese Bewegungen zu übersehen, zu beschreiben, zu erklären, kurz die *Gesetze* derselben zu ermitteln, — dieses allgemeine Bestreben wurde in bestimmtere Bahnen gelenkt durch die Arbeiten von Galilei und Newton. Denn hier zuerst sehen wir den Gedanken hervortreten, dass das eigentliche Ziel der Forschung nicht in der Auffindung der *Integralgesetze* der Bewegungen, sondern vielmehr in der Entdeckung der betreffenden *Differentialgesetze* bestehe. Hiemit war bei Newton zugleich die Vorstellung einer zwischen den kleinsten Theilchen der Materie von Augenblick zu Augenblick stattfindenden gegenseitigen *Einwirkung* (*actio*) verbunden, — eine Vorstellung, die heut zu Tage fast trivial erscheint, damals aber so neu und fernliegend war, dass sie z. B. von Huyghens (in einem Briefe an Leibniz) schlechtweg für absurd erklärt wurde.

Die Vorstellungen, welche Newton über diese sogenannten Einwirkungen (*actiones*) sich gebildet hat, sind der Hauptsache nach ausdrückbar durch folgende drei Gesetze:

(α.) *das Trägheitsgesetz,*

(β.) *das Gesetz des Parallelogramms,*

(γ.) *das Gesetz der Action und Reaction.*

Das erste derselben betrifft den idealen Fall, dass auf das betrachtete materielle Theilchen *gar keine* Einwirkungen stattfinden. Das zweite hat die Art und Weise zum Gegenstande, in welcher *mehrere* auf ein und dasselbe Theilchen stattfindende

1) Das Manuscript wurde eingereicht am 12. December 1887.

Einwirkungen sich unter einander combiniren. Und das dritte endlich bezieht sich auf die nähere *Beschaffenheit* dieser Einwirkungen.

Allerdings kann es keinem Zweifel unterliegen, dass die durch die Gesetze (α.), (β.), (γ.) ausgedrückten *Eigenschaften* dieser sogenannten Einwirkungen, wie überhaupt auch deren *Existenz*, durch und durch *hypothetische* Vorstellungen sind. Wollte man indessen, hiemit unzufrieden, nach Fundamenten trachten, die *nicht* hypothetisch sind, nach Fundamenten, die wirklich den Stempel unumstösslicher Wahrheit an sich tragen, so würde man gezwungen sein, zu den Sätzen der Logik oder Mathematik seine Zuflucht zu nehmen. Aus derartigen rein formalen Sätzen aber irgend welche Theorie der Naturerscheinungen construiren zu wollen, würde offenbarer Wahnsinn sein.

Die Aufgabe der Mechanik kann also niemals darin bestehen, die im Universum stattfindenden Bewegungen direct auf *mathematische Nothwendigkeit* zurückzuführen, sondern immer nur darin, jene Bewegungen mit mathematischer Consequenz aus irgend welchen *Hypothesen* abzuleiten, die alsdann ihrerseits als *unerklärlich*, *unbegreiflich*, als *willkürlich* zu bezeichnen sind.

Jene hypothetischen Gesetze (α.), (β.), (γ.) sind mit den von Newton selber in seinen *Principiis mathematicis Philosophiae naturalis* (1687) angegebenen Gesetzen (I.), (II.), III.) dem eigentlichen Inhalte nach übereinstimmend. Es lauten nämlich diese letztern folgendermassen:

Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a Viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Lex II: Mutationem motus proportionalem esse Vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua Vis illa imprimitur.

Lex III: Actioni contrariam semper et aequalem esse Reactionem; sive corporum duorum Actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Die Gesetze (α.), (γ.) sind also mit den Gesetzen (I.), (III.) geradezu identisch. Dass aber andrerseits der Hauptsache nach auch Uebereinstimmung stattfindet zwischen (β.) und (II.), ergiebt sich aus den von Newton selber dem Gesetze (II.) beigefügten Zusätzen.

Jene Gesetze (α.), (β.), (γ.) repräsentiren die hypothetischen Grundvorstellungen, auf denen unser heutiges System der

Mechanik, und hiemit zugleich alle Theile der Astronomie und Physik, beruhen. In der That soll im Folgenden der Versuch gemacht werden, die ganze Mechanik, soweit dieselbe die Bewegung *starrer Körper* betrifft, von jenen Grundgesetzen aus in einfacher und übersichtlicher Weise darzulegen.

Bevor wir aber hierauf näher eingehen, mögen zuvörderst einige allgemeine Bemerkungen vorangeschickt werden theils über die *Materie selbst*, theils über die *Bewegung* der Materie.

Die Mathematik hat es, abgesehen von *räumlichen* Vorstellungen, nur mit *Zahlen* zu thun. Und es liegt daher in der Natur der Sache, dass mathematische Betrachtungen auf ein materielles Theilchen immer erst dann anwendbar sein können, wenn zuvor irgend welche *Zahlen* gegeben sind, die jenem Theilchen eigenthümlich zugehören. Eine solche Zahl ist die sogenannte *Masse* des Theilchens, welche man füglich auch als seine *Trägheitszahl*, oder schlechtweg als seine *Trägheit* bezeichnen könnte. Nennt man nun ein materielles Theilchen, dessen Dimensionen verschwindend klein sind — einerlei ob dasselbe noch weiter zerlegbar ist, oder nicht — kurzweg einen *materiellen Punkt*, so kann die betreffende Definition folgendermassen ausgesprochen werden:

Definition der Masse. — *Unter der Masse eines materiellen Punktes soll eine gewisse demselben eigenthümlich zugehörige positive Zahl verstanden werden, und zwar eine Zahl, die für den betrachteten Punkt fortdauernd ein und dieselbe bleibt.*

Was nun ferner die *Bewegungen* der Materie, respective der einzelnen materiellen Punkte betrifft, so können wir dieselben auf jedes beliebige Coordinatensystem beziehen. Ebenso aber, wie wir z. B. bei calorischen Untersuchungen gut thun werden, alle Temperaturen nach *ein und derselben* Scala (z. B. nach der Celsius'schen Scala des Quecksilberthermometers) zu beurtheilen, ebenso wird es in der Mechanik zweckmässig sein, alle im Universum stattfindenden Bewegungen auf *ein und dasselbe* Coordinatensystem, d. i. auf *ein und dasselbe* rechtwinklige Axensystem zu beziehen. Zugleich erscheint es angemessen, dieses Axensystem, welches kurzweg das *absolute* heissen mag, nicht in voreiliger Weise zu fixiren (etwa durch Anlehnung an irgend welche Himmelskörper), sondern vielmehr seine Lage im Universum einstweilen noch *in suspenso* zu lassen, die betreffende Definition also folgendermassen auszusprechen:

Definition des absoluten Axensystems. — *Alle im Universum stattfindenden Bewegungen sollen auf ein und dasselbe rechtwinklige Axensystem bezogen werden; und dieses mag kurzweg das absolute Axensystem heissen.*

Demgemäss wird zu sprechen sein von dem *absoluten Ort*, von den *absoluten Coordinaten* eines materiellen Punktes, ebenso von seiner *absoluten Bewegung*, von seiner *absoluten Bahn*, respective von seiner *absoluten Ruhe*. Doch werden wir in all' solchen Fällen das Epitheton »*absolut*« ganz fortlassen können, indem wir ein für alle Mal festsetzen, dass das Verhalten der materiellen Punkte stets mit Bezug auf jenes *absolute Axensystem* zu beurtheilen sei. Dieses System mag mit (x, y, z) bezeichnet werden.

Bemerkung. — Genau dieselbe Vorstellung, wenn auch in etwas andere Worte gefasst, findet man in der *Mécanique céleste* (Tome I, Livre I, Chap. I, No. 1). Denn Laplace sagt daselbst: *On imagine un espace sans bornes, immobile et pénétrable à la matière. C'est aux parties de cet espace réel ou idéal, que nous rapportons par la pensée la position des corps, et nous les concevons en mouvement lorsqu'ils répondent successivement à divers lieux de l'espace.*

Laplace betrachtet also den Raum, auf welchen alle Bewegungen zu beziehen sind, gewissermassen als eine das ganze Universum erfüllende *starre* Substanz. Ob man nun schliesslich diese starre Substanz als *immobil* oder als *absolut* bezeichnet, macht keinen Unterschied. Denn das eine, wie das andere Wort ist im vorliegenden Fall eben nur ein Epitheton ornans.

Schliesslich mag noch folgende ganz elementare Bemerkung oder Definition hier ihren Platz finden.

Definition der Componenten. — *Ist im Raume irgend eine gerade Linie L gegeben, welche gegen die absoluten Axen unter den Winkeln α, β, γ geneigt ist, so repräsentiren die Producte*

$$L \cos\alpha\ , \qquad L \cos\beta\ , \qquad L \cos\gamma$$

die Kanten eines den absoluten Axen parallelen Parallelepipedums, welches die Linie L zur Hauptdiagonale hat. Diese drei Kanten, jede derselben positiv oder negativ genommen, jenachdem das betreffende Product positiv oder negativ ist, mögen die absoluten Componenten der Linie L, oder kurzweg die Componenten derselben genannt werden.

Repräsentirt z. B. L die von irgend einem Punkte (x, y, z) nach irgend einem andern Punkte (x_1, y_1, z_1) hinlaufende gerade

Linie, und bezeichnet man wiederum die Winkel, welche L mit den Axen einschliesst, mit α, β, γ, so ist

$$x_1 - x = L \cos \alpha \, , \quad y_1 - y = L \cos \beta \, , \quad z_1 - z = L \cos \gamma \, .$$

Und demgemäss werden $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ zu bezeichnen sein als die *Componenten* der Linie L.

Dieser Definition entsprechend, sollen also die sogenannten Componenten im vorliegenden Aufsatz einen *rein geometrischen* Begriff repräsentiren, der an und für sich mit der Mechanik nichts zu thun hat.

§ 1.

Die erste Hypothese der Mechanik.

Erste Hypothese: das Trägheitsgesetz. — *Ein materieller Punkt, auf welchen keinerlei Einwirkung stattfindet, wird entweder in Ruhe, oder aber in geradliniger Bewegung begriffen sein*[1]).

Betrachtet man ferner zwei materielle Punkte, und setzt man wiederum voraus, dass auf dieselben keinerlei Einwirkungen stattfinden, so werden die geradlinigen Bewegungen dieser beiden Punkte von solcher Beschaffenheit sein, dass gleich grossen Wegabschnitten des einen Punktes Wegabschnitte des anderen entsprechen, die wiederum unter einander gleich gross sind. Bezeichnet man also irgend zwei von den beiden Punkten gleichzeitig durchlaufene Wegabschnitte mit s und s_1, so wird der Quotient $\frac{s}{s_1}$ eine Constante sein.

Solches festgesetzt, mögen nun unter *gleichen Zeitabschnitten* solche verstanden werden, innerhalb deren ein sich selbst überlassener materieller Punkt (d. i. ein Punkt, auf den keinerlei Einwirkungen stattfinden) gleiche Wegabschnitte zurücklegt. Alsdann wird man, nachdem überdies irgend ein bestimmter Zeitabschnitt mit *Eins* bezeichnet worden ist, die fortschreitende Zeit *numerisch* auszudrücken im Stande sein. Und dieser numerische Werth der fortschreitenden Zeit mag t heissen. — Ein wenig anschaulicher wird man offenbar diese Definition von t auch so formuliren können.

---

1) Selbstverständlich ist hier von der *absoluten* Ruhe des Punktes, resp. von seiner *absoluten* Bewegung die Rede. Vgl. pag. 156.

Definition der Zeit. — *Man denke sich irgendwo im Universum einen idealen materiellen Punkt* μ, *der fortdauernd sich selbst überlassen bleibt (auf den also niemals irgend welche Einwirkungen stattfinden).*

Alsdann soll unter der fortschreitenden Zeit t geradezu die mehr und mehr anwachsende Weglänge verstanden werden, welche dieser ideale Punkt μ, *von irgend einem bestimmten Anfangsaugenblick an, zurücklegt.*

Bemerkung. — Newton sagte: Die *absolute, wahre* und *mathematische* Zeit verfliesst an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgend einen äusseren Gegenstand.

An die Definition der Zeit schliesst sich unmittelbar die Definition der Geschwindigkeit, und ebenso auch die der lebendigen Kraft an:

Definition der Geschwindigkeit und der lebendigen Kraft. — *Ist ein materieller Punkt m* (wie z. B. ein vom Winde dahingeführtes Sandkorn) *in beliebiger Bewegung begriffen, so versteht man unter der Geschwindigkeit V dieses Punktes m ein von demselben durchlaufenes Wegelement ds, dasselbe dividirt durch das dazu aufgewendete Zeitelement dt:*

$$(A.) \qquad V = \frac{ds}{dt}\,.$$

Ueberdies pflegt man unter der Richtung dieser Geschwindigkeit V die augenblickliche Bewegungsrichtung des Punktes, d. i. die Richtung des Elementes ds zu verstehen.

Ferner bezeichnet man das Product

$$(B.) \qquad \frac{m}{2} V^2$$

kurzweg als die augenblickliche lebendige Kraft des Punktes[1]).

Denkt man sich die Geschwindigkeit V, ihrer Grösse und Richtung nach, durch eine von m ausgehende Linie dargestellt, so haben die Componenten[2]) u, v, w dieser Linie die Werthe:

$$(C.) \qquad u = V\cos\alpha\ , \quad v = V\cos\beta\ , \quad w = V\cos\gamma\ ,$$

wo α, β, γ die Winkel bezeichnen, unter denen V oder (was dasselbe) ds gegen die absoluten Axen geneigt ist.

---

1) Es ist hier durchweg von der *absoluten* Bewegung, resp. von der *absoluten* Geschwindigkeit die Rede.

2) Vgl. die Definition der Componenten, pag. 156.

Sind nun ferner (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ die Coordinaten des Anfangs- und Endpunktes von ds, mithin (dx, dy, dz) die Componenten von ds, so ist:

$$(D.) \qquad dx = ds \cos\alpha\,, \quad dy = ds \cos\beta\,, \quad dz = ds \cos\gamma\,.$$

Aus $(C.)$ und $(D.)$ folgt durch Division:

$$u = V\frac{dx}{ds}\,, \quad v = V\frac{dy}{ds}\,, \quad w = V\frac{dz}{ds}\,,$$

oder, falls man für V den Werth $(A.)$ substituirt:

$$(E.) \qquad u = \frac{dx}{dt}\,, \quad v = \frac{dy}{dt}\,, \quad w = \frac{dz}{dt}\,;$$

so dass man also zu folgendem Satze gelangt.

Satz. — *Ebenso wie die Geschwindigkeit V eines Punktes bezeichnet werden kann als der Differentialquotient des Weges nach der Zeit:*

$$(F.) \qquad V = \frac{ds}{dt}\,;$$

ebenso können seine Geschwindigkeitscomponenten u, v, w bezeichnet werden als die Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit:

$$(G.) \qquad u = \frac{dx}{dt}\,, \quad v = \frac{dy}{dt}\,, \quad w = \frac{dz}{dt}\,.$$

Ist insbesondere der Punkt m *sich selbst überlassen*, finden auf denselben also keinerlei Einwirkungen statt, so können wir den Ausdruck

$$V = \frac{ds}{dt}$$

als den Quotienten zweier Wegelemente ds und dt ansehen, die von zwei sich selbst überlassenen Punkten, nämlich von dem betrachteten Punkte m und dem früher genannten idealen Punkte[1] μ *gleichzeitig* durchlaufen werden. Zufolge des Trägheitsgesetzes[2] ist daher V *constant*. Andererseits aber wird, zufolge dieses Gesetzes, die *Richtung* von V, d. i. die Richtung von ds ebenfalls *constant* sein. Demgemäss sind die Winkel α, β, γ, mithin [nach $(C.)$] auch u, v, w *constant*; so dass wir also zu folgendem Satze gelangen:

---

1) Vgl. die Definition der Zeit pag. 158.

2) Vgl. die auf pag. 157 gegebene Formulirung dieses Gesetzes, namentlich den Schluss derselben.

Satz. — *Die Geschwindigkeit V und die Geschwindigkeits-componenten u, v, w eines materiellen Punktes m bleiben constant, so lange derselbe sich selbst überlassen ist, d. h. so lange keinerlei Einwirkungen auf denselben stattfinden.*

Demgemäss werden z. B., so lange der Punkt *sich selbst überlassen* ist, die Ausdrücke

$$(H.)\qquad m\frac{du}{dt}, \quad m\frac{dv}{dt}, \quad m\frac{dw}{dt}$$

fortdauernd = 0 sein. Sollten aber von irgend einem Augenblicke an *irgend welche Ursachen* auf den Punkt m einzuwirken beginnen, so werden die Ausdrücke ($H.$) von diesem Augenblicke an nicht mehr mehr = 0 sein, sondern irgend welche Werthe annehmen:

$$(I.)\qquad m\frac{du}{dt} = X, \quad m\frac{dv}{dt} = Y, \quad m\frac{dw}{dt} = Z.$$

Diese Werthe X, Y, Z heissen alsdann die *Kräfte*, mit denen jene Ursachen auf den Punkt einwirken. Genauer ausgedrückt, wird die betreffende Definition folgendermassen zu formuliren sein:

Definition der Kräfte. — *Bewegt sich ein materieller Punkt m unter dem Einflusse irgend welcher bekannter oder unbekannter Ursachen, so werden die Ausdrücke* $m\frac{du}{dt}$, $m\frac{dv}{dt}$, $m\frac{dw}{dt}$ *irgend welche Werthe besitzen:*

$$(K.)\qquad m\frac{du}{dt} = X, \quad m\frac{dv}{dt} = Y, \quad m\frac{dw}{dt} = Z.$$

Diese Werthe X, Y, Z werden die Kräfte genannt, mit denen jene Ursachen auf den Punkt m in den Richtungen der drei absoluten Axen einwirken.

Dieser Ausdrucksweise entsprechend, pflegt man die Kräfte X, Y, Z durch drei vom Punkte m ausgehende Linien darzustellen, welche die Richtungen jener drei Axen besitzen.

Uebrigens sind die Formeln ($K.$), mit Rücksicht auf die allgemeinen Relationen ($G.$), auch so darstellbar:

$$(L.)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

wo x, y, z die Coordinaten des Punktes m vorstellen.

§ 2.

Die zweite Hypothese der Mechanik.

Zweite Hypothese: Das Gesetz des Parallelogramms. — *Zwei Kräfte F und G, die auf einen materiellen Punkt m in irgend welchen Richtungen einwirken, sind stets ersetzbar durch eine einzige Kraft. Diese letztere ist ihrer Grösse und Richtung nach dargestellt durch die Diagonale des über F und G construirten Parallelogramms.*

Hieraus folgt sofort, dass Kräfte gleicher Richtung sich *addiren*, und Kräfte entgegengesetzter Richtung sich *subtrahiren.*

Andererseits aber folgt aus jenem Gesetz des Parallelogramms, dass *drei* auf einen materiellen Punkt m in irgend welchen Richtungen einwirkende Kräfte F, G, H ersetzbar sind durch diejenige *eine* Kraft, welche ihrer Grösse und Richtung nach dargestellt ist durch die Hauptdiagonale des über F, G, H construirten Parallelepipedums. Wirken also z. B. auf den Punkt m in den Richtungen der absoluten Axen drei gegebene Kräfte ein X, Y, Z, und bezeichnet man die Hauptdiagonale des über X, Y, Z errichteten rechtwinkligen Parallelepipedums mit R, so sind X, Y, Z ersetzbar durch die *eine* Kraft R. Umgekehrt ist also auch R ersetzbar durch X, Y, Z. Diesen Satz aber können wir, weil nach unserer Bezeichnungsweise [vgl. die Definition pag. 156] X, Y, Z die *Componenten* von R heissen, auch so aussprechen:

Satz. — *Jedwede auf einen materiellen Punkt m einwirkende Kraft ist ersetzbar durch ihre rechtwinkligen Componenten.*

Es mag nun ein Punkt m in Bewegung begriffen gedacht werden unter dem gleichzeitigen Einfluss irgend welcher n Ursachen U_1, U_2, ... U_n; und es mögen R_1, R_2, ... R_n diejenigen Kräfte sein, welche diese Ursachen, einzeln genommen, auf den Punkt ausüben. Zufolge des soeben ausgesprochenen Satzes sind diese Kräfte R_1, R_2, ... R_n ersetzbar durch ihre rechtwinkligen Componenten:

$$X_1, X_2, \dots X_n,$$
$$Y_1, Y_2, \dots Y_n,$$
$$Z_1, Z_2, \dots Z_n.$$

Und diese $3n$ Kräfte ihrerseits werden, weil Kräfte von einerlei Richtung sich *addiren*, ersetzbar sein durch die *drei* Kräfte

$$X = X_1 + X_2 \dots + X_n\,,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 \dots + Y_n\,,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 \dots + Z_n\,.$$

Demgemäss ergeben sich [vgl. (*L.*)] für die Bewegung des betrachteten Punktes m folgende Gleichungen:

$$(M.)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X = X_1 + X_2 \dots + X_n\,,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y = Y_1 + Y_2 \dots + Y_n\,,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z = Z_1 + Z_2 \dots + Z_n\,,\end{aligned}$$

wo x, y, z die Coordinaten des Punktes m vorstellen.

Bemerkung. — Der eigentliche Inhalt des Gesetzes des Parallelogramms dürfte noch deutlicher hervortreten, wenn man dasselbe folgendermassen ausspricht:

Wird ein materieller Punkt $m(x, y, z)$ von zweierlei Ursachen U_1 und U_2 sollicitirt, und sind

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X_1\,, \quad \textit{und} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = X_2\,,$$
etc. etc. etc. etc.

diejenigen Gleichungen, welche für die Bewegung des Punktes gelten würden, falls nur U_1 allein, respective nur U_2 allein vorhanden wäre, — so lauten die bei gleichzeitigem Vorhandensein beider Ursachen geltenden Gleichungen folgendermassen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X_1 + X_2\,,$$
etc. etc.

Bei dieser Darstellung des Gesetzes erkennt man deutlich, dass dasselbe eine reine *Hypothese* ist, dass von irgend welchem Beweise desselben nicht die Rede sein kann.

Wollte man einwenden, dass Beweise für dieses Gesetz von hervorragenden Mathematikern versucht und wirklich gegeben sind, so würde hieraus nur zu erwidern sein, dass bei all' jenen Beweisen das Object des Beweises ein wesentlich *anderes* ist, insofern als bei all' jenen Beweisen von einer Definition der Kräfte ausgegangen wird, die von der hier gegebenen Definition derselben völlig *verschieden* ist. Man kann, um die Sache einigermassen anzudeuten, sagen, dass bei jenen Beweisen eine *statische* Definition der Kräfte zu Grunde liegt, während *unsere* Definition derselben (pag. 160) eine *dynamische* ist.

§ 3.

Die dritte Hypothese der Mechanik.

Dritte Hypothese: Das Gesetz der Action und Reaction. *Die Kräfte, mit denen irgend zwei materielle Puncte m_1 und m_2 auf einander einwirken, fallen in die Linie der gegenseitigen Entfernung, respective in die Verlängerung derselben. Und zwar sind diese beiden Kräfte von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung*[1].

Bezeichnet man also die von m_2 auf m_1 ausgeübte Kraft mit R_1^2, und die von m_1 auf m_2 ausgeübte mit R_2^1, und denkt man sich, um die Vorstellung zu fixiren, beide Kräfte in *repulsivem* Sinne gerechnet, so wird

$$(\alpha.)\qquad R_1^2 = R_2^1 = R_{12}$$

sein, wo R_{12} den gemeinschaftlichen Werth der beiden Kräfte andeuten soll. Bezeichnet man ferner die Componenten der beiden Kräfte mit X_1^2, Y_1^2, Z_1^2 und X_2^1, Y_2^1, Z_2^1, so ergeben sich die Formeln:

$$(\beta.)\qquad \begin{aligned} X_1^2 &= R_{12}\frac{x_1 - x_2}{r_{12}}, & X_2^1 &= R_{12}\frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \\ Y_1^2 &= R_{12}\frac{y_1 - y_2}{r_{12}}, & Y_2^1 &= R_{12}\frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \\ Z_1^2 &= R_{12}\frac{z_1 - z_2}{r_{12}}, & Z_2^1 &= R_{12}\frac{z_2 - z_1}{r_{12}}, \end{aligned}$$

wo x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der beiden Punkte vorstellen, während r_{12} ihren gegenseitigen Abstand repräsentirt.

Betrachten wir nun die Bewegung von n materiellen Puncten m_1, m_2, ... m_n, indem wir dabei annehmen, dass dieselben nicht nur von ihren *innern* oder *gegenseitigen* Einwirkungen, sondern überdies auch noch von irgend welchen *äussern* Ursachen U^A sollicitirt werden, so ergeben sich z. B. [vgl. (*M.*)] für die Bewegung des Punktes m_1 (x_1, y_1, z_1) folgende Gleichungen:

---

1) Dabei bleibt völlig dahingestellt, ob der gemeinschaftliche Werth dieser beiden Kräfte nur von der Entfernung r abhängt, oder ob er vielleicht überdies auch abhängig ist von den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$, etc.

$$(\gamma_1.)\quad \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= (0 + X_1^2 + X_1^3 + X_1^4 \cdots + X_1^n) + X_1^A , \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= (0 + Y_1^2 + Y_1^3 + Y_1^4 \cdots + Y_1^n) + Y_1^A , \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= (0 + Z_1^2 + Z_1^3 + Z_1^4 \cdots + Z_1^n) + Z_1^A . \end{aligned}$$

Dabei repräsentiren (X_1^2, Y_1^2, Z_1^2), (X_1^3, Y_1^3, Z_1^3), etc. die Componenten der von m_2, m_3, etc. auf den Punkt m_1 ausgeübten Kräfte R_1^2, R_1^3, etc.; während (X_1^A, Y_1^A, Z_1^A) die Componenten derjenigen Kraft R_1^A vorstellen, mit welcher jene *äussern* Ursachen U^A auf m_1 einwirken.

Bei analoger Bezeichnung ergeben sich ferner für die Bewegung des Punktes m_2 (x_2, y_2, z_2) folgende Gleichungen:

$$(\gamma_2.)\quad \begin{aligned} m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= (X_2^1 + 0 + X_2^3 + X_2^4 \cdots + X_2^n) + X_2^A , \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= (Y_2^1 + 0 + Y_2^3 + Y_2^4 \cdots + Y_2^n) + Y_2^A , \\ m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= (Z_2^1 + 0 + Z_2^3 + Z_2^4 \cdots + Z_2^n) + Z_2^A . \end{aligned}$$

U. s. w. U. s. w.

Nimmt man aus den Formelsystemen $(\gamma_1.)$, $(\gamma_2.)$, etc. jedesmal die *erste* Formel heraus, so hat man folgende Gleichungen:

$$(\delta.)\quad \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= (0 + X_1^2 + X_1^3 \cdots + X_1^n) + X_1^A , \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= (X_2^1 + 0 + X_2^3 \cdots + X_2^n) + X_2^A , \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= (X_3^1 + X_3^2 + 0 \cdots + X_3^n) + X_3^A , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} &= (X_n^1 + X_n^2 + X_n^3 \cdots + 0) + X_n^A . \end{aligned}$$

Nun aber ist nach $(\beta.)$:

$$X_1^2 + X_2^1 = 0 , \quad \text{ebenso allgemein:} \quad X_i^h + X_h^i = 0 .$$

Und mit Rücksicht hierauf gelangt man durch Addition der Gleichungen $(\delta.)$ zu folgender Formel:

$$\sum m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2} = \sum X_h^A ,$$

wofür man kürzer schreiben kann:

$$(\varepsilon.) \qquad \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X^A .$$

Multiplicirt man ferner die drei Formeln $(\gamma_1.)$ respective mit 0, $-z_1$, $+y_1$, und addirt, so erhält man:

$$(\zeta_1.) \qquad m_1 \left(y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right) =$$

$$= (0 + \varDelta_1^2 + \varDelta_1^3 \cdots + \varDelta_1^n) + (y_1 Z_1^A - z_1 Y_1^A) ;$$

desgleichen ergiebt sich aus $(\gamma_2.)$:

$$(\zeta_2.) \qquad m_2 \left(y_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} - z_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}\right) =$$

$$= (\varDelta_2^1 + 0 + \varDelta_2^3 \cdots + \varDelta_2^n) + (y_2 Z_2^A - z_2 Y_2^A) ;$$

u. s. w., u. s. w. Dabei haben alsdann z. B. $\varDelta_1^2$ und $\varDelta_2^1$ die Bedeutungen:

$$\varDelta_1^2 = y_1 Z_1^2 - z_1 Y_1^2 ,$$
$$\varDelta_2^1 = y_2 Z_2^1 - z_2 Y_2^1 ;$$

und hieraus folgt, mit Rücksicht auf $(\beta.)$, sofort:

$$\varDelta_1^2 + \varDelta_2^1 = 0 , \quad \text{allgemein:} \quad \varDelta_i^h + \varDelta_h^i = 0 .$$

Mit Rücksicht hierauf aber gelangt man durch Addition sämmtlicher Gleichungen $(\zeta_1.)$, $(\zeta_2.)$, etc. zu folgender Formel:

$$(\eta.) \qquad \sum m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \sum (y Z^A - z Y^A) .$$

Zu den Formeln $(\varepsilon.)$ und $(\eta.)$ treten offenbar noch weitere Formeln hinzu, die mit diesen analog sind; so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Satz. — *Bewegt sich ein System von n materiellen Punkten*

$$m_1 (x_1, y_1, z_1) , \quad m_2 (x_2, y_2, z_2) , \quad \cdots \quad m_n (x_n, y_n, z_n)$$

unter dem Einfluss seiner innern oder gegenseitigen Kräfte, und unter dem gleichzeitigen Einfluss irgend welcher äussern Kräfte:

$$(X_1^A, Y_1^A, Z_1^A) , \quad (X_2^A, Y_2^A, Z_2^A) , \quad \cdots \quad (X_n^A, Y_n^A, Z_n^A) ,$$

so gelten für diese Bewegung folgende sechs Gleichungen:

$$(\vartheta.)\quad \begin{cases} \sum m \dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum X^A\,, \\ \sum m \dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum Y^A\,, \\ \sum m \dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum Z^A\,, \end{cases}$$

$$(\iota.)\quad \begin{cases} \sum m\left(y\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum(yZ^A - zY^A)\,, \\ \sum m\left(z\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = \sum(zX^A - xZ^A)\,, \\ \sum m\left(x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum(xY^A - yX^A)\,. \end{cases}$$

Dieses sind die bekannten Laplace'*schen Gleichungen.*

Diese sechs Gleichungen ($\vartheta.$), ($\iota.$) sind von den *innern* Kräften völlig *frei*, und sind daher auch dann noch von Nutzen, wenn diese innern Kräfte ganz *unbekannt* sind. Sie werden daher z. B. von Nutzen sein für einen beliebigen, aus beliebig vielen materiellen Punkten bestehenden Körper, einerlei ob derselbe *fest*, *flüssig* oder *gasförmig* ist. Sollte insbesondere der Körper ein sogenannter *starrer Körper* sein, so würde seine Bewegung durch die sechs Gleichungen ($\vartheta.$); ($\iota.$) *vollkommen bestimmt* sein, vorausgesetzt, dass sein Anfangszustand gegeben ist. — Um nun weitere Betrachtungen an die Gleichungen ($\vartheta.$), ($\iota.$) sich anschliessen zu lassen, mag zunächst folgende Definition eingeschaltet werden:

Definition. — *Sind n materielle Punkte m* (x, y, z) *gegeben, und repräsentiren* $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ *die Entfernungen derselben von irgend einem Raumpunkte* (ξ, η, ζ), *so soll dieser letztere der* ***Massenmittelpunkt*** *jener n gegebenen Punkte heissen, sobald man ihm diejenige Lage zuertheilt hat, für welche der Ausdruck*

$$m_1\varrho_1^2 + m_2\varrho_2^2 \cdots + m_n\varrho_n^2$$

ein ***Minimum*** *ist.*

Auf Grund dieser Definition erhält man für den Massenmittelpunkt (ξ, η, ζ) z. B. die Formel:

$$m_1\frac{\partial\varrho_1^2}{\partial\xi} + m_2\frac{\partial\varrho_2^2}{\partial\xi} \cdots + m_n\frac{\partial\varrho_n^2}{\partial\xi} = 0\,,$$

d. i.

$$m_1(\xi - x_1) + m_2(\xi - x_2) \cdots + m_n(\xi - x_n) = 0 \;,$$

d. i.

$$(m_1 + m_2 \cdots + m_n)\,\xi = m_1 x_1 + m_2 x_2 \cdots + m_n x_n \;;$$

so dass man also im Ganzen zu folgenden Gleichungen gelangt:

$$(\varkappa.) \qquad \begin{cases} M\xi = \sum mx \;, \\ M\eta = \sum my \;, \\ M\zeta = \sum mz \;, \end{cases}$$

wo $M = \sum m$ die *Gesammtmasse* des gegebenen Punktsystems vorstellt. Demgemäss sind die drei Gleichungen (ϑ.) folgendermassen darstellbar:

$$(\lambda.) \qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X^A \;, \\ M\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y^A \;, \\ M\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z^A \;. \end{cases}$$

Bringt man nun diese Gleichungen (λ.) auf den besonderen Fall in Anwendung, dass die einwirkenden äussern Kräfte (X^A, Y^A, Z^A) durchweg $= 0$ sind, so gelangt man sofort zu folgendem Satze:

Satz. — *Bewegt sich ein System materieller Punkte* n u r *unter dem Einfluss seiner* i n n e r n *Kräfte, so wird sein Massenmittelpunkt in* g e r a d l i n i g e r B a h n *mit* c o n s t a n t e r G e s c h w i n d i g k e i t *fortschreiten.*

Besteht das System nur aus *zwei*, und zwar unter einander *gleichen* Massenpunkten m_1, m_2:

$$m_1 = m_2 \;,$$

und denkt man sich die Anfangsgeschwindigkeiten dieser beiden Punkte *gleich gross* und *direct gegen einander gerichtet*, so wird die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes *zu Anfang* $= 0$, also, auf Grund des soeben ausgesprochenen Satzes, *fortdauernd* $= 0$ sein; so dass man also zu folgendem Resultate gelangt:

Satz. — *Bewegen sich zwei materielle Punkte, deren Massen* g l e i c h g r o s s *sind,* n u r *unter dem Einfluss ihrer* g e g e n s e i t i g e n

Einwirkung, und setzt man voraus, dass ihre Anfangsgeschwindigkeiten gleich gross und direct gegen einander gerichtet gewesen sind, so wird ihr Massenmittelpunkt, d. i. der Mittelpunkt ihrer Verbindungslinie, fortdauernd in Ruhe bleiben.

Hieraus folgt, dass diese beiden materiellen Punkte im Augenblicke ihres Zusammenstossens, wenigstens momentan, zur Ruhe kommen.

Dieser Satz repräsentirt eine charakteristische Eigenschaft *gleich grosser* Massen, die nachträglich, falls es beliebt, zur Definition derselben dienen kann.

§ 4.

Ueber die Arbeit der Kräfte.

Definition. — *Ist ein materieller Punkt m in Bewegung begriffen unter dem Einfluss einer gegebenen Kraft F, und unter dem gleichzeitigen Einfluss beliebiger anderer Kräfte, und bezeichnet man das vom Punkte m während der Zeit dt durchlaufene Wegelement mit ds, so pflegt man den Ausdruck*

$$F\,ds\cos(F,\,ds)$$

als die von der Kraft F während der Zeit dt verrichtete Arbeit zu bezeichnen. Diese Arbeit ist offenbar auch darstellbar durch das Trinom:

$$Xdx + Ydy + Zdz\,,$$

wo alsdann X, Y, Z die Componenten der Kraft F, und dx, dy, dz die Componenten des Wegelementes ds vorstellen. [Vgl. die Definition pag. 156.]

Denkt man sich z. B. zwei Punkte $m_1(x_1, y_1, z_1)$ und $m_2(x_2, y_2, z_2)$ unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Kräfte R_1^2 und R_2^1 und unter dem gleichzeitigen Einfluss *beliebiger anderer* Kräfte in Bewegung begriffen, so werden die von jenen Kräften R_1^2 und R_2^1 während der Zeit dt verrichteten Arbeiten die Werthe haben [vgl. (β.) pag. 163]:

$$X_1^2dx_1+Y_1^2dy_1+Z_1^2dz_1=R_{12}\,\frac{(x_1-x_2)dx_1+(y_1-y_2)dy_1+(z_1-z_2)dz_1}{r_{12}}\,,$$

$$X_2^1dx_2+Y_2^1dy_2+Z_2^1dz_2=R_{12}\,\frac{(x_2-x_1)dx_2+(y_2-y_1)dy_2+(z_2-z_1)dz_2}{r_{12}}\,.$$

Die *Summe* dieser beiden Arbeiten ist daher

$$= R_{12} \frac{(x_1 - x_2) d(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) d(y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) d(z_1 - z_2)}{r_{12}} .$$

d. i.

$$= R_{12} \, dr_{12} .$$

Bezeichnet man also die Grössen R_{12} und r_{12} kurzweg mit R und r, so erhält man folgenden Satz:

Erster Satz. — *Bewegen sich zwei materielle Punkte unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Einwirkung, und unter dem gleichzeitigen Einfluss beliebiger anderer Kräfte, so wird die während der Zeit dt von ihrer gegenseitigen Einwirkung verrichtete Arbeit den Werth haben:*

$$R \, dr .$$

Dabei bezeichnet R die in repulsivem Sinne gerechnete Stärke der gegenseitigen Einwirkung, und dr den während der Zeit dt erfolgenden Zuwachs der gegenseitigen Entfernung r der beiden Punkte.

Auf Grund dieses Satzes wird man z. B. für die Arbeit derjenigen Kräfte, mit denen irgend zwei *Punktsysteme* $m_1, m_2, \ldots m_n$ und $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$ auf einander einwirken, eine Summe von np Gliedern erhalten, deren jedes die Form $R dr$ besitzt. Betrachtet man insbesondere den Fall, dass die beiden Punktsysteme *starre Körper* sind, so gelangt man zu folgendem wichtigen Satze:

Zweiter Satz. — *Bewegen sich zwei starre Körper unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Einwirkungen, und unter dem gleichzeitigen Einfluss beliebiger anderer Kräfte, so wird die von jenen gegenseitigen Einwirkungen verrichtete Arbeit nur abhängen von der relativen Bewegung des einen Körpers in Bezug auf den andern.*

Sind also z. B. *beide* Körper in Bewegung begriffen, so kann man, ohne im Werth der in Rede stehenden Arbeit irgend welche Aenderung hervorzurufen, den *einen* Körper festhalten, falls man nur dafür sorgt, dass die relative Bewegung dieselbe bleibt.

Wir können diesen Satz z. B. anwenden auf irgend zwei *Himmelskörper*, oder, falls es uns beliebt, auch anwenden auf zwei *mit einander zusammenstossende* Himmelskörper. Im letztern Falle werden alsdann die gegenseitigen Einwirkungen der beiden Körper nicht nur aus ihren *Anziehungskräften*, sondern überdies auch noch aus ihren *Widerstandskräften* bestehen. Dabei

erkennen wir sofort, dass der in Rede stehende Satz für diese beiden *Theile* der gegenseitigen Einwirkungen, *einzeln* genommen, gelten wird; so dass wir also zu folgendem Zusatze gelangen:

Zusatz. — *Bestehen die gegenseitigen Einwirkungen der beiden Körper aus mehreren Theilen, so wird der in Rede stehende Satz auch noch gültig sein für diejenige Arbeit, welche von jedem solchem Theile der gegenseitigen Einwirkungen, einzeln genommen, verrichtet wird.*

Schliesslich mag noch folgender Satz notirt werden, der unmittelbar auf Grund des ersten Satzes sich ergiebt, und von welchem häufig Gebrauch zu machen ist:

Dritter Satz. — *Sind m_1 und m_2 zwei Massentheilchen ein und desselben starren Körpers, so ist die von ihrer gegenseitigen Einwirkung verrichtete Arbeit stets* $= 0$.

Denn in diesem Falle ist r *constant*, mithin dr unter allen Umständen $= 0$.

§ 5.

Der Satz der lebendigen Kraft.

Bewegt sich ein Punkt $m(x, y, z)$ unter dem Einfluss gegebener Kräfte X, Y, Z, so gelten die in (*L.*) pag. 160 aufgeführten Gleichungen:

$$(a.)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X\,, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y\,, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z\,. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\frac{dx}{dt}dt$, $\frac{dy}{dt}dt$, $\frac{dz}{dt}dt$, und addirt, so erhält man:

$$(b.)\qquad d\left(\frac{m}{2}V^2\right) = X dx + Y dy + Z dz\,,$$

wo V die augenblickliche *Geschwindigkeit* des Punktes vorstellt:

$$(c.)\qquad V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Die Formel (*b.*), welche den Satz der lebendigen Kraft für einen *einzelnen* Punkt repräsentirt, ist unmittelbar ausdehnbar auf den Fall *beliebig vieler* Punkte. Denkt man sich nämlich jene

Formel (*b.*) der Reihe nach für *jeden* dieser Punkte aufgestellt, und sodann all' diese Formeln addirt, so gelangt man zu folgendem Satze:

Satz der lebendigen Kraft. — *Bewegen sich n materielle Punkte:*

$$m_1(x_1, y_1, z_1), \quad m_2(x_2, y_2, z_2), \; \dots \; m_n(x_n, y_n, z_n)$$

unter dem Einfluss beliebig gegebener Kräfte:

$$(X_1, Y_1, Z_1), \quad (X_2, Y_2, Z_2), \; \dots \; (X_n, Y_n, Z_n),$$

so gilt die Formel:

$$d\left(\sum \frac{m}{2} \cdot V^2\right) = \sum (X dx + Y dy + Z dz),$$

d. i. die Formel:

$$(d.) \qquad dT = \sum (X dx + Y dy + Z dz),$$

wo T die lebendige Kraft des Punktsystemes repräsentirt.

Es wird also für jedwedes Zeitelement dt der Zuwachs der lebendigen Kraft des Systemes eben so gross sein, wie die von den einwirkenden Kräften während der Zeit dt verrichtete Arbeit.

Jene einwirkenden Kräfte werden im Allgemeinen theils von den *gegenseitigen* Einwirkungen der Punkte, theils aber auch von irgend welchen *äussern* Ursachen herrühren. Und demgemäss werden z. B. die auf den Punkt m_1 einwirkenden Kräfte X_1, Y_1, Z_1 die auf pag. 164 angegebene Form besitzen:

$$X_1 = (0 + X_1^2 + X_1^3 \cdots + X_1^n) + X_1^A,$$
$$Y_1 = (0 + Y_1^2 + Y_1^3 \cdots + Y_1^n) + Y_1^A,$$
$$Z_1 = (0 + Z_1^2 + Z_1^3 \cdots + Z_1^n) + Z_1^A.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dx_1, dy_1, dz_1, und addirt, so erhält man eine Formel von folgender Gestalt:

$$(e_1.) \qquad X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 =$$
$$= (0 + \Theta_1^2 + \Theta_1^3 \cdots + \Theta_1^n) + X_1^A dx_1 + Y_1^A dy_1 + Z_1^A dz_1 .$$

In ähnlicher Weise erhält man ferner, was den Punkt m_2 betrifft, die Formel:

$$(e_2.) \qquad X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 =$$
$$= (\Theta_2^1 + 0 + \Theta_2^3 \cdots + \Theta_2^n) + X_2^A dx_2 + Y_2^A dy_2 + Z_2^A dz_2 .$$

U. s. w. U. s. w. Dabei haben alsdann z. B. Θ_1^2 und Θ_2^1 folgende Bedeutungen:

$$\Theta_1^2 = X_1^2 dx_1 + Y_1^2 dy_1 + Z_1^2 dz_1,$$
$$\Theta_2^1 = X_2^1 dx_2 + Y_2^1 dy_2 + Z_2^1 dz_2 .$$

Hieraus aber ergiebt sich mit Rücksicht auf (*β.*) pag. 163:

$$\Theta_1^2 = R_{12}\left(\frac{x_1 - x_2}{r_{12}}\,dx_1 + \frac{y_1 - y_2}{r_{12}}\,dy_1 + \frac{z_1 - z_2}{r_{12}}\,dz_1\right),$$

$$\Theta_2^1 = R_{12}\left(\frac{x_2 - x_1}{r_{12}}\,dx_2 + \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}\,dy_2 + \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}\,dz_2\right),$$

mithin:

$$\Theta_1^2 + \Theta_2^1 = R_{12}\frac{(x_1-x_2)d(x_1-x_2)+(y_1-y_2)d(y_1-y_2)+(z_1-z_2)d(z_1-z_2)}{r_{12}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\Theta_1^2 + \Theta_2^1 = R_{12}\,dr_{12}\,,$$

mithin allgemein:

$$\Theta_i^h + \Theta_h^i = R_{hi}\,dr_{hi}\,.$$

Und mit Rücksicht hierauf gelangt man durch Addition sämmtlicher Formeln $(e_1.)$, $(e_2.)$, etc. zu folgendem Resultate:

$$(f.)\qquad \sum(Xdx + Ydy + Zdz) =$$
$$= \sum Rdr + \sum(X^A dx + Y^A dy + Z^A dz)\,;$$

so dass also der durch $(d.)$ ausgesprochene Satz auch folgender Darstellung fähig ist:

Andere Form des Satzes der lebendigen Kraft. — *Bewegt sich ein Punktsystem*

$$m_1(x_1, y_1, z_1)\,,\quad m_2(x_2, y_2, z_2)\,,\ \ldots\ m_n(x_n, y_n, z_n)$$

unter dem Einfluss seiner innern Kräfte, und unter dem gleichzeitigen Einfluss irgend welcher äussern Kräfte:

$$(X_1^A, Y_1^A, Z_1^A)\,,\quad (X_2^A, Y_2^A, Z_2^A)\,,\ \ldots\ (X_n^A, Y_n^A, Z_n^A)\,,$$

so gilt die Formel:

$$(g.)\qquad dT = \sum Rdr + \sum(X^A dx + Y^A dy + Z^A dz)\,.$$

Dabei bezeichnet T die lebendige Kraft des Systemes, ferner r die gegenseitige Entfernung irgend zweier Punkte des Systemes, und R den gemeinschaftlichen Werth derjenigen beiden Kräfte, mit denen diese beiden Punkte in repulsivem Sinne auf einander einwirken.

Wir können diese Formel $(g.)$ in Anwendung bringen auf jeden beliebigen Körper, einerlei ob derselbe flüssig oder fest, elastisch oder starr ist.

Bringen wir dieselbe auf einen *starren Körper* in Anwendung, so sind die r's *constant*, mithin die dr's sämmtlich $= 0$; so dass also in diesem Falle die Formel sich reducirt auf

$$(A.)\qquad dT = \sum(X^A dx + Y^A dy + Z^A dz)\,.$$

Hier aber ist die rechte Seite, d. i. die Arbeit der äussern

Kräfte, einer bemerkenswerthen Transformation fähig. Führen wir nämlich ein mit dem starren Körper fest verbundenes rechtwinkliges Axensystem 1, 2, 3 ein, und bezeichnen wir diejenigen Coordinaten, welche irgend ein Massentheilchen $m(x,y,z)$ des Körpers mit Bezug auf diese neuen Axen 1, 2, 3 besitzt, mit (ξ_1, ξ_2, ξ_3), so ist:

$$(B.)\qquad \begin{aligned} x &= \mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1\xi_1 + \mathfrak{A}_2\xi_2 + \mathfrak{A}_3\xi_3 , \\ y &= \mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1\xi_1 + \mathfrak{B}_2\xi_2 + \mathfrak{B}_3\xi_3 , \\ z &= \mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1\xi_1 + \mathfrak{C}_2\xi_2 + \mathfrak{C}_3\xi_3 , \end{aligned}$$

wo die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, etc. unbekannte Functionen der Zeit vorstellen, und dabei den Relationen entsprechen:

$$(C.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 &= 1 , \text{ etc.} \\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3 &= 0 , \text{ etc.} \end{aligned}$$

Zur Abkürzung mögen die Differentialquotienten der Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, etc. nach der Zeit durch Accente angedeutet werden. Zugleich mögen sechs neue Grössen α, β, γ und α^*, β^*, γ^* eingeführt werden mittelst der Formeln:

$$(D.)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1' + \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2' + \mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3', &\qquad \alpha^* &= \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}\gamma - \mathfrak{C}\beta , \\ \beta &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1' + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2' + \mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_3', &\qquad \beta^* &= \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}\alpha - \mathfrak{A}\gamma , \\ \gamma &= \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1' + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2' + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3', &\qquad \gamma^* &= \mathfrak{C}' + \mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B}\alpha . \end{aligned}$$

Da ξ_1, ξ_2, ξ_3, ihrer Definition zufolge, von der Zeit unabhängig sind, so folgt aus $(B.)$:

$$dx = (\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}_1'\xi_1 + \mathfrak{A}_2'\xi_2 + \mathfrak{A}_3'\xi_3)\, dt ,$$

oder, falls man hier für ξ_1, ξ_2, ξ_3 die aus $(B.)$ entspringenden Werthe

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mathfrak{A}_1(x - \mathfrak{A}) + \mathfrak{B}_1(y - \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}_1(z - \mathfrak{C}) , \\ \xi_2 &= \mathfrak{A}_2(x - \mathfrak{A}) + \mathfrak{B}_2(y - \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}_2(z - \mathfrak{C}) , \\ \xi_3 &= \mathfrak{A}_3(x - \mathfrak{A}) + \mathfrak{B}_3(y - \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}_3(z - \mathfrak{C}) \end{aligned}$$

substituirt, und dabei die Formeln $(C.)$, $(D.)$ berücksichtigt:

$$dx = [\mathfrak{A}' - \gamma(y - \mathfrak{B}) + \beta(z - \mathfrak{C})]\, dt ,$$

oder, falls man die Formeln $(D.)$ *rechter* Hand beachtet:

$$dx = (\alpha^* + \beta z - \gamma y)\, dt .$$

Analoge Formeln ergeben sich offenbar für dy und dz; so dass man also folgendes Formelsystem erhält:

$$(E.)\qquad \begin{aligned} dx &= (\alpha^* + \beta z - \gamma y)\, dt , \\ dy &= (\beta^* + \gamma x - \alpha z)\, dt , \\ dz &= (\gamma^* + \alpha y - \beta x)\, dt . \end{aligned}$$

Multipliciren wir aber diese das Theilchen $m(x, y, z)$ betreffende Formeln mit den dasselbe sollicitirenden äussern Kräften X^A, Y^A, Z^A, und addiren, und summiren wir sodann über alle Theilchen m des ganzen gegebenen Körpers, so erhalten wir

$$(F.)\quad \sum(X^A dx + Y^A dy + Z^A dz) = \alpha^* dt \sum X^A + \text{etc.}$$
$$+ \alpha dt \sum(yZ^A - zY^A) + \text{etc.};$$

so dass wir also, auf Grund der Formeln (*A.*) und (*F.*) zu folgendem Satze gelangen:

Der Satz der lebendigen Kraft in seiner Anwendung auf einen starren Körper. — *Bewegt sich ein starrer Körper unter dem Einfluss irgend welcher äussern Kräfte*

$$(X_1^A, Y_1^A, Z_1^A), \quad (X_2^A, Y_2^A, Z_2^A), \quad \text{etc.},$$

und bezeichnet man die Angriffspunkte dieser Kräfte mit

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad \text{etc.},$$

so gilt die Formel:

$$(G.)\qquad dT = \sum(X^A dx + Y^A dy + Z^A dz),$$

wo T die lebendige Kraft des ganzen Körpers vorstellt. Diese Formel (*G.*) *ist auch folgendermassen darstellbar:*

$$(H.)\quad dT = \left\{\begin{array}{l} + \alpha^* \sum X^A + \alpha \sum(yZ^A - zY^A) \\ + \beta^* \sum Y^A + \beta \sum(zX^A - xZ^A) \\ + \gamma^* \sum Z^A + \gamma \sum(xY^A - yX^A) \end{array}\right\} dt,$$

wo dt das betreffende Zeitelement repräsentirt, während dessen die lebendige Kraft des Körpers um dT anwächst. Dabei bezeichnen α, β, γ und α^*, β^*, γ^* unbekannte Functionen der Zeit, deren Bedeutungen in den Formeln (*D.*) *näher angegeben sind.*

Wir wollen nun annehmen, der Körper befinde sich im Augenblick t in *Ruhe*, und es solle seine Bewegung während des nächstfolgenden Zeitelementes dt untersucht werden, unter der Voraussetzung, dass die einwirkenden äussern Kräfte im Augenblick t den sechs Gleichungen entsprechen:

$$(I.)\quad \begin{array}{ll} \sum X^A = 0, & \sum(yZ^A - zY^A) = 0, \\ \sum Y^A = 0, & \sum(zX^A - xZ^A) = 0; \\ \sum Z^A = 0, & \sum(xY^A - yX^A) = 0. \end{array}$$

Zuvörderst ergiebt sich alsdann aus (*H.*), dass der dem Zeitelement dt entsprechende Zuwachs der lebendigen Kraft des Körpers $= 0$ ist:

(*K.*) $$dT = 0 .$$

Zu *Anfang* des Zeitelementes dt war aber der Körper, nach unserer Voraussetzung, in *Ruhe*, mithin $T = 0$. Zufolge (*K.*) wird daher zu *Ende* des Zeitelementes dt die lebendige Kraft ebenfalls $= 0$, mithin der Körper ebenfalls in *Ruhe* sein. Wir gelangen somit zu der Einsicht, dass der Körper während der Zeit dt in Ruhe *bleibt*, also zu folgendem

Satz. — *Entsprechen die in irgend welchen Punkten* (x, y, z) *auf einen starren Körper einwirkenden äusseren Kräfte* (X^A, Y^A, Z^A) *den sechs Bedingungen:*

$$(L.) \qquad \begin{aligned} &\sum X^A = 0 , \qquad &&\sum (yZ^A - zY^A) = 0 , \\ &\sum Y^A = 0 , &&\sum (zX^A - xZ^A) = 0 , \\ &\sum Z^A = 0 , &&\sum (xY^A - yX^A) = 0 , \end{aligned}$$

so wird der Körper, falls er zu Anfang in **R u h e** *ist, unter dem Einfluss dieser Kräfte in Ruhe* **b l e i b e n.**

Zusatz. — *Leicht lässt sich zeigen, dass diese sechs Bedingungen zur Fortdauer des Ruhezustandes nicht nur* **a u s r e i c h e n d**, *sondern auch* **n o t h w e n d i g** *sind.*

Zur Fortdauer des Ruhezustandes ist nämlich *nothwendig*, dass für jedwedes Massenelement $m(x, y, z)$ des Körpers fortdauernd die Gleichungen stattfinden:

$$\frac{dx}{dt} = 0 , \quad \frac{dy}{dt} = 0 , \quad \frac{dz}{dt} = 0 , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 , \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0 , \text{ etc.}$$

Und hieraus folgt, mit Rücksicht auf die früheren Formeln (ϑ.), (ι.) pag. 166, dass zur Fortdauer des Ruhezustandes die Erfüllung der sechs Gleichungen

$$\sum X^A = 0 , \qquad \sum (yZ^A - zY^A) = 0 ,$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

nothwendig ist. — Dass jene früheren Formeln (ϑ.), (ι.) auf den hier betrachteten Fall eines *starren Körpers* anwendbar sind, ist bereits früher dargelegt worden.

§ 6.

Der Hamilton'sche Satz.

Bewegt sich ein Punkt $m(x, y, z)$ unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte X, Y, Z, so gelten für diese Bewegung die in (*L.*) pag. 160 angegebenen Gleichungen:

$$
(a.)\qquad
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= X\,,\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y\,,\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z\,.
\end{aligned}
$$

Die augenblickliche lebendige Kraft des Punktes mag T heissen:

$$
(b.)\qquad T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].
$$

Man denke sich nun neben der *wirklichen* Bewegung des Punktes eine unendlich wenig von ihr abweichende *fingirte* Bewegung desselben, und benutze die Bezeichnungen

$$x,\ y,\ z,\ T$$

für die *wirkliche* Bewegung mit Bezug auf irgend einen Zeitaugenblick t, andererseits aber die Bezeichnungen

$$x + \xi\,,\quad y + \eta\,,\quad z + \zeta\,,\quad T + \tau$$

für die *fingirte* Bewegung mit Bezug auf *ebendenselben* Zeitaugenblick t. Multiplicirt man die Gleichungen ($a.$) mit ξ, η, ζ, und addirt, so erhält man

$$m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\xi + \cdots\right] = \left[X\xi + \cdots\right],$$

oder, was dasselbe ist:

$$
(c.)\quad m\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\xi + \cdots\right] - m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \cdots\right] = \left[X\xi + \cdots\right].
$$

Nun ist nach der Definition von T und $T + \tau$:

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cdots\right],$$

$$T + \tau = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \cdots\right],$$

mithin:

$$\tau = m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \cdots\right] + \frac{m}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \cdots\right],$$

also, weil ξ, η, ζ unendlich klein sein sollen, mithin die zweiten Potenzen dieser Grössen zu vernachlässigen sind:

$$\tau = m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \cdots\right].$$

Demgemäss kann die Formel (*c*.) auch so geschrieben werden:

$$m \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\xi + \cdots\right] - \tau = \left[X\xi + \cdots\right],$$

oder bei etwas anderer Anordnung auch so:

$$\tau + (X\xi + Y\eta + Z\zeta) = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\xi + \frac{dy}{dt}\eta + \frac{dz}{dt}\zeta\right).$$

Hieraus folgt, falls man mit dt multiplicirt, und sodann über einen beliebigen Zeitraum $t_1 \ldots t_2$ integrirt:

$$(d.)\int_{t_1}^{t_2}\left[\tau + (X\xi + Y\eta + Z\zeta)\right] dt = m\left[\frac{dx}{dt}\xi + \frac{dy}{dt}\eta + \frac{dz}{dt}\zeta\right]_{t_1}^{t_2}.$$

Die rechte Seite dieser Formel *verschwindet*, sobald man festsetzt, jene fingirte Bewegung solle von solcher Beschaffenheit sein, dass ξ, η, ζ im Augenblick t_1 *Null* sind, und im Augenblick t_2 ebenfalls *Null* sind. Ersetzt man daher nachträglich die Buchstaben ξ, η, ζ, τ durch δx, δy, δz, δT, so gelangt man zu folgendem Resultate:

Hamilton'scher Satz. — *Ein Punkt $m(x, y, z)$ bewege sich unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte (X, Y, Z). Und die augenblickliche lebendige Kraft des Punktes mag T heissen.*

Man denke sich nun neben der wirklichen Bewegung des Punktes irgend eine nur unendlich wenig von ihr abweichende fingirte Bewegung, und benutze die Bezeichnungen

$$x,\ y,\ z,\ T$$

für die wirkliche Bewegung mit Bezug auf irgend einen Zeitaugenblick t, andererseits aber die Bezeichnungen

$$x + \delta x,\quad y + \delta y,\quad z + \delta z,\quad T + \delta T$$

für die fingirte Bewegung mit Bezug auf ebendenselben Zeitaugenblick t. Alsdann wird für ein beliebig zu wählendes Zeitintervall $t_1 \ldots t_2$ stets die Formel stattfinden:

$$(f.)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta T + (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\right] dt = 0,$$

falls man nur voraussetzt, jene fingirte Bewegung sei in solcher Art eingerichtet, dass δx, δy, δz im Augenblick t_1, und ebenso auch im Augenblick t_2 Null sind.

Zusatz. — *In genau demselben Sinne gilt (wie sich leicht ergiebt) für ein beliebiges Punktsystem*

anderen **unmöglich** *gemacht wird, so mögen die Oberflächen der beiden Körper (nach dem Vorgange englischer Mathematiker) als* **vollkommen rauh** *bezeichnet werden.*

Wir stellen uns nun die Aufgabe die *Arbeit* zu berechnen, welche die beiden Widerstandskräfte R und R_1 während irgend eines Elementes $d\Theta$ der Berührungszeit verrichten, und zwar zuvörderst unter der Voraussetzung, dass die beiden Körperoberflächen *vollkommen glatt*, mithin jene Widerstandskräfte R und R_1 mit den normalen Druckkräften N und N_1 identisch sind.

Ist, um mit dem einfachsten Falle zu beginnen, der *eine* Körper — er mag m heissen — *unendlich klein*, also ein materieller Punkt, und der *andere* Körper M_1 *absolut festliegend*, so wird die auf m einwirkende Kraft R oder N während der Zeit $d\Theta$ die Arbeit

$$Nds \cos (N, ds) \;,$$

d. i. die Arbeit 0 verrichten. Denn es bezeichnet ds das vom Punkte m während der Zeit $d\Theta$ beschriebene Wegelement. Dieses Wegelement aber liegt, weil m während der Zeit $d\Theta$ mit dem festliegenden Körper M_1 in Berührung bleibt, auf der Oberfläche von M_1, und steht daher senkrecht gegen die normale Druckkraft N; so dass also der Winkel $(N, ds) = 90^\circ$ ist.

Andererseits wird die auf M_1 einwirkende Widerstandskraft R_1 oder N_1 während der Zeit $d\Theta$ eine Arbeit verrichten, die ebenfalls $= 0$ ist; wie solches sofort sich ergiebt, falls man nur beachtet, dass der Körper M_1, nach unserer augenblicklichen Annahme, eine *absolut feste Lage* besitzt.

In dem hier betrachteten Falle sind also die von den beiden Widerstandskräften verrichteten Arbeiten beide $= 0$, *mithin z. B. die* **Summe** *dieser beiden Arbeiten ebenfalls* $= 0$.

Wir wollen jetzt, an Stelle des unendlich kleinen Körpers m, einen *beliebig grossen* Körper M nehmen, im Uebrigen aber an den bisherigen Voraussetzungen festhalten. Alsdann können wir diesen Körper M in Gedanken in lauter unendlich kleine Massenelemente m. m', m'', etc. zerlegen. Denken wir uns aber diese Zerlegung der Art ausgeführt, dass das speciell mit m benannte Element an der augenblicklichen Berührungsstelle liegt, und während der Zeit $d\Theta$ mit M_1 in Berührung *bleibt*, so beschränken sich die während dieser Zeit $d\Theta$ in Thätigkeit kommenden Widerstandskräfte auf diejenigen, welche zwischen m und M_1 stattfinden; so dass wir also, ebenso wie im vorher-

gehenden Falle, zu dem Resultate[1]) gelangen, *dass die Summe der von diesen Widerstandskräften verrichteten Arbeiten* = 0 *ist.*

Dieses Resultat aber wird, wie aus dem zweiten Satze auf pag. 169 sich ergiebt, auch dann noch in Kraft bleiben, wenn nicht bloss M, sondern gleichzeitig auch M_1 in Bewegung begriffen ist; so dass wir also zu folgendem Satze gelangen:

Erster Satz. — *Befinden sich zwei starre Körper, deren Oberflächen vollkommen glatt sind, in irgend welchen Bewegungen, und bleiben dabei jene Oberflächen eine Zeit lang mit einander in Berührung, so wird die während dieser Zeit von den Widerstandskräften der beiden Körper verrichtete Arbeit* = 0 *sein.* Nachträglich übersieht man leicht, dass dieser Satz auch dann noch in Gültigkeit bleibt, wenn die Berührung der beiden Körper nicht an *einer*, sondern an mehreren, resp. an unendlich vielen Stellen stattfindet. Denn man wird in diesem Fall einen der beiden Körper, z. B. M in Gedanken in einzelne Elementarkörper zerlegen können, der Art, dass jeder solcher Elementarkörper mit M_1 immer nur je *eine* Berührungsstelle[2]) besitzt. U. s. w.

Wir wollen jetzt zwei Körper M und M_1 mit *vollkommen rauhen* Oberflächen in Betracht ziehen, indem wir dabei wiederum voraussetzen, dass die beiden Körper während eines gewissen Zeitintervalls mit einander in *Berührung* bleiben, und irgend zwei aufeinander folgende Augenblicke dieses Zeitintervalls mit Θ und $\Theta + d\Theta$ bezeichnen.

Wir beginnen, ähnlich wie vorhin, mit dem Falle, dass der Körper M_1 *festliegt*, und bezeichnen dasjenige Massentheilchen des Körpers M, welches im Augenblick Θ mit M_1 in Berührung ist, mit m. Und zwar wollen wir zunächst die Bahn in Ueber-

1) Die hier zur Erlangung dieses Resultates angestellten Ueberlegungen können leicht durch *strengere* Methoden ersetzt werden, — aber allerdings nur dann, wenn man sich entschliesst, über den geometrischen Charakter der gegebenen Körperoberflächen (z. B. über die Stetigkeit derselben) bestimmte Voraussetzungen zu machen. Man vergl. übrigens das vortreffliche Werk von *Delaunay: Mécanique rationnelle*, Paris 1866, pag. 310—313.

2) Dabei wird die Berührungsstelle eines solchen Elementarkörpers, je nach Umständen, bald ein *Punkt*, bald aber auch ein *unendlich kleines Linien- oder Flächenelement* sein. Wie dem aber auch sei, — stets sind unsere früheren Betrachtungen auf einen solchen Elementarkörper ohne Weiteres anwendbar. Denn bei all' jenen früheren Betrachtungen ist der eigentliche Charakter der Berührungsstelle (ob dieselbe ein Punkt, ein Linienelement, oder ein Flächenelement sei) *in suspenso* geblieben.

legung ziehen, welche dieses specielle Theilchen *m vor* dem Augenblicke Θ durchlaufen hat, und ebenso auch diejenige, welche dasselbe später, *nach* dem Augenblick Θ durchlaufen wird. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir den *senkrechten Abstand,* den dieses Theilchen *m* in irgend einem früheren oder späteren Augenblick *t* von der Oberfläche des festliegenden Körpers M_1 besitzt, mit *r*. Alsdann hat *r* im Augenblick Θ offenbar den Werth 0, andererseits aber in jedwedem *früheren* oder *späteren* Augenblick einen Werth, der $\geqq 0$ ist. Und hieraus folgt, dass der Differentialquotient $\frac{dr}{dt}$ im Augenblick Θ den Werth 0 haben muss.

Solches erkannt, ergiebt sich sofort, dass das Theilchen *m* im Augenblick Θ eine Geschwindigkeit besitzt, die *tangential* ist zur Oberfläche des festliegenden Körpers M_1, oder mit anderen Worten, dass das Theilchen *m* im Augenblick Θ eine längs dieser Oberfläche *hingleitende* Bewegung besitzt.

Nach unserer Voraussetzung sind aber die Oberflächen der beiden Körper *M* und M_1 vollkommen rauh, mithin *gleitende* Bewegungen *unmöglich.* Wir gelangen somit zu dem Resultate, dass das Theilchen *m* in jenem Augenblick Θ sich in *Ruhe* befindet. Hieraus folgt, dass das von diesem Theilchen *m* während des nächstfolgenden Zeitelementes $d\Theta$ beschriebene Wegelement ds eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ist, mithin als 0 zu betrachten ist. Demgemäss wird, was die beiden zwischen *M* und M_1 thätigen Widerstandskräfte *R* und R_1 betrifft, die von *R* während der Zeit $d\Theta$ verrichtete Arbeit $= 0$ sein. Gleiches wird, weil der Körper M_1 nach unserer Voraussetzung in absoluter Ruhe sich befindet, offenbar auch von R_1 gelten. Wir gelangen somit zu dem Resultate, *dass die Summe der von den beiden Widerstandskräften während der Zeit $d\Theta$ geleisteten Arbeiten ebenfalls $= 0$ ist.*

Dieses Resultat bleibt nun aber, wie aus dem zweiten Satze auf pag. 169 sich ergiebt, auch dann noch in Kraft, wenn nicht bloss *M*, sondern gleichzeitig auch M_1 in Bewegung begriffen ist; so dass wir also zu folgendem Satze gelangen:

Zweiter Satz. — *Befinden sich zwei starre Körper, deren Oberflächen vollkommen rauh sind, in irgend welchen Bewegungen, und bleiben dabei jene Oberflächen eine Zeit lang mit einander in* **Berührung**, *so wird die von den Widerstands-*

kräften der beiden Körper während dieser Zeit verrichtete Arbeit = 0 sein. Nachträglich übersieht man leicht, dass dieser Satz (ebenso wie der vorhergehende) auch dann noch in Gültigkeit bleibt, wenn die gegenseitige Berührung der beiden Körper nicht an einer, sondern an mehreren, resp. an unendlich vielen Stellen stattfindet.

Zu den beiden Sätzen dieses Paragraphs mag schliesslich noch ein dritter Satz von bloss negativem Charakter hinzugefügt werden, welcher folgendermassen lautet:

Dritter Satz. — *Findet zwischen zwei Körpern ein plötzlicher Zusammenstoss statt, ist also das Zusammentreffen der beiden Körper von plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen begleitet, so wird die hierbei von ihren Widerstandskräften verrichtete Arbeit im Allgemeinen nicht = 0 sein.*

Wird z. B. ein unendlich kleiner Körper, d. i. ein materieller Punkt m senkrecht gegen die Wand eines absolut festliegenden Körpers M geschleudert, so ergiebt sich aus dem Satze der lebendigen Kraft die Formel

$$\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = A_{12},$$

wo v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten des Punktes m in irgend zwei Zeitaugenblicken t_1 und t_2 vorstellen, während A_{12} die während des Zeitraumes $t_1 t_2$ von den einwirkenden Kräften verrichtete Arbeit repräsentirt. Nimmt man nun an, dass, ausser den innerhalb m, und ebenso innerhalb M vorhandenen Cohäsionskräften, nur noch die Widerstandskräfte der beiden Körper ins Spiel kommen, und dass beide Körper vollkommen starr, mithin die Arbeiten jener Cohäsionskräfte = 0 sind, so repräsentirt A_{12} geradezu diejenige Arbeit, welche von den *Widerstandskräften* der beiden Körper während der Zeit $t_1 t_2$ geleistet wird.

Bezeichnet nun t_2 den Augenblick des Zusammenstosses, und t_1 irgend einen früheren Augenblick, so ist $v_2 = 0$, hingegen v_1 von beträchtlichem Werthe. Und die vorstehende, gegenwärtig auf

$$-\frac{m v_1^2}{2} = A_{12}$$

sich reducirende Formel zeigt also, dass jene von den Widerstandskräften verrichtete Arbeit A_{12} *nicht* = 0 ist. — *Q. e. d.*

§ 9.

Zusammenfassung der Resultate.

Um die Resultate der beiden vorhergehenden Paragraphe in bequemer Weise zusammenfassen zu können, mag folgende Ausdrucksweise eingeführt werden:

Definition. — *Die Bewegung eines Systems starrer Körper sei von solcher Beschaffenheit, dass niemals plötzliche Zusammenstösse oder überhaupt plötzliche Geschwindigkeitsänderungen eintreten, dass hingegen einige der Körper dauernd oder zeitweise mit einander in Berührung sein können. Ueberdies sei angenommen, dass die Oberflächen je zweier Körper, die dauernd resp. zeitweise einander berühren, entweder beide vollkommen glatt, oder aber beide vollkommen rauh sind.*

Sind all' diese Voraussetzungen erfüllt, so mag das System kurzweg ein vollkommenes System genannt werden.

Solches festgesetzt, gelangt man alsdann durch Zusammenfassung der Resultate der beiden letzten Paragraphe zu folgendem allgemeinen Theorem:

Allgemeines Theorem. — *Befindet sich ein vollkommenes System starrer Körper unter dem Einfluss seiner Cohäsions- und Widerstandskräfte, und unter dem gleichzeitigen Einfluss beliebiger anderer Kräfte in irgend welcher Bewegung, so wird dabei die von jenen Cohäsions- und Widerstandskräften verrichtete Arbeit stets = 0 sein.*

§ 10.

Der Satz der lebendigen Kraft in seiner Anwendung auf ein System starrer Körper.

Bewegt sich ein *vollkommenes* System starrer Körper unter dem Einfluss seiner Cohäsions- und Widerstandskräfte und unter dem gleichzeitigen Einfluss beliebiger *anderer* Kräfte, und bringt man auf dieses System den Satz der lebendigen Kraft (pag. 171):

$$(A.) \qquad dT = \sum(Xdx + Ydy + Zdz)$$

in Anwendung, so hat man unter T die lebendige Kraft des ganzen Systems, ferner unter (x, y, z) die Coordinaten eines einzelnen Massenelementes m des Systems, endlich unter (X, Y, Z)

die Resultante *aller* auf dieses Element m einwirkenden Kräfte zu verstehen.

Da nun die in dem System thätigen Kräfte theils *Cohäsions- und Widerstandskräfte*, theils aber irgend welche *anderweitigen Kräfte* sind, so kann man setzen:

$$(B.)\qquad \begin{aligned} X &= \mathfrak{X}^* + \mathfrak{X}\,, \\ Y &= \mathfrak{Y}^* + \mathfrak{Y}\,, \\ Z &= \mathfrak{Z}^* + \mathfrak{Z}\,, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{Y}^*$, $\mathfrak{Z}^*$ diejenigen Theile der Kräfte X, Y, Z bezeichnen, welche von den *Cohäsions- und Widerstandskräften* herrühren, während $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ diejenigen Theile derselben vorstellen sollen, welche herstammen von jenen *anderweitigen Kräften*. Somit geht die Formel ($A.$) über in

$$(C.)\qquad dT = \sum(\mathfrak{X}^*dx + \mathfrak{Y}^*dy + \mathfrak{Z}^*dz) + \sum(\mathfrak{X}dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}dz)\ .$$

Zufolge des vorhergehenden allgemeinen Theorems pag. 184 ist aber die Summe $\sum(\mathfrak{X}^*dx + \mathfrak{Y}^*dy + \mathfrak{Z}^*dz)$ stets $= 0$; so dass man erhält:

$$(D.)\qquad dT = \sum(\mathfrak{X}dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}dz)\ ,$$

mithin zu folgendem Satze gelangt:

Der Satz der lebendigen Kraft. — *Bewegt sich ein vollkommenes System starrer Körper* (vgl. die Definition pag. 184) *unter dem Einfluss seiner Cohäsions- und Widerstandskräfte und unter dem gleichzeitigen Einfluss irgend welcher anderweitiger Kräfte, so wird für jedwedes Zeitelement dt der Zuwachs der lebendigen Kraft des Systems ebenso gross sein, wie die während dieses Zeitelementes von jenen anderweitigen Kräften verrichtete Arbeit. Bezeichnet man nämlich die irgend ein einzelnes Massenelement $m(x, y, z)$ des Systems sollicitirenden anderweitigen Kräfte mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so wird für jedes Zeitelement dt die Formel stattfinden:*

$$(E.)\qquad dT = \sum(\mathfrak{X}dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}dz)\ ,$$

wo T die lebendige Kraft des ganzen Systems vorstellt.

Man kann diesen allgemeinen Satz z. B. auf den Fall anwenden, dass einige von den Körpern des Systems eine *absolut*

feste Lage besitzen, wobei alsdann selbstverständlich diejenigen Kräfte, welche für eine derartige Lage Sorge tragen, mit in Betracht zu ziehen sind. Doch bemerkt man sofort, dass die von diesen Kräften auf jene Körper ausgeübten Arbeiten = 0 sind, (weil eben jene Körper absolut festliegen), und dass also diese Kräfte in der Formel (*E.*) ohne Weiteres fortfallen.

§ 11.

Der Hamilton'sche Satz und die Lagrange'schen Gleichungen.

Nachdem wir im vorhergehenden Paragraph den Satz der lebendigen Kraft auf ein *vollkommenes* System starrer Körper angewendet haben, wollen wir gegenwärtig auch den Hamilton-schen Satz [(*g.*) pag. 178]:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta T + \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\right]dt = 0$$

auf ein solches System in Anwendung bringen. Halten wir dabei fest an der Bezeichnungsweise des vorhergehenden Paragraphs, so reducirt sich der Ausdruck

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \text{ auf } \sum(\mathfrak{X}\delta x + \mathfrak{Y}\delta y + \mathfrak{Z}\delta z) \; ,$$

ebenso wie damals

$$\sum(Xdx + Ydy + Zdz) \text{ auf } \sum(\mathfrak{X}dx + \mathfrak{Y}dy + \mathfrak{Z}dz)$$

sich reducirte. Wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

Der Hamilton'sche Satz. — *Hält man fest an den Vorstellungen und Bezeichnungen des vorhergehenden Satzes* (*E.*), *so gilt für jedwedes Zeitintervall* $t_1 t_2$ *die Formel:*

$$(F.) \qquad \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta T + \sum(\mathfrak{X}\delta x + \mathfrak{Y}\delta y + \mathfrak{Z}\delta z)\right]dt = 0 \; .$$

Dabei ist unter der den Zeichen δx, δy, δz, δT *entsprechenden fingirten Bewegung jede beliebige mit dem Charakter des vollkommenen Systems verträgliche und von der wirklichen Bewegung nur unendlich wenig abweichende Bewegung zu verstehen, falls nur dieselbe von solcher Beschaffenheit ist, dass die Grössen* δx, δy, δz *im Augenblick* t_1, *und ebenso auch im Augenblick* t_2 *sämmtlich* = 0 *sind.*

Bezeichnet man die independenten Variablen, durch welche die räumliche Lage des Systems in jedem Augenblick sich bestimmt, mit $q_1, q_2, \ldots q_\mu$, so ergeben sich auf Grund der Formel (*F.*) in bekannter Weise die μ Gleichungen:

$$(G.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \frac{dq_j}{dt}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum\left(\mathfrak{X}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \mathfrak{Y}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \mathfrak{Z}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right),$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots \mu .$$

Dies sind die *Lagrange'schen Gleichungen zweiter Form*, aus denen man nun rückwärts auch diejenigen der *ersten Form* abzuleiten vermag.

Dabei werden jene independenten Variablen im Laufe der Zeit ihrer Art und Zahl nach wechseln können. Besteht z. B. das betrachtete System aus einem materiellen Punkt m und aus einem absolut festliegenden Körper M_1, und bleibt m mit M_1 nur eine Zeitlang in Berührung, so wird die Anzahl jener independenten Variablen während dieser Berührungszeit = 2, später aber = 3 sein.

Ferner ist zu bemerken, dass, wenn einige der Körper des Systems eine *absolut feste* Lage besitzen, die für eine derartige Lage Sorge tragenden Kräfte, in den Formeln (*F.*) und (*G.*) von vornherein fortgelassen werden dürfen. Vgl. den Schluss des vorhergehenden Paragraphs.

§ 12.

Ueber das absolute Axensystem.

Bewegt sich ein materieller Punkt $m(x, y, z)$ unter dem Einfluss einer gegebenen Kraft R, so gelten für diese Bewegung die in (*L.*) pag. 160 angegebenen Gleichungen:

$$(\alpha.)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = R\cos(R, x),$$

etc. etc.

Dabei ist, wie an allen Stellen dieses Aufsatzes, unter (x, y, z) das *absolute Axensystem* zu verstehen.

Man könnte nun vielleicht der Meinung sein, die Wahl des Coordinatensystems sei völlig gleichgültig, und demgemäss geneigt sein, an Stelle des *absoluten* Systems irgend ein *anderes* rechtwinkliges Axensystem (ξ, η, ζ) eintreten zu lassen, und die diesem neuen Axensystem entsprechenden Gleichungen

$$(\beta.)\qquad m\frac{d^2\xi}{dt^2} = R\cos(R,\,\xi)$$

etc. etc.

ebenfalls für correct zu halten. Um die Richtigkeit oder Unrichtigkeit einer solchen Ansicht näher zu prüfen, wollen wir zunächst den einfachen Fall in Betracht ziehen, dass das neue System (ξ, η, ζ) eine Bewegung besitze, bei welcher es dem absoluten System (x, y, z) fortdauernd *parallel* bleibt. Im Uebrigen aber mag diese Bewegung eine ganz *beliebige* sein; und es mögen also die absoluten Coordinaten (x_ω, y_ω, z_ω) des Anfangspunktes ω des neuen Systems *beliebige* Functionen der Zeit sein. Dann ist z. B.:

$$\xi = x - x_\omega \quad \text{und} \quad (R,\,\xi) = (R,\,x)\;;$$

so dass also die Gleichungen (β.) die Gestalt annehmen:

$$(\beta'.)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} - m\frac{d^2x_\omega}{dt^2} = R\cos(R,\,x)\;,$$

etc. etc.

Hieraus aber geht deutlich hervor, dass diese neuen Gleichungen (β.) oder (β'.), falls x_ω, y_ω, z_ω *beliebige* Functionen der Zeit sind, mit den Gleichungen (α.) in Widerspruch stehen, im Allgemeinen also *unrichtig* sind.

Um dieses Ergebniss vielleicht noch deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir jetzt ein etwas bestimmteres Beispiel in Betracht ziehen.

Es mögen im ganzen Universum überhaupt nur *zwei* Körper m und m_1 vorhanden sein, etwa *Sonne* und *Erde*, und es mag vorausgesetzt sein, dass dieselben nach dem Newton'schen Gesetz aufeinander einwirken, dass also die repulsive Kraft R, mit welcher jeder der beiden Körper in der Entfernung r auf den andern einwirkt, den Werth besitze:

$$R = -\varkappa\frac{m\,m_1}{r^2}\;,$$

wo $\varkappa$ eine *positive Constante* vorstellt. Alsdann werden nach (L.) pag. 160 für die absoluten Coordinaten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) der beiden Körper die Gleichungen gelten:

$$(A.)\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -\varkappa\frac{m\,m_1}{r^2}\frac{x-x_1}{r}\;,\quad m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\varkappa\frac{m\,m_1}{r^2}\frac{x_1-x}{r}\;,$$

etc. etc. etc. etc.

Hieraus folgt, falls man durch m, resp. m_1 hebt, und sodann subtrahirt:

$$(A'.)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{\varkappa(m+m_1)}{r^2}\,\frac{x-x_1}{r},$$

etc. etc.,

also, falls man $x - x_1 = \xi$, $y - y_1 = \eta$, $z - z_1 = \zeta$ setzt:

$$(A''.)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\varkappa\,\frac{m+m_1}{r^2}\,\frac{\xi}{r},$$

etc. etc.

All' diese Formeln $(A.)$, $(A'.)$, $(A''.)$ beziehen sich auf das *absolute* Axensystem. Wollte nun irgend Jemand behaupten, dieses absolute System sei nach Belieben durch jedwedes *andere* rechtwinklige Axensystem ersetzbar, so würde derselbe z. B. auch die Anwendung desjenigen Systems gut heissen müssen, welches dem absoluten fortdauernd parallel bleibt, und dessen Anfangspunkt fortdauernd mit m_1 zusammenfällt. Bei Zugrundelegung dieses Systems würden sich aber für den Körper m, an Stelle der Gleichungen $(A.)$, folgende Gleichungen ergeben:

$$(B.)\qquad m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\varkappa\,\frac{m\,m_1}{r^2}\,\frac{\xi}{r},$$

etc. etc. ,

wo ξ, η, ζ dieselben Bedeutungen haben wie vorhin. Und diese Gleichungen $(B.)$ sind, weil sie mit $(A''.)$ in offenbarem Widerspruch stehen, geradezu als *unrichtig* zu bezeichnen.

Um die Hauptsache hervorzuheben: Ist die von Galilei, Newton, Euler, d'Alembert *und* Lagrange *begründete und von allen hervorragenden Astronomen, Physikern und Mathematikern bis zur heutigen Zeit festgehaltene Mechanik correct mit Bezug auf ein gewisses dem ganzen Universum zugehöriges Axensystem, welches wir kurzweg das absolute genannt haben, so folgt hieraus von selber, dass dieses absolute Axensystem nicht ersetzbar sein kann durch jedes beliebige andere Axensystem.*

Eine genauere Untersuchung zeigt, dass eine solche Ersetzbarkeit nur in zwei Fällen stattfindet, nämlich *erstens*, wenn das *neue* Axensystem (ξ, η, ζ) mit jenem *absoluten* System (x, y, z) starr verbunden ist, und *zweitens* auch dann, wenn das neue System (ξ, η, ζ) eine Bewegung besitzt, bei welcher die absolute Geschwindigkeit seines Anfangspunktes ihrer Grösse und Richtung nach constant bleibt, während gleichzeitig die Axen des neuen Systems gegen die des absoluten Systems unter constanten Winkeln geneigt bleiben.

Nachschrift.

Besondere Schwierigkeiten bietet in der Mechanik der Fall der sogenannten *Bedingungsgleichungen* dar. Und es dürfte wohl heut zu Tage im Kreise competenter Beurtheiler allgemein anerkannt sein, dass die diesen Fall betreffenden Sätze, nämlich der Satz der virtuellen Verrückungen und das d'Alembert'sche Princip, einer strengen Begründung entbehren, dass alle für diese Sätze gegebenen Beweise mehr oder weniger mangelhaft sind. Auch habe ich bei einer früheren Gelegenheit (diese Berichte, 1869 pag. 258) die ebenso abfällige wie berechtigte Kritik, welche Jacobi über jene »vermeintlichen« Beweise gegeben hat, näher mitgetheilt.

Im vorliegenden Aufsatze glaube ich nun gezeigt zu haben, dass man die in Rede stehenden Schwierigkeiten nicht überwinden, wohl aber vermeiden kann, indem man die sogenannten Bedingungsgleichungen ganz bei Seite lässt, und an Stelle derselben direct die hinter jenen Gleichungen verborgenen *Kräfte*, d. i. die Cohäsions- und Widerstandskräfte in Rechnung bringt. Insbesondere habe ich gezeigt, wie man in solcher Weise — und zwar auf sehr einfachem Wege — zum Hamilton'schen Satze und zu den Lagrange'schen Gleichungen erster und zweiter Form hingelangen kann. Uebrigens wird man alsdann *nachträglich* das (durch seine praktische Bedeutung ausgezeichnete) Princip der virtuellen Verrückungen, und ebenso auch das d'Alembert-sche Princip leicht aus jenen Lagrange'schen Gleichungen abzuleiten im Stande sein.

Inhaltsübersicht.

	Seite
§ 1. Das Trägheitsgesetz	157
§ 2. Das Gesetz des Parallelogramms	161
§ 3. Das Gesetz der Action und Reaction	163
§ 4. Ueber die Arbeit der Kräfte	168
§ 5. Der Satz der lebendigen Kraft	170
§ 6. Der Hamilton'sche Satz	175
§ 7, 8 u. 9. Die Arbeit der Cohäsions- und Widerstandskräfte	178
§ 10. Der Satz der lebendigen Kraft für ein System starrer Körper	184
§ 11. *Der Hamilton'sche Satz und die Lagrange'schen Gleichungen*	186
§ 12. Ueber das sogenannte absolute Axensystem	187

SITZUNG VOM 12. DECEMBER 1887.

Axel Harnack, *Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function durch die Fourier-Bessel'schen Functionen.*

Die Aufgabe, eine willkürliche reelle Function innerhalb eines endlichen Intervalles durch solche unendliche Reihen darzustellen, wie sie die Probleme der Potentialtheorie, der Wärmeleitung, der elastischen Schwingungen u. a. erfordern, ist von HEINE auf Grund der Arbeiten von CAUCHY, STURM und LIOUVILLE in folgender Weise zusammengefasst worden: [1])

Eine Function $f(x)$ ist darstellbar durch eine Reihe von der Form

$$1) \qquad \sum_\lambda \theta(\lambda, x) \frac{\int_0^X f(x)\,\theta(\lambda, x)\,g(x)\,dx}{\int_0^X (\theta(\lambda, x))^2\,g(x)\,dx},$$

wobei die Werthe λ die unendlich vielen Wurzeln einer transscendenten Gleichung $\varpi(\lambda) = 0$ durchlaufen, die nur reelle und keine vielfachen Wurzeln enthält, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Erstens: Es soll bei jedem reellen Werth von α das complexe Integral

$$\int \frac{\theta(z, x)}{(z - \alpha)\,\varpi(z)}\,dz$$

---

1) »Einige Anwendungen der Residuenrechnung von CAUCHY«, Journ. f. Math. Bd. 89, sowie Handbuch der Kugelfunctionen 2. Aufl. Bd. 2, pag. 216.

nach z auf einem Kreise mit unendlichem Radius integrirt, null werden. In diesem Falle besteht die Entwickelung

$$\frac{\theta(\alpha, x)}{\varpi(\alpha)} = \sum_\lambda \frac{\theta(\lambda, x)}{(\alpha - \lambda)\,\varpi'(\lambda)}$$

d. h. die Function $\theta(\alpha, x)$ ist durch eine unendliche Reihe darstellbar, welche nach den $\theta(\lambda, x)$ fortschreitet.

Zweitens: Diese Reihe soll in gleichem Grade convergiren.

Drittens: Es soll eine Function $g(x)$ angebbar sein, so dass

$$\int_0^X \theta(\lambda, x)\,\theta(\mu, x)\,g(x)\,dx$$

null ist, wenn λ und μ verschiedene Wurzeln der Gleichung $\varpi(\lambda) = 0$ sind; für $\lambda = \mu$ soll das Integral nicht null sein.

Viertens: Das Integral

$$\int_0^X \theta(\alpha, x)\,g(x)\,\psi(x)\,dx$$

soll nicht für alle beliebigen reellen Werthe, welche man α ertheilen kann, null sein können, ohne dass die Function $\psi(x)$ null ist, wenigstens im Allgemeinen, d. h. so dass ihr Mittelwerth in jedem beliebig kleinen Intervall null ist. Ist also $\psi(x)$ durchaus stetig, so muss der Werth constant null sein.

Fünftens: Die oben angegebene Reihe 1) soll in gleichem Grade convergiren. Statt dessen genügt es aber zu sagen: Diese Reihe soll im Allgemeinen in gleichem Grade convergiren, so dass ihr Integral durch gliedweise Integration gebildet werden kann, selbst wenn man die Reihe zuvor mit einer Function multiplicirt hat, die nicht unendlich wird, und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt.

Sind nämlich diese Bedingungen erfüllt, so stellt die obige Reihe 1) eine Function $\varphi(x)$ dar, mit der Eigenschaft, dass (zufolge der fünften und dritten Bedingung)

$$\int_0^X \varphi(x)\,\theta(\lambda, x)\,g(x)\,dx = \int_0^X f(x)\,\theta(\lambda, x)\,g(x)\,dx$$

ist. Mithin ist auch (zufolge der zweiten und ersten Bedingung)

$$\int_0^X \varphi(x)\,\theta(\alpha, x)\,g(x)\,dx = \int_0^X f(x)\,\theta(\alpha, x)\,g(x)\,dx$$

und hieraus folgt (aus der vierten Bedingung), dass

$$f(x) = \varphi(x)\,,$$

vorausgesetzt, dass beide Functionen stetig sind.

Diesen Satz benutzt Heine für die Entwickelung einer Function nach den trigonometrischen Functionen, sowie nach den Cylinderfunctionen erster Art, und zwar der zweiten und dritten Ordnung, die bei ihm durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J = 0\,,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\psi}{dx} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right)\psi = 0$$

definirt sind. Indessen ist er auf die Frage nicht näher eingegangen, ob die fünfte Bedingung erfüllt ist, eine Lücke, welche ich durch die folgenden Untersuchungen ergänzen möchte.

Die Function $\theta(\lambda, x)$ bezeichne ich durch $U^{(n)}(\lambda, x)$ oder auch weiterhin kurz mit $U(\lambda x)$; sie soll ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$2)\qquad \frac{d^2U}{dx^2} + \left(\lambda^2 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)U = 0$$

sein, und zwar dasjenige, welches für $x = 0$ verschwindet. Ein solches particuläres Integral ist vorhanden, wenn n eine beliebige positive Zahl bezeichnet, und nur eines, wenn $n \geqq \frac{1}{2}$ ist. Dasselbe ist immer nur bis auf einen constanten Factor bestimmt, der für die Reihenentwickelung nicht in Betracht kommt, weil die Glieder derselben von der 0ten Dimension in Bezug auf U sind. Dies Integral werde (für $n \geqq 0$, worauf wir uns für die folgenden Betrachtungen beschränken) durch die Gleichung definirt:

$$U^{(n)}(\lambda, x) = U^{(n)}(\lambda x) = \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{2k}.$$

Für $x = 0$ hat U den Werth null, die Ableitung $\frac{dU}{dx}$ jedoch nur dann, wenn $n > \frac{1}{2}$ ist. Zu den von Heine definirten Functionen bestehen die Beziehungen

$$U^{(n)}(\lambda x) = \sqrt{\frac{\lambda x}{2}}\, J^{(n)}(\lambda x) = \frac{\lambda x}{2\sqrt{\pi}}\, \psi^{(n-\frac{1}{2})}(\lambda x)\,.$$

Für $n = \frac{1}{2}$ ist $U^n(\lambda x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\lambda x)$.[1]

Die Werthe λ sollen die positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung sein:

$$\varpi(\lambda) = \frac{d\,U^{(n)}(\lambda x)}{dx} + h\,U^{(n)}(\lambda x) = 0 \text{ für } x = X\,,$$

wobei h eine Constante ist, die auch null oder unendlich sein kann. Doch werde ich im Folgenden diese besonderen Fälle, bei denen die Formeln einfacher werden, nicht besonders berücksichtigen.

Den Nachweis, dass die drei ersten Bedingungen erfüllt sind, und zwar die dritte unter der Annahme $g(x) = 1$, kann ich hier unterlassen. Desgleichen ist auch die vierte Bedingung erfüllt; weil sich nämlich $U(\alpha x)$ nach Potenzen des Argumentes αx entwickeln lässt, so folgt aus der Gleichung

$$\int_0^X \varphi(x)\,U(\alpha x)\,dx = 0\,, \quad \text{(bei beliebigen reellen Werthen von } \alpha)$$

dass

$$\int_0^X \varphi(x)\,x^n\,dx = 0$$

ist bei allen ganzzahligen positiven Exponenten n. Dies aber tritt nur ein, wenn alle Mittelwerthe von $\varphi(x)$ null sind.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass die Reihe

$$3) \qquad \sum_\lambda U(\lambda x)\,\frac{\int_0^X U(\lambda x)\,f(x)\,dx}{\int_0^X (U(\lambda x))^2\,dx}$$

---

1) Diesen speciellen Fall habe ich behandelt in einer Arbeit »zur Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern« (Zeitschrift für Math. 1887); daselbst ist gezeigt, dass bei der Integration der partiellen Differentialgleichung nicht die Darstellbarkeit der Function $f(x)$ gefordert wird, sondern die Convergenz einer Function $v(t, x)$ für $t = 0$ nach $f(x)$. Ist aber die Darstellung möglich, so vereinfacht sich dieser Nachweis. Ebenso verhält es sich bei den anderen Problemen, bei denen die Functionen U in Betracht kommen.

convergirt, und zwar so, dass ihre gliedweise Integration auch in dem Falle statthaft ist, dass man die Reihe zuvor mit einer Function multiplicirt hat, welche nicht unendlich wird, und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt.

Der Weg, welchen ich einschlage, ist zunächst derselbe, den Liouville in zwei Abhandlungen angegeben hat[1]; aber die Liouville'schen Untersuchungen lassen die Aufgabe nicht unmittelbar und vollständig erledigen. Denn indem er von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + (\lambda^2 - k)\, U = 0$$

ausgeht, fordert er, dass k solch eine Function von x ist, dass sie für $x = 0$ nicht unendlich wird, während bei den darstellenden Functionen, die hier vorliegen und gerade die wichtigsten Fälle umfassen, $k = \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$ ist, also von der zweiten Ordnung unendlich wird; seine Betrachtungen sind also hier direct nur für den Fall $n = \frac{1}{2}$, d. h. für die trigonometrischen Functionen brauchbar[2]).

1) »Sur le développement des fonctions ou parties des fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable«. Journ. de Mathématiques T. II pag. 16 et pag. 418.

2) Auch hat Liouville, wie ich der geschichtlichen Uebersicht halber erwähnen möchte, nicht die Nothwendigkeit der Bedingungen 1) und 2) erkannt, um daraus die Bedingung 4) herzuleiten; er ersetzte vielmehr diese Bedingung durch den Satz: Wenn das Integral

$$\int_0^X U(\lambda, x)\, \psi(x)\, dx$$

null wird bei allen Werthen von λ, welche der Gleichung $\tilde{\omega}(\lambda) = 0$ genügen, so muss $\psi(x)$ im Allgemeinen null sein. Dieser Schluss ist aber von ihm nur bewiesen, vorausgesetzt dass $\psi(x)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, worauf schon Ossian Bonnet in seiner preisgekrönten Arbeit; »Sur la théorie générale des séries« (Académie de Belgique 1849) hinwies. Derselbe liess in Folge dessen die Liouville'sche Methode ganz fallen, und versuchte das von Poisson angegebene Verfahren zu einem vollgültigen Beweise auszugestalten, was indessen nicht in befriedigender Weise gelingen kann.

Nur in der kurzen Notiz von Sturm und Liouville (Journal T. II. pag. 220) wird die in der obigen ersten Bedingung enthaltene Reihe ohne Beweis eingeführt, und die richtige Verwerthung später durch eine Bemerkung (pag. 436) angedeutet.

I.

Bei einer jeden Differentialgleichung von der Form

$$4)\qquad \frac{d^2 U}{dx^2} + (\lambda^2 - k)\, U = 0\ ,$$

in welcher λ eine Constante, k eine beliebige Function von x ist, die im Intervall $x > 0$ bis $x = X$ nicht unendlich wird, gewinnt man für die Integralfunction folgende Relation. Multiplicirt man die Gleichung mit $\sin \lambda x$, so wird

$$\left(\sin \lambda x \frac{d^2 U}{dx^2} + \lambda^2 \sin \lambda x U\right) dx = k\,U \sin \lambda x\, dx\ ,$$

also

$$5)\qquad \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \frac{dU}{dx} - \cos \lambda x\, U = C + \frac{1}{\lambda}\int\limits_c^x k\,U \sin \lambda x\, dx$$

und es ist

$$C = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda c \left(\frac{dU}{dx}\right)_c - U_c \cos \lambda c\ ,$$

wobei c einen Punkt im Innern des Intervalles von 0 bis X bedeuten soll. Ebenso wird nach Multiplication mit $\cos \lambda x$ die Gleichung erhalten:

$$6)\qquad \frac{1}{\lambda} \cos \lambda x \frac{dU}{dx} + \sin \lambda x\, U = C' + \frac{1}{\lambda}\int\limits_c^x k\,U \cos \lambda x\, dx\ ,$$

wobei

$$C' = \frac{1}{\lambda} \cos \lambda c \left(\frac{dU}{dx}\right)_c + U_c \sin \lambda c\ .$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) folgt:

$$U = -\,C \cos \lambda x + C' \sin \lambda x + \frac{1}{\lambda}\int\limits_c^x k\,U \sin \lambda(x - x')\, dx',$$

$$\frac{dU}{dx} = \lambda\,(C \sin \lambda x + C' \cos \lambda x) + \int\limits_c^x k\,U \cos \lambda(x - x')\, dx'\ .$$

Die Constanten C und C' sind von dem Parameter λ und der fest gewählten Grösse c abhängig. Setzt man

$$C = -\,A \cos \alpha\ , \qquad C' = A \sin \alpha\ ,$$

so erhalten die vorstehenden Gleichungen die Form:

7) $$U = A\cos(\lambda x - \alpha) + \frac{1}{\lambda}\int_c^x k U \sin\lambda(x - x')\,dx' ,$$

8) $$\frac{dU}{dx} = -\lambda A \sin(\lambda x - \alpha) + \int_c^x k U \cos\lambda(x - x')\,dx' ,$$

wobei die von λ und c abhängigen Constanten A und α durch die Gleichungen bestimmt sind

$$U_c = A\cos(\lambda c - \alpha)\,, \quad \left(\frac{dU}{dx}\right)_c = -\lambda A \sin(\lambda c - \alpha)\,.$$

Die Constante A ist nicht wesentlich; man kann dieselbe beliebig fixiren, da die Function U nur bis auf einen Factor bestimmt ist. Die Constante α ist willkürlich, wenn U ein allgemeines Integral der Differentialgleichung 4) ist, dagegen bestimmt, wenn U ein bestimmtes particuläres Integral sein soll. Aus der Gleichung 7) lassen sich folgende Schlüsse ziehen.

Erstens: Bezeichnet man bei irgend einem bestimmten Werthe von λ den Maximalwerth des Betrages, welchen U im Intervall von c bis X annehmen kann, mit M, nennt man ferner K den grössten Betrag von k in demselben Intervall, wobei c zwar beliebig klein, aber von null verschieden fixirt sein muss, so ist

$$M \leqq [A] + \frac{1}{\lambda} KM(X - c) < [A] + \frac{1}{\lambda} KMX\,,$$

also

$$M < \frac{[A]}{1 - \frac{1}{\lambda} KX}\,.$$

Bei beliebig wachsenden Werthen von λ wird also der Maximalbetrag von U schliesslich nicht grösser als der Betrag von A; es bleibt daher in der Gleichung 7) das Integral auf der rechten Seite bei jedem Werthe von x, der grösser ist als null, endlich. *Demnach ist die Function U im Intervall von $c > 0$ bis X in der Form*

$$U = A\cos(\lambda x - \alpha) + \frac{1}{\lambda}\varphi_1(x, \lambda)$$

darstellbar, wobei $\varphi_1(x, \lambda)$ eine Function bedeutet, die bei allen Werthen von λ und bei allen Werthen von $x > 0$ endlich, d. h. kleiner bleibt als eine bestimmte endliche Grösse.

Betrachtet man zweitens das Integral

$$\int_c^X f(x)\, U dx =$$

$$= A\int_c^X f(x)\cos(\lambda x - \alpha)\, dx + \frac{1}{\lambda}\int_c^X f(x)\, dx \int_c^x k U \sin\lambda(x - x')\, dx',$$

so wird der letzte Theil auf der rechten Seite, indem man die Reihenfolge der Integrationen ändert,

$$\frac{1}{\lambda}\int_c^X k U dx' \int_{x'}^X f(x) \sin\lambda(x - x')\, dx'.$$

Von der Function $f(x)$ setzen wir nun voraus, dass sie im Intervall von c bis X eine endliche und im allgemeinen stetige Function ist, die nur an einzelnen Stellen eine sprungweise Werthänderung erleidet, und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, Voraussetzungen, welche man kurz die Dirichletschen Bedingungen zu nennen pflegt. Alsdann ist das Integral

$$\int_{x'}^X f(x) \sin\lambda(x - x')\, dx$$

eine Function von der Form $\frac{1}{\lambda}\psi$, wobei ψ bei allen Werthen von x' und noch so grossen Werthen von λ endlich bleibt. Folglich wird auch

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_c^X k U \psi(x')\, dx'$$

von der Form $\frac{1}{\lambda^2}\varphi_2$, wobei φ_2 bei allen Werthen von λ endlich bleibt. *Mithin ist das Integral*

$$\int_c^X f(x)\, U dx$$

von der Form $A\int_c^X f(x)\cos(\lambda x - \alpha)\, dx + \frac{1}{\lambda^2}\varphi_2$, *wobei* φ_2 *bei allen Werthen von* λ *endlich bleibt, falls die Grösse* c *beliebig klein, jedoch von null verschieden gewählt ist.*

Drittens findet man aus der Differentialgleichung für zwei Functionen U und V, welche zu verschiedenen Parametern λ und μ gehören, die Relationen

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + (\lambda^2 - k)\, U = 0\ , \qquad \frac{d^2 V}{dx^2} + (\mu^2 - k)\, V = 0\ ,$$

also

$$U\frac{d^2 V}{dx^2} - V\frac{d^2 U}{dx^2} = (\lambda^2 - \mu^2)\, UV\ ,$$

folglich:

9) $$(\lambda^2 - \mu^2)\int_0^X UV dx = \left[U\frac{dV}{dx} - V\,\frac{dU}{dx}\right]_0^X .$$

Wenn also die rechte Seite für $x = 0$ verschwindet, und wenn für $x = X$ die Gleichungen erfüllt sind

$$\frac{dU}{dx} + hU = 0\ , \quad \frac{dV}{dx} + hV = 0\ ,$$

so ist $U\dfrac{dV}{dx} - V\dfrac{dU}{dx} = 0$ auch für $x = X$ und also

$$\int_0^X UVdx = 0\ .$$

Um dasselbe Integral zu berechnen, wenn $U = V$ ist, bilde man die Gleichungen

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + (\lambda^2 - k)\, U = 0\ , \quad \frac{d^2 \frac{dU}{d\lambda}}{dx^2} + (\lambda^2 - k)\,\frac{dU}{d\lambda} + 2\lambda U = 0\ .$$

Eliminirt man die Glieder, welche mit $\lambda^2 - k$ multiplicirt sind, so wird

$$U\frac{d^2\frac{dU}{d\lambda}}{dx^2} - \frac{dU}{d\lambda}\,\frac{d^2 U}{dx^2} + 2\lambda U^2 = 0$$

oder

10) $$2\lambda\int_0^X U^2 dx = \left[\frac{dU}{d\lambda}\,\frac{dU}{dx} - U\,\frac{d^2 U}{d\lambda\, dx}\right]_0^X .$$

Wenn nun die rechte Seite für $x = 0$ verschwindet (und diese Forderung ist hier bei den oben definirten speciellen Functionen erfüllt für $n \gtreqless 0$), so ist der Ausdruck für $x = X$ allein zu berechnen. Setzt man aber

$$U = A\cos(\lambda x - \alpha) + \frac{1}{\lambda}\int_c^x kU\sin\lambda(x-x')\,dx'\ ,$$

$$\frac{dU}{dx} = -\lambda A\sin(\lambda x-\alpha) + \int_c^x kU\cos\lambda(x-x')\,dx'\ ,$$

$$\frac{dU}{d\lambda} = -xA\sin(\lambda x-\alpha) - \frac{1}{\lambda^2}\int_c^x kU\sin\lambda(x-x')\,dx'$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_c^x k\frac{dU}{d\lambda}\sin\lambda(x-x')\,dx' + \frac{1}{\lambda}\int_c^x kU(x-x')\cos\lambda(x-x')\,dx'\ ,$$

$$\frac{d^2U}{d\lambda dx} = -A\sin(\lambda x-\alpha) - \lambda xA\cos(\lambda x-\alpha)$$

$$+\int_c^x k\frac{dU}{d\lambda}\cos\lambda(x-x')\,dx' - \int_0^x kU(x-x')\sin\lambda(x-x')\,dx'\ ,$$

so erkennt man: *Das Integral*

$$\int_0^X U^2dx = \frac{1}{2}A^2X + \frac{1}{\lambda}\varphi_3\ ,$$

wobei φ_3 bei allen Werthen von λ endlich bleibt.

Mithin bekommt jedes Glied der Reihe 3), wenn man dem Integrale im Zähler daselbst die untere Grenze c statt 0 giebt, die Form

$$\frac{\left(A\cos(\lambda x-\alpha) + \frac{1}{\lambda}\varphi_1\right)\left(A\int_c^X f(x')\cos(\lambda x'-\alpha)dx' + \frac{1}{\lambda^2}\varphi_2\right)}{\left(\frac{1}{2}A^2X + \frac{1}{\lambda}\varphi_3\right)}\ ,$$

wobei φ_1, φ_2, φ_3 Functionen sind, welche bei allen Werthen von x im Intervall von c bis X und bei allen Werthen von λ endlich bleiben. Sondert man das Glied

$$\frac{2}{X}\cos(\lambda x-\alpha)\int_c^X f(x')\cos(\lambda x'-\alpha)\,dx'$$

ab, so sind die nachbleibenden Glieder im Zähler von der Form

$$\frac{1}{\lambda^2}A\varphi_2\cos(\lambda x-\alpha) + \frac{1}{\lambda^3}\varphi_1\varphi_2 +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\left(A\varphi_1 - \frac{2}{X}\varphi_3\right)\int_c^X f(x')\cos(\lambda x'-\alpha)\,dx'$$

und da dieses letzte Integral selbst von der Form ist $\frac{1}{\lambda}\psi$, so haben alle diese Glieder zum mindesten den Factor $\frac{1}{\lambda^2}$. Sie liefern daher, zufolge der Beschaffenheit der Wurzeln λ, die gleich näher erwähnt werden soll, unendliche Reihen, welche unbedingt und gleichmässig convergiren. Denn eine Reihe von der Form

$$\frac{a_1}{\lambda_1^2} + \frac{a_2}{\lambda_2^2} + \frac{a_3}{\lambda_3^2} + \cdots + \frac{a_k}{\lambda_k^2} + \cdots$$

convergirt unbedingt, wenn die Zähler a_k durchaus endlich bleiben, und die Reihe der Zahlen λ derart zunimmt, dass die Differenz $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ bei noch so grossen Werthen von k nicht null wird, sondern grösser bleibt als eine bestimmte endliche Zahl e, so dass $\lambda_{k+m} > \lambda_k + me$ wird.

II.

Es ist noch zu zeigen, dass auch die unendliche Reihe

$$11)\qquad \frac{2}{X}\sum_{\lambda}\cos(\lambda x - \alpha)\int_c^X f(x')\cos(\lambda x' - \alpha)\,dx'$$

im Allgemeinen gleichmässig convergirt. Dazu ist es nothwendig, die Abhängigkeit festzustellen, in welcher α von λ steht, sobald U ein bestimmtes particuläres Integral der Differentialgleichung ist, sowie die Beschaffenheit der Wurzeln λ zu untersuchen. Dabei berücksichtige ich nur die besondere Differentialgleichung 2), in welcher k den Werth $(n^2 - \frac{1}{4})\frac{1}{x^2}$ hat.

Aus der Theorie der BESSEL'schen Functionen $J^{(n)}_{(x)}$, insbesondere aus der semiconvergenten Entwickelung derselben[1]) ist bekannt, dass die Function

1) In allgemeinster Form sind dieselben bewiesen worden von HANKEL, Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. Math. Annal. Bd. 1; HANSEN, SCHLÖMILCH und LIPSCHITZ haben die Entwickelung bei reellen Werthen des Argumentes behandelt.

12) $$U^{(n)}{}_{(\lambda x)} = \sqrt{\frac{\lambda x}{2}}\, J^n(\lambda x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left[\lambda x - \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right] \sum (-1)^p \frac{(n,\,2p)}{(2\lambda x)^{2p}}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\lambda x - \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right] \sum (-1)^p \frac{(n,\,2p+1)}{(2\lambda x)^{2p+1}}$$

wird, so dass für alle Werthe von $x > 0$ der asymptotische Werth von $U^{(n)}{}_{(\lambda x)}$ gleich ist

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left[\lambda x - \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

und dass überhaupt bei jedem Werthe von $x > 0$ und jedem Werthe von λ

13) $$U^{(n)}{}_{(\lambda x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left[\lambda x - \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{\lambda}\, \psi(\lambda,\, x)\ ,$$

wobei wiederum ψ eine Function bedeutet, die stets endlich ist. Zugleich erkennt man aus dieser Gleichung, dass die Function $U^{(n)}$ bei allen positiven reellen Werthen des Argumentes endlich bleibt; denn setzt man $\lambda x = z$, so ist die Function bei allen endlichen Werthen von z von null an endlich, und für $z = \infty$ nicht grösser als $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Vergleicht man diesen Werth mit dem in der Gleichung 7) enthaltenen, so wird, $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ und $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ unterscheiden sich von $\cos \frac{1}{2}\pi(n + \frac{1}{2})$ und $\sin \frac{1}{2}\pi(n + \frac{1}{2})$ nur um Grössen, welche wiederum den Werth λ im Nenner enthalten, während der Zähler endlich bleibt. Bezeichnet man die Constante $\frac{1}{2}\pi(n + \frac{1}{2})$ der Kürze wegen mit β, so kann an Stelle der Reihe 11) die einfachere treten:

14) $$\frac{2}{X} \sum_{\lambda} \cos(\lambda x - \beta) \int_c^X f(x') \cos(\lambda x' - \beta)\, dx' ,$$

denn die Differenz zwischen den Reihen 11) und 14) ist eine Reihe, von der ohne weiteres deutlich ist, dass sie unbedingt und gleichmässig convergirt.

Die Gleichung $\left(\frac{dU}{dx}\right) + hU = 0$ für $x = X$, welche zur

Berechnung der Wurzeln λ dient, erhält die Form:

$$-\lambda \sin(\lambda X - \beta) + h \cos(\lambda X - \beta) + P = 0$$

wobei P eine Grösse bezeichnet, die bei allen Werthen von λ endlich bleibt. Mithin ist

$$\operatorname{tang}(\lambda X - \beta) = \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} Q,$$

wobei auch Q durchaus endlich bleibt; und folglich ist in erster Annäherung

$$\lambda X - \beta = k\pi, \quad \text{d. h.} \quad \lambda = \frac{k\pi}{X} + \frac{\beta}{X}$$

oder genauer ausgedrückt:

$$\lambda = \frac{k\pi}{X} + \frac{\beta}{X} + \frac{R}{\lambda},$$

wobei R eine Grösse ist, die durchaus endlich bleibt. Folglich wird

$$\cos(\lambda x - \beta) =$$

$$= \cos\left(\frac{k\pi x}{X} + \frac{\beta(x - X)}{X}\right) \cos\frac{Rx}{\lambda} - \sin\left(\frac{k\pi x}{X} + \frac{\beta(x - X)}{X}\right) \sin\frac{Rx}{\lambda}$$

und dieser Ausdruck ist von der Form

$$\cos\left(\frac{k\pi x}{X} + \frac{\beta(x - X)}{X}\right) + \frac{1}{\lambda}\psi,$$

wobei ψ durchaus endlich bleibt. Mithin genügt es an Stelle der Reihe 14) die Reihe zu betrachten:

$$15) \quad \frac{2}{X} \sum \cos\left(\frac{k\pi x}{X} + \frac{\beta(x - X)}{X}\right) \int_c^X f(x') \cos(\lambda x' - \beta)\, dx',$$

weil die ausgeschiedenen Theile wiederum den Factor λ^2 im Nenner enthalten. Ersetzt man noch schliesslich

$$\cos(\lambda x' - \beta) =$$

$$\cos\left(\frac{k\pi x'}{X} + \frac{\beta(x' - X)}{X}\right) - \sin\left(\frac{k\pi x'}{X} + \frac{\beta(x' - X)}{X}\right) \frac{Rx'}{\lambda} + \frac{X}{\lambda^2},$$

so sieht man, dass man auch unter dem Integral nur das erste dieser Glieder einzusetzen braucht, weil das mit $\frac{Rx'}{\lambda}$ multiplicirte Integral

$$\int_c^X f(x') \sin\left(\frac{k\pi x'}{X} + \frac{\beta(x'-X)}{X}\right) dx'$$

einen Werth hat, der im Zähler endlich bleibt und im Nenner k enthält. Sonach tritt an Stelle der Reihe 15) die Reihe

$$16)\quad \frac{2}{X}\sum_{k=0}^{k=\infty} \cos\left(\frac{k\pi x}{X} + \frac{\beta(x-X)}{X}\right)\int_c^X f(x') \cos\left(\frac{k\pi x'}{X} + \frac{\beta(x'-X)}{X}\right) dx'$$

in welcher k alle ganzen Zahlen durchläuft.

Setzt man, um die Nenner zu beseitigen,

$$\frac{\pi x}{X} = z,\quad \frac{\pi x'}{X} = z',\quad \frac{\pi c}{X} = c',\quad \frac{\beta}{\pi} = \beta' = \tfrac{1}{2}(n + \tfrac{1}{2}),$$

$$f(x') = f\left(\frac{X}{\pi} z'\right) = \varphi(z'),$$

so hat man die einfachere Form:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{k=\infty} (\cos kz + \beta'(z-\pi))\int_{c'}^{\pi} \varphi(z') \cos(kz' + \beta'(z'-\pi))\, dz'.$$

Auch diese Reihe unterscheidet sich noch von der gewöhnlichen Fourier'schen Reihe, von welcher bekannt ist, dass sie gleichmässig convergirt, solange $\varphi(z')$ eine stetige Function ist, und dass sie gliedweise integrirt werden darf, auch wenn $\varphi(z')$ an einzelnen Stellen eine sprungweise Werthänderung erleidet. Aber die Reihe hat doch schon die Eigenschaft mit der Fourier-schen gemein, dass sie die ganzzahligen Vielfachen der Variabelen enthält; sie lässt sich überdies in einfache Bestandtheile der gewünschten Art zerlegen. Denn sie ist gleich

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_{c'}^{\pi} \varphi(z') \cos(k(z+z') + \beta'(z+z'-2\pi))\, dz'$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_{c'}^{\pi} \varphi(z') \cos(k(z-z') + \beta'(z-z'))\, dz'$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi} \cos\beta'(z+z'-2\pi)\,\varphi(z')\,dz' \sum^{k} \cos k(z+z')$$

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi} \sin\beta'(z+z'-2\pi)\,\varphi(z')\,dz' \sum^{k} \sin k(z+z')$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\cos\beta'(z-z')\,\varphi(z')\,dz'\sum^{k}\cos k(z-z')$$

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\sin\beta'(z-z')\,\varphi(z')\,dz'\sum^{k}\sin k(z-z')\,.$$

Summirt man in bekannter Weise die Sinus- und Cosinus-Summen so folgt

$$\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\cos\beta'(z+z'-2\pi)\,\varphi(z')\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sin(k+\frac{1}{2})(z+z')}{2\sin\frac{z+z'}{2}}\right\}dz'$$

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\sin\beta'(z+z'-2\pi)\,\varphi(z')\left\{\frac{\cos\frac{z+z'}{2}}{2\sin\frac{z+z'}{2}}-\frac{\cos(k+\frac{1}{2})(z+z')}{2\sin\frac{z+z'}{2}}\right\}dz'$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\cos\beta'(z-z')\,\varphi(z')\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sin(k+\frac{1}{2})(z-z')}{2\sin\frac{z-z'}{2}}\right\}dz'$$

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{k=\infty}\int_{c'}^{\pi}\sin\beta'(z-z')\,\varphi(z')\left\{\frac{\cos\frac{z-z'}{2}}{2\sin\frac{z-z'}{2}}-\frac{\cos(k+\frac{1}{2})(z-z')}{2\sin\frac{z-z'}{2}}\right\}dz'.$$

Nur die Integrale, welche von dem variabelen Parameter k abhängig sind, kommen für den geforderten Nachweis in Betracht. Unter diesen sind diejenigen, welche im Nenner die Function $\sin\frac{z+z'}{2}$ enthalten, so geartet, dass dieser Nenner nicht null wird, solange z grösser als 0 und kleiner als π ist. Der Werth dieser Integrale ist demnach (wie aus dem zweiten Mittelwerthsatze zu erkennen ist) gleich $\frac{1}{k}$ multiplicirt mit einer bei allen Werthen von z endlich bleibenden Grösse[1]) und convergirt also gleich-

---

1) Ein Integral von der Form

$$\int f(z,z')\sin kz'\,dz' \quad \text{oder} \int f(z,z')\cos kz'\,dz',$$

in welchem f eine Function der beiden Grössen z und z' bedeutet, die innerhalb des Integrationsintervalles durchaus endlich, kleiner als G bleibt und die immer nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima besitzt,

mässig (unabhängig vom Werthe z) nach null, wenn k unendlich wird.

Das dritte Integral, nämlich

$$\frac{1}{\pi}\int_{c'}^{\pi} \cos\beta'(z-z')\,\varphi(z')\,\frac{\sin(k+\frac{1}{2})(z-z')}{2\sin\frac{z-z'}{2}}\,dz$$

ist das gewöhnliche Dirichlet'sche, welches für $0 < z < \pi$ gleichmässig nach dem Werthe

$$\varphi(z) = f(x)$$

convergirt, so lange die Function $f(x)$ stetig ist, welches also zu einer gleichmässig convergenten Fourier'schen Reihe führt, nach Ausschluss aller der Stellen, an denen $f(x)$ eine sprungweise Aenderung erfährt. Diese Fourier'sche Reihe kann aber auch mit Einschluss dieser Stellen gliedweise integrirt werden, selbst dann noch, wenn sie zuvor mit einer Function multiplicirt ist, welche nicht unendlich wird, und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Denn die durch gliedweise Integration bis in beliebige Nähe einer Unstetigkeitsstelle gewonnene Reihe bleibt unbedingt convergent, auch wenn die Integration bis in die Unstetigkeitsstelle ausgeführt wird.

Im vierten Integral

$$\int_{c'}^{\pi} \sin\beta'(z-z')\,\varphi(z')\,\frac{\cos(k+\frac{1}{2})(z-z')}{2\sin\frac{z-z'}{2}}\,dz'$$

wird der mit dem Cosinus multiplicirte Ausdruck für keinen Werth von z' unendlich, so dass das Integral ebenso wie die ersten beiden mit $\frac{1}{k}$ null wird. Sonach ist bewiesen:

Bedeutet x einen Werth, der zwischen 0 und X liegt, so convergirt die Reihe

$$\sum_{\lambda} U(\lambda x)\,\frac{\int_{c}^{X} U(\lambda x')\,f(x')\,dx'}{\int_{0}^{X} (U(\lambda x'))^2\,dx'} = \sum a_{\lambda}\,U(\lambda x)$$

---

während z' das Integrationsintervall durchläuft, ist durch eine endliche Anzahl von Integralen darstellbar, von denen jedes kleiner ist als $\frac{2}{k}\,G$.

im allgemeinen gleichmässig, so dass ihr Integral in diesem Intervall durch gliedweise Integration erhalten wird, auch wenn man die Reihe zuvor mit einer Function multiplicirt hat, die nicht unendlich wird, und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt.

Nennt man den Werth der Reihe $\varphi(x)$, so ist, wenn δ und ε beliebig kleine Grössen und μ irgend einen Werth unter den Wurzeln λ bezeichnet,

$$\int_\delta^{X-\varepsilon} \varphi(x)\, U(\mu x)\, dx = \sum_\lambda \alpha_\lambda \int_\delta^{X-\varepsilon} U(\lambda x)\, U(\mu x)\, dx .$$

Nach Gleichung 9) ist diese Reihe gleich

$$\alpha_\mu \int_\delta^{X-\varepsilon} (U(\mu x))^2 dx + \sum_\lambda \frac{\alpha_\lambda}{\lambda^2-\mu^2}\left[U(\lambda x)\frac{dU(\mu x)}{dx} - U(\mu x)\frac{dU(\lambda x)}{dx}\right]_\delta^{X-\varepsilon}$$

wobei in der Reihe das eine Glied, für welches $\lambda = \mu$ ist, ausfällt. Diese Reihe aber ist gleichmässig convergent, weil α_λ von der Form $\frac{1}{\lambda}$ multiplicirt mit einer endlich bleibenden Grösse ist, und weil $U(\lambda x)$ durchaus endlich bleibt, $\frac{dU(\lambda x)}{dx}$ aber gleich dem Product von λ mit einer durchaus endlich bleibenden Grösse ist. Demnach kann man ε und δ nach null convergiren lassen, und diesen Grenzprocess gliedweise ausführen; alsdann bekommt die Klammer in allen Gliedern den Werth null, und folglich ist

$$\int_0^X \varphi(x)\, U(\mu x)\, dx = \alpha_\mu \int_0^X (U(\mu x))^2 dx = \int_c^X U(\mu x)\, f(x)\, dx .$$

Nach den in der Einleitung besprochenen Sätzen folgt hieraus, dass die Function $\varphi(x)$ im Innern des Intervalles von c bis X im Allgemeinen gleich $f(x)$ ist, solange nämlich als $f(x)$ stetig bleibt, dagegen im Innern des Intervalles von 0 bis c überall gleich null.

Auch kann man weiter beweisen, dass die Function $\varphi(x)$ an den Sprungstellen von $f(x)$ im Innern des Intervalles von c bis X den Werth $\frac{1}{2}\,(f(x+0) + f(x-0))$ hat, denn sie verhält sich, wie gezeigt, bis auf Reihen die gleichmässig convergiren, und daher stetig sind, wie eine gewöhnliche Fourier'sche Reihe.

III.

Das anfänglich gestellte Problem ist durch diese Betrachtungen noch nicht vollständig erledigt; denn in der nunmehr bewiesenen Formel

$$f(x) = \sum U(\lambda x) \frac{\int_c^X f(x)\, U(\lambda x)\, dx}{\int_0^X (U(\lambda x))^2\, dx} \quad \text{für } c < x < X$$

ist vorausgesetzt, dass c von null verschieden ist; es muss gezeigt werden, dass man für c auch den Werth null einsetzen kann, so dass für alle Werthe $0 < x < X$ die Darstellung von $f(x)$ möglich wird. Zu dem Zwecke genügt es nachzuweisen, dass

$$\sum U(\lambda x) \frac{\int_0^\delta f(x')\, U(\lambda x')\, dx'}{\int_0^X (U(\lambda x))^2\, dx} = \lim_{\lambda_m = \infty} \int_0^\delta f(x')\, dx' \sum^{\lambda_m} \frac{U(\lambda x)\, U(\lambda x')}{\int_0^X (U(\lambda x))^2\, dx}$$

convergent ist, und mit δ beliebig klein gemacht werden kann, dass also die Summe

$$\sum^{\lambda} \frac{U(\lambda x)\, U(\lambda x')}{\int_0^X (U(\lambda x))^2\, dx}$$

bei noch so grosser Anzahl der Glieder endlich bleibt, wenn x' ein Intervall von null an durchläuft, das den Werth x nicht enthält. Von der Function $f(x)$ nehmen wir dabei an, dass sie, auch wenn sie für $x = 0$ unendlich wird, doch absolut integrirbar bleibt. Hierzu aber wird es nothwendig, den Residuensatz von Cauchy anzuwenden[1]).

---

1) Einzig und allein auf Grund dieses Satzes, also in möglichst directer Weise, die aber auch eine lange Reihe von Untersuchungen erfordert, ist der Beweis von der Gültigkeit der Entwickelung nach Cylinderfunctionen von Herrn Dini erbracht worden (Serie di Fourier e altre rappresentazione analytiche delle funzioni di una variabile reale. Pisa 1880, pag. 231—269) und dieser Beweis dürfte wohl der erste vollständige sein, der überhaupt durchgeführt worden ist. Denn die aus dem Nachlasse von Hankel (Math. Annalen Bd. 8) veröffentlichten Untersuchungen, die sich

Dem Werth

$$\frac{U(\lambda x)\,U(\lambda x')}{\int\limits_0^X (U(\lambda x))^2\,dx}$$

lässt sich folgende Form geben. Da in der Function $U(\lambda x)$ die Variabeln λ und x vertauscht werden können, so ist

$$\frac{d^2 U(\lambda x)}{d\lambda^2} + \left(x^2 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^2}\right) U(\lambda x) = 0\ ,$$

$$\frac{d^2 U(\lambda x')}{d\lambda^2} + \left(x'^2 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^2}\right) U(\lambda x') = 0\ ,$$

also

$$U(\lambda x')\,\frac{d^2 U(\lambda x)}{d\lambda^2} - U(\lambda x)\,\frac{d^2 U(\lambda x')}{d\lambda^2} = (x'^2 - x^2)\;U(\lambda x)\;U(\lambda x')$$

oder

---

im wesentlichen gleichfalls auf den Residuensatz stützen, sind noch nicht in allen Punkten klar gelegt und beziehen sich nur auf den Fall $h = \infty$. Der Dini'sche Beweis, den schon früher Herr Schläfli in einer kurzen Note (Math. Ann. Bd. 10) für den Fall $h = \infty$ angedeutet hatte, ist auch von Herrn C. Jordan in etwas anderer Form reproducirt worden (Cours d'Analyse; t. 3, Paris 1887, pag. 445—463).

Cauchy selbst hat mittelst seines Residuensatzes die Entwickelung nach Cylinderfunctionen meines Wissens nicht behandelt; wohl aber hat er einen gültigen Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihe, die bei ihm als ein specieller Fall allgemeinerer Reihen erscheint, erbracht und zwar in der Abhandlung: »Sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies« (Exercices de mathématiques, T. II. 1827). Nicht nur Dirichlet in seiner grundlegenden Arbeit über die Fourier'sche Reihe, sondern viel später nach Bonnet und Riemann, sowie andere geschichtliche Darstellungen erwähnen immer nur den verfehlten Beweis, welchen Cauchy in seiner Abhandlung der Pariser Akademie (Tome VI) im Jahre 1826 vorlegte, während die andere Abhandlung (zwei Jahre älter als die Dirichlet-sche) einen Beweis enthält, der vollständig und genau ist, sobald man nur die Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Function $f(x)$ betont, unter welchen gewisse Umformungen bestimmter Integrale, die bei Cauchy vorkommen, allein und überdies in etwas anderer Form, als es dort geschehen ist, zulässig werden. Diese Voraussetzungen sind aber die bekannten, von Dirichlet angegebenen, dessen Verdienst um die Theorie der Fourier'schen Reihe durch diese historische Thatsache nicht geschmälert wird, da erst durch seine Untersuchungen die Theorie in Zusammenhang gebracht wurde mit allgemeinen ganz neuen Bedingungen für die Convergenz bestimmter Integrale und unendlicher Reihen.

$$16)\qquad U(\lambda x)\, U(\lambda x') = \frac{1}{x'^2 - x^2}\varphi'(\lambda)\,,$$

wenn 7) $\varphi(\lambda) = U(\lambda x')\dfrac{dU(\lambda x)}{d\lambda} - U(\lambda x)\dfrac{dU(\lambda x')}{d\lambda}$ gesetzt wird. Sodann ist (Gleich. 10)

$$2\lambda\int_0^X U^2 dx = \left[\frac{dU}{d\lambda}\frac{dU}{dx} - U\frac{d^2U}{d\lambda\, dx}\right]^X = -U\left[h\frac{dU}{d\lambda} + \frac{d^2U}{d\lambda\, dx}\right]^X.$$

Setzt man

$$\frac{dU}{dx} + hU = \varpi(\lambda, x), \text{ wobei } \varpi(\lambda, X) = 0\,,$$

so ist der obige Ausdruck gleich $-U\varpi'(\lambda)$ für $x = X$. Aber auch die Grösse $U(\lambda X)$ kann durch $\varpi'(\lambda)$ ausgedrückt werden: denn es ist

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\lambda}{x}\frac{dU}{d\lambda} \quad \text{also} \quad \varpi(\lambda) = \frac{\lambda}{x}\frac{dU}{d\lambda} + hU\,,$$

$$18)\quad \varpi'(\lambda) = \frac{1}{x}\frac{dU}{d\lambda} + \frac{\lambda}{x}\frac{d^2U}{d\lambda^2} + h\frac{dU}{d\lambda} = \left(\frac{1}{x} + h\right)\frac{dU}{d\lambda} - \left(\lambda x - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\lambda x}\right)U$$

und für $x = X$ ist dieses gleich

$$\varpi'(\lambda) = -U\left[\frac{h}{\lambda}X\left(\frac{1}{X} + h\right) + \lambda X - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\lambda X}\right],$$

also

$$19)\quad \int_0^X U^2 dx = \frac{(\varpi'(\lambda))^2}{2\left[hX\left(\frac{1}{X} + h\right) + \lambda^2 X - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{X}\right]} = \frac{\varpi'^2 X}{2\psi(\lambda)}$$

wobei

$$20)\qquad \psi(\lambda) = hX(1 + hX) + \lambda^2 X^2 - (n^2 - \tfrac{1}{4})\,.$$

Folglich wird

$$\sum_\lambda \frac{U(\lambda x)\, U(\lambda x')}{\int_0^X (U(\lambda x))^2 dx} = \frac{2}{(x'^2 - x^2)X}\sum_\lambda \frac{\psi(\lambda)\,\varphi'(\lambda)}{(\varpi'(\lambda))^2}\,.$$

Der unter der Summe stehende Ausdruck ist das Residuum von

$$\frac{\psi(z)\,\varphi(z)}{(\varpi(z))^2}\,,$$

denn das Residuum eines Quotienten $\frac{f(z)}{(\varpi(z))^2}$, in welchem der Zähler durchaus endlich bleibt, hat für die verschiedenen Wurzeln $z = \lambda$, für welche $\varpi(z) = 0$ ist, den Werth

$$\frac{f'(\lambda)}{(\varpi'(\lambda))^2} - \frac{f(\lambda)\,\varpi''(\lambda)}{(\varpi'(\lambda))^3}\,.$$

Nun ist $f'(\lambda) = \psi(\lambda)\,\varphi'(\lambda) + \psi'(\lambda)\,\varphi(\lambda)$, aber es wird hier

$$\psi'(\lambda)\,\varpi'(\lambda) - \psi(\lambda)\,\varpi''(\lambda) = 0\,.$$

Denn es ist (Gleich. 18) für jeden Werth von x:

$$\varpi'(\lambda) = \left(\frac{1}{x}+h\right)\frac{dU}{d\lambda} - \left(\lambda x - \frac{n^2-\frac{1}{4}}{\lambda x}\right)U = -\psi(\lambda)U\frac{1}{x\lambda} + \frac{x}{\lambda}\left(\frac{1}{x}+h\right)\varpi(\lambda),$$

also für $x = X$, wobei $\varpi(\lambda) = 0$ wird,

$$\varpi''(\lambda) = -\psi(\lambda)\frac{dU}{d\lambda}\frac{1}{X\lambda} - \psi'(\lambda)\,U\frac{1}{X\lambda} + \psi(\lambda)\,U\frac{1}{X\lambda^2} + \frac{X}{\lambda}\left(\frac{1}{X}+h\right)\varpi'(\lambda)$$

und folglich

$$\frac{\varpi''(\lambda)}{\varpi'(\lambda)} = \frac{1}{U}\frac{dU}{d\lambda} + \frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} + \frac{X}{\lambda}\left(\frac{1}{X}+h\right) = \frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)}\,;$$

weil

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{d\lambda} + \frac{X}{\lambda}h = 0\,.$$

Demnach ist die Reihe

$$\sum_{\lambda}\frac{U(\lambda x)\,U(\lambda x')}{\int_0^X (U(\lambda x))^2\,dx}$$

gleich dem Werthe, nach welchem das complexe Integral

$$\frac{2}{(x'^2-x^2)X}\int\frac{\psi(z)\,\varphi(z)}{(\varpi(z))^2}\,dz$$

convergirt, wobei

$$\varphi(z) = U(zx')\frac{dU(zx)}{dx} - U(zx)\frac{dU(zx')}{dx}\,,$$

$$\psi(z) = hX\,(1+hX) + z^2X^2 - (n^2-\tfrac{1}{4})\,,$$

wenn dasselbe über den Rand eines Rechteckes erstreckt wird, welches die reelle positive Axe in seinem Innern enthält, also etwa

die Eckpunkte $x = 0$, $y = \pm ik$; $x = l$, $y = \pm ik$ besitzt, und wenn man dieses Rechteck schliesslich in die Halbebene übergehen lässt, indem h und k unendlich werden[1]).

Es ist also zu zeigen, dass der Betrag dieses Integrales endlich bleibt, wie gross auch immer die Werthe von h und k angenommen werden. Da in dem Integrale der Zähler eine ungerade Function wird, so kommt der Integrationsweg auf der Ordinatenaxe nicht in Betracht.

Nun ist (Gleich. 12)

$$U^n(zx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(zx - \beta)(1 + A) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(zx - \beta)B ,$$

wobei die Grössen A und B bezüglich von der zweiten und von der ersten Ordnung null werden für $z = \infty$. Hieraus folgt:

$$\frac{dU^n(zx)}{dx} = -\frac{z}{\sqrt{\pi}}\sin(zx - \beta)(1 + C) + \frac{z}{\sqrt{\pi}}\cos(zx-\beta)D,$$

wobei C und D von der zweiten und ersten Ordnung null werden für $z = \infty$. Demnach wird

$$\omega(z) = \frac{dU}{dx} + hU = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(zX - \beta)\{h + hA + zD\}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(zX - \beta)(hB - z - zC) .$$

Betrachtet man nun das Integral auf den zur Abscissenaxe parallelen Seiten, für welche $z = \xi \pm ik$, so ist der Modul von $\omega(z)$ gleich dem Werthe

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{kX} \bmod z \cdot g ,$$

wobei g eine endliche Grösse bezeichnet, die auch bei beliebig grossen Werthen von z weder null noch unendlich wird. Dagegen ist im Zähler des Integrales der Modul von

$$\varphi(z) = U(zx')\frac{dU(zx)}{dx} - U(zx)\frac{dU(zx')}{dx}$$

---

1) Von einem Integrale dieser Form geht auch Herr DINI bei seinen Untersuchungen aus (a. a. O. pag. 250), nur dass dort die Function $P^n(\lambda x)$ zu Grunde gelegt ist, welche mit U durch die Gleichung zusammenhängt

$$P^n(\lambda x) = \frac{2^{n+\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)}{(\lambda x)^{n+\frac{1}{2}}} U^{(n)}(\lambda x) .$$

gleich $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{k(x+x')} \bmod (z) \cdot g_1$, wobei g_1 durchaus endlich bleibt. Ferner ist der Modul von $\psi(z)$ proportional dem Modul von z^2. Hieraus folgt, dass der Modul des unter dem Integrale stehenden Quotienten proportional $e^{-k(2X-(x+x'))}$ ist. Lässt man also k unendlich werden, während l endlich bleibt, so wird dieser Ausdruck null.

Für die zur Ordinatenaxe parallele Seite $z = l + i\eta$ (und analog für $z = l - i\eta$) wähle man den Werth l so, dass $lX - \beta$ stets gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ wird, also

$$\sin (zX - \beta) = \pm \cos i\eta X \ , \qquad \cos (zX - \beta) = \pm \sin i\eta X \ .$$

Alsdann wird der Modul von $\omega(z)$ bei allen positiven Werthen von η gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\eta X} \bmod (z) \, . \, g \, ,$$

wobei die Grösse g endlich bleibt und nicht null wird, auch für $\eta = \infty$. Die Grösse g bleibt endlich, auch wenn l unendlich wird, sie convergirt nach dem Werthe $\frac{1}{2}$. Da nun wiederum der Modul von $\varphi(z)$ gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\eta(x+x')} \bmod (z) \, . \, g_1$$

und der Modul von $\psi(z)$ proportional dem Modul von z^2 ist, so ist der Modul des Integrales zwischen den Grenzen $\eta = 0$ und $\eta = + i\infty$ eine durchaus endliche Grösse; dasselbe gilt auch von dem Integrale zwischen den Grenzen $\eta = 0$ und $\eta = - i\infty$, und bleibt in beiden Fällen bestehen, auch wenn l unendlich wird.

Damit ist die Reihendarstellung in vollem Umfange bewiesen.

Bezeichnet $f(x)$ eine Function, die bis auf einzelne Sprungstellen im Intervall von 0 bis X durchaus stetig ist, die, wenn sie an der Grenze null unendlich wird, doch absolut integrirbar bleibt, und welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, so ist für $n \geqq 0$

$$f(x) = \sum_{\lambda} U^{(n)}(\lambda x) \frac{\int_0^X f(x)\, U^{(n)}(\lambda x)\, dx}{\int_0^X (U^n(\lambda x))^2\, dx},$$

also auch

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \sum_{\lambda} J^n(\lambda x) \frac{\int_0^X \sqrt{x} f(x)\, J^{(n)}(\lambda x)\, dx}{\int_0^X (J^n(\lambda x))^2 x\, dx}.$$

Setzt man $f(x) = \sqrt{x}\, F(x)$, so ist auch

$$F(x) = \sum_{\lambda} J^n(\lambda x) \frac{\int_0^X x F(x)\, J^n(\lambda x)\, dx}{\int_0^X (J^n(\lambda x))^2 x\, dx}.$$

An Stelle der DIRICHLET'schen Bedingung für die Function $f(x)$ können auch andere treten, so z. B. dass die Function $f(x)$ einen überall endlichen integrirbaren Differentialquotienten besitzt. Auch kann man in analoger Weise die Entwickelung nach Functionen mit negativen Index n in Betracht ziehen.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Fig. 1.

Fig. 2.

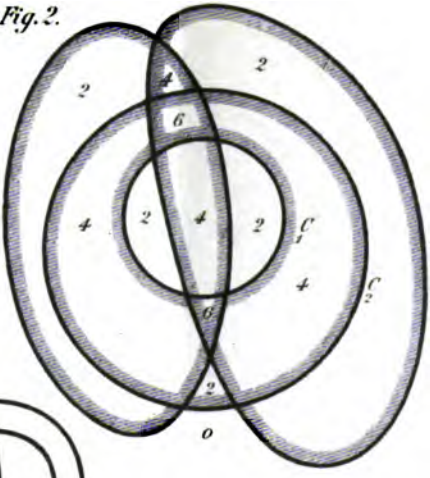


Fig. 3.

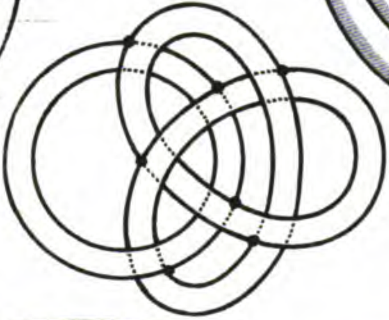


Fig. 4.

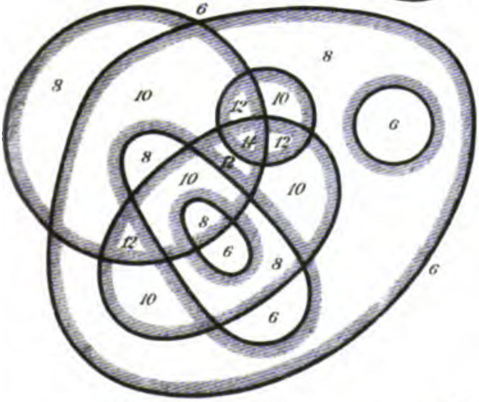


Fig. 5.

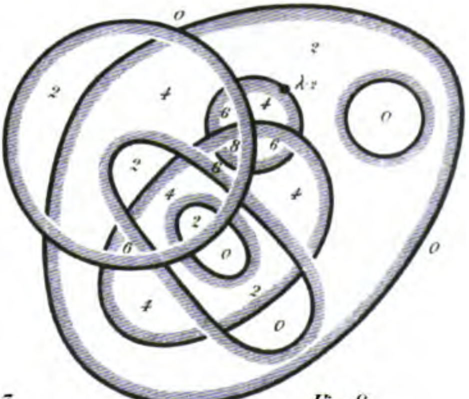


Fig. 6.

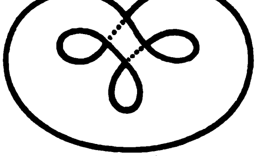


Fig. 7.

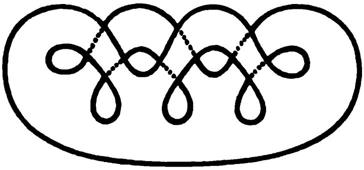
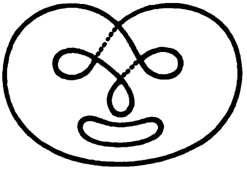


Fig. 8.



Berichte der K.S. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 1887.
Zur Abhandlung von W. Dyck.

also au

Setzt

A
$f(x)$ k
einen
sitzt.
Functi

Sitzungsberichte der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig.
Band XXXIX. 1887 Heft I. II.

Lichtdruck von Julius Klinkhardt Leipzig.

Kantengerölle aus der Galalawüste.

INHALT.

Seite

H. Bruns, Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems. I. Mittheilung 1

Walther Dyck, Beiträge zur Analysis situs. III. Mittheilung. Vorgelegt von A. Mayer. (Mit 1 lithogr. Tafel) . . . 40

O. Schlömilch, Ueber eine Entwickelung des Logarithmus . 53

H. Bruns, Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems. II. Mittheilung 55

Sophus Lie. Die Begriffe Gruppe und Invariante 83

Friedrich Engel, Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. Vorgelegt von S. Lie 89

J. Thomae, Bemerkung über Thetafunktionen vom Geschlecht 3 100

David Hilbert, Ueber die Büschel von binären Formen mit der nämlichen Funktionaldeterminante. Vorgelegt von A. Mayer 112

A. Mayer, Ueber ein Bewegungsproblem 123

Johannes Walther, Die Entstehung von Kantengeröllen in der Galalawüste. Vorgelegt von H. Credner. (Mit 1 Tafel) 133

Ed. Study, Ueber den Begriff der Invariante algebraischer Formen. Vorgelegt von A. Mayer 137

C. Neumann, Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper 153

Axel Harnack, Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function durch die Fourier-Bessel'schen Functionen . . 191

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

498 – 12

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH - PHYSISCHE CLASSE.

VIERZIGSTER BAND.

1888.

MIT ZEHN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

INHALT.

Seite

W. Scheibner, Mathematische Bemerkungen. (Auszüge aus Briefen an Prof. BALTZER.) 1

Sophus Lie, Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie . . 14

C. Neumann, Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper. Zweiter Artikel. (Mit 5 Figuren). 22

W. G. Hankel, Das elektrodynamische Gesetz ein Punktgesetz. (Mit 5 Figuren) 89

E. Drechsel, Ueber Elektrolyse des Phenols mit Wechselströmen. 110

C. Neumann, Ueber die Stetigkeit mehrdeutiger Functionen . . . 120

Richard Schumann, Ueber den Gang der Pendeluhr F. Dencker XII. 124

W. Scheibner, Die complexe Multiplication der Thetafunctionen. 154

C. Neumann, Ueber das Verhalten der Green'schen Function an der Grenze ihres Gebietes 163

HARVARD COLLEGE
APR 25 1889
LIBRARY

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts *Carl Friedrich von Gerber.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Friedrich Zarncke* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1890.
Professor *Adolf Ebert* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1890.
Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Professor *Friedrich Carl Brugmann* in Leipzig.
—— *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *Georg Ebers* in Leipzig.
—— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
Professor *Hans Georg Conon von der Gabelentz* in Leipzig.
—— *Georg Götz* in Jena.
Geheimer Hofrath *Gustav Hartenstein* in Jena.

Geheimer Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.
Professor *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden.
Oberbibliothekar *Reinhold Köhler* in Weimar.
Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
Professor *August Leskien* in Leipzig.
—— *Hermann Lipsius* in Leipzig.
—— *Wilhelm Maurenbrecher* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pertsch* in Gotha.
Professor *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Anton Springer* in Leipzig.
—— —— *Georg Voigt* in Leipzig.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig.
Professor *Ernst Windisch* in Leipzig.
—— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Professor *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Erwin Rohde* in Heidelberg.
Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Ludwig* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1889.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1889.
Professor *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Christian Wilhelm Braune* in Leipzig.
Professor *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Oberbergrath *Hermann Credner* in Leipzig.

Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hans Bruno Geinitz* in Dresden.
Professor *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Wilhelm His* in Leipzig.
Professor *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
Professor *Sophus Lie* in Leipzig.
— *Carl Neumann* in Leipzig.
— *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
— *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
Hofrath *Rudolf Wilhelm Schmitt* in Dresden.
Professor *Johannes Thomae* in Jena.
Geheimer Hofrath *August Töpler* in Dresden.
— — *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
Professor *Johannes Wislicenus* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Edmund Drechsel* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Professor *Felix Klein* in Göttingen.
— *Adalbert Krüger* in Kiel.
— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Archivar:

Oberbibliothekar *Joseph Heinrich Gustav Ernst Förstemann* in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Johann Paul von Falkenstein 1882.
Karl August Wilhelm Eduard von Wietersheim 1865.

Philologisch-historische Classe.

Eduard Albrecht 1876.
Christoph Friedrich von Ammon 1850.
Wilhelm Adolf Becker 1846.
Hermann Brockhaus 1877.
Conrad Bursian 1883.
Georg Curtius 1885.
Johann Gustav Droysen 1884.
Heinrich Leberecht Fleischer 1888.
Gustav Flügel 1870.
Friedrich Franke 1871.
Hans Conon von der Gabelentz 1874.
Ernst Gotthelf Gersdorf 1874.
Carl Göttling 1869.
Hermann Alfred von Gutschmid 1887.
Gustav Hänel 1878.
Ferdinand Hand 1851.
Friedrich Christian August Hasse 1848.
Moritz Haupt 1874.
Gottfried Hermann 1848.
Friedrich Jacobs 1847.
Otto Jahn 1869.
Ludwig Lange 1885.
Carl Joachim Marquardt 1882.
Andreas Ludwig Jacob Michelsen 1881.
Carl Nipperdey 1875.
Carl von Noorden 1883.
Oscar Ferdinand Peschel 1875.
Ludwig Preller 1861.
Friedrich Wilhelm Ritschl 1876.
August Schleicher 1868.
August Seidler 1851.
Gustav Seyffarth 1885.
Carl Bernhard Stark 1879.
Johann Ernst Otto Stobbe 1887.
Friedrich Tuch 1867.
Friedrich August Ukert 1851.
Wilhelm Wachsmuth 1866.
Carl Georg von Wächter 1880.
Anton Westermann 1869.

Mathematisch-physische Classe.

Heinrich d'Arrest 1875.
Heinrich Richard Baltzer 1887.
Ludwig Albert Wilhelm von Bezold 1868.

Carl Bruhns 1881.
Carl Gustav Carus 1869.
Julius Cohnheim 1884.
Johann Wolfgang Döbereiner 1849.
Otto Linné Erdmann 1869.
Gustav Theodor Fechner 1887.
Otto Funke 1879.
Peter Andreas Hansen 1874.
Axel Harnack 1888.
Wilhelm Hofmeister 1877.
Emil Huschke 1858.
Hermann Kolbe 1884.
Gustav Kunze 1851.
Carl Gotthelf Lehmann 1863.
Bernhard August von Lindenau 1854.
Richard Felix Marchand 1850.
Georg Mettenius 1866.
August Ferdinand Möbius 1868.
Carl Friedrich Naumann 1873.
Eduard Pöppig 1868.
Ferdinand Reich 1882.
Theodor Scheerer 1875.
Matthias Jacob Schleiden 1881.
Christian Friedrich Schwägrichen 1853.
Ludwig Friedrich Wilhelm August Seebeck 1849.
Samuel Friedrich Nathanael von Stein 1885.
Alfred Wilhelm Volkmann 1877.
Eduard Friedrich Weber 1871.
Ernst Heinrich Weber 1878.
Johann Carl Friedrich Zöllner 1882.

Leipzig, am 31. December 1888.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1888 eingegangenen Schriften.

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1887. Berlin 1888.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1887, No. 40—54. 1888, No. 1—37. Berlin 1888.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 15. 16. Berlin 1887. 88.

Die Venus-Durchgänge 1874 und 1882. Bericht über die deutschen Beobachtungen. Im Auftrage der Commission für die Beobachtung des Venus-Durchgangs hsg. v. *A. Auwers*. Bd. 3. Berlin 1888.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XX, No. 18. 19. Jahrg. XXI, No. 1—17. Berlin 1887. 88.

Die Fortschritte der Physik im J. 1882 (Jahrg. 38), Abth. 1—3. Dargestellt von d. Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1887. 88.

Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin im Jahre 1887 (Jahrg. 6). Berlin 1888.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 1 (1887), No. 1—25. 26b. Jahrg. 1888, No. 1. 4—18. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 1887/88, No. 4. 8—20. Berlin 1887. 88.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geologischen Landesanstalt und Bergakademie zu Berlin f. d. J. 1886. Berlin 1887.

Abhandlungen zur geolog. Specialkarte von Preussen und den Thüringischen Staaten. Bd. VI, H. 4. VIII, H. 3. Nebst Atlas zu VI, 4. Berlin 1888.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 84—86. Bonn 1887. 88.

Fünfundsechzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1887. Breslau 1888.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Institutes. Jahrg. 4 (1886), Lief. 2 (Abth. 3). Jahrg. 5 (1887), Abth. 1. 2 (Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen i. J. 1887, 1. Hälfte). Chemnitz 1888.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N.F. Bd. 7, H. 1. Danzig 1888.

Lissauer, A., Die prähistorischen Denkmäler der Provinz Westpreussen u. d. angrenzenden Gebiete. Mit Unterstütz. des Westpreuss. Provinzial-Landtages hrsg. von d. Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Leipzig 1887.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. 32 (1886), Supplementheft II. Jahrg. 33 (1887), H. 1—4. Dresden 1887. 88.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1887—88. Dresden 1888.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1887, Juli—Dec. Jahrg. 1888, Jan.—Juni. Dresden 1888.

Kgl. Sächsisches Polytechnikum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr 1887/88, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1888. — Programm f. d. Studienjahr, bez. Wintersem. 1888/89.

43—46. Jahresbericht der Pollichia, eines naturwissenschaftl. Vereines der Rheinpfalz. Dürkheim 1888.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. H. 19 (Oct. 1886—Mai 1887). Erlangen 1887. Jahrg. 1887. München 1888.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1888. Freiberg 1888.

Verzeichniss d. Vorlesungen auf der Grossherz. Hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen, Sommer 1886, Winter 1886/87, S. 1887, W. 1887/88, S. 1888, W. 1888/89. Personalbestand S. 1886, W. 1886/87, S. 1887, W. 1887/88, S. 1888. *Eckhard, C.*, Ein Beitrag z. Lehre von dem Vorkommen gehörnter weiblicher Rehe (Progr.). Giessen 1886. *Hess, R.*, Ueber Waldschutz und Schutzwald (Akad. Festrede). Giessen 1888. *Hoffmann, H.*, Phänologische Untersuchungen (Progr.). Giessen 1887. *Kattenbusch, F.*, Ueber religiösen Glauben im Sinne des Christenthums (Akad. Festrede). Giessen 1887. *Ropp, G. Frhr. v. der*, Deutsche Kolonien im 12. u. 13. Jhd. (Akad. Festrede). Giessen 1886. 36 Dissertationen vom J. 1886/87, 35 vom J. 1887/88.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 63, H. 2. Bd. 64, H. 1. Görlitz 1888.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 34. Göttingen 1887.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1887. Göttingen 1887.

Bericht über die im Jahr 1887 den Herzogl. Sammlungen zugegangenen Geschenke. Gotha 1888.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1887/88. Grimma 1888.

Leopoldina. Amtl. Organ d. kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. XXIII, No. 21—24. H. XXIV, No. 1—22. Halle 1888.

Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. 17, H. 1. 2. Halle 1888.

Bericht über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle im J. 1887. Halle 1888.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 4. Folge Bd. 6, 1887 (d. ganzen Reihe 60. Bd.), H. 5. Halle 1887.

34—37. Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover f. d. Geschäftsjahre 1883—87. Hannover 1888.

Chronik der Universität zu Kiel f. d. J. 1887/88; Verzeichniss d. Vorles. Winter 1887/88, Sommer 1888. *Brockhaus, Friedr.*, Ueber das canonische Recht. Rede beim Antritt des Rektorates. *Förster, Rich.*, Rede zur Feier des Gedächtnisses weiland Sr. Maj. des Deutschen Kaisers Wilhelm I. gehalten am 22. März 1888. *Blass, F.*, Rede zur Feier des Gedächtnisses weiland Sr. Maj. des Deutschen Kaisers Friedrich III. gehalten am 30. Juni 1888. *Förster, Rich.*, De Aristotelis quae feruntur Secretis secretorum (Progr.). Kiel 1888. — 71 Dissertationen vom J. 1887/88.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1887, H. 1—9. Berlin 1888.

Lamp, E., Das Aequinoctium für 1860.0 abgeleitet aus den v. C. F. Pape am Meridiankreise der Altonaer Sternwarte 1859—62 angestellten Sonnenbeobachtungen (Publication d. Sternwarte in Kiel, hrsg. v. *A. Krüger*). Kiel 1882.

Kreutz, Hnr., Untersuchungen über das Cometensystem 1843 I, 1880 I u. 1882 II. Th. 1: Der grosse Septembercomet 1882 II (Publication d. Sternwarte in Kiel, hrsg. v. *A. Krüger*). Kiel 1888.

Schriften der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 28 (1887). Königsberg 1888.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. 22, H. 4. Jahrg. 23, H. 1. 2. Leipzig 1887. 88.

Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte u. Alterthumskunde. Bd. 5, H. 3. Lübeck 1888.

Jahresbericht u. Abhandlungen des Naturwissenschaftl. Vereins in Magdeburg 1887. Magdeburg 1888. Nebst Beilage: *Hintzmann, E.*, Das Innere der Erde. Vortrag. Magdeburg 1888.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1887—Juli 1888. Meissen 1888.

Abhandlungen der histor. Classe d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 18 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 60. Bd.), Abth. 1. München 1888.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 16 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 56. Bd.), Abth. 2. München 1887.

Abhandlungen d. philos.-philolog. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 18 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 61. Bd.), Abth. 1. München 1888.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1887, H. 3. Jahrg. 1888, H. 1. 2. München 1888.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1887, Bd. 2, H. 3. Jahrg. 1888, H. 1. 2. München 1888.

Meier, Karl, Ueber historische Dramen der Römer. Festrede gehalten in d. öffentl. Sitzung der k. bayer. Acad. d. Wiss. am 15. Nov. 1887. München 1887.

Monumenta Tridentina. Beiträge zur Geschichte des Concils von Trient, von *A. v. Druffel*. H. 3. München 1887.

Bauernfeind, C. M. v., Das Bayerische Präcisions-Nivellement. 7. Mittheilung. München 1888.

Neunundzwanzigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1888.

Sitzungsberichte der Gesellschaft f. Morphologie u. Physiologie in München. Bd. 3 (1887), H. 1—3. Jahrg. 1888, H. 1. München 1887. 88.

15. Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins f. Wissenschaft u. Kunst für 1886. 16. Jahresbericht für 1887. Münster 1887. 88.

Die Kunst- u. Geschichtsdenkmäler der Provinz Westfalen. Hsg. vom Westfäl. Provinzial-Verein f. Wissensch. u. Kunst. Stück II: Kreis Warendorf. Münster 1886.

Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1887. Nürnberg 1888. Nebst einer Beilage: Festschrift zur Begrüssung des XVIII. Kongresses der Deutschen anthropologischen Gesellschaft zu Nürnberg. Nürnberg 1887.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Bd. 2, H. 1 (Jahrg. 1887). — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Bd. 2, H. 3 (Jahrg. 1887). — Katalog der im Germanischen Museum befindlichen vorgeschichtlichen Denkmäler (Rosenberg'sche Sammlung). Nürnberg 1887.

26—28. Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereins f. Naturkunde in d. Vereinsjahren vom 7. Mai 1884—11. Mai 1887. Offenbach a. M. 1888.

Zeitschrift der historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 3, H. 1—4. Posen 1887. 88.

Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Stettin. 1887. Stettin 1888.

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. Hsg. v. d. Kgl. Statist. Landesamt. Jahrg. 10 (1887), H. 1—4. Stuttgart 1887. 88.

Münster-Blätter. Im Auftrag des Münster-Comités hsg. v. *A. Beyer* u. *F. Pressel*. Heft 5. Nebst Beilage. Ulm 1888.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Jahrg. 1887. Würzburg 1887.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. 21. Würzburg 1888.

Oesterreich-Ungarn.

Rad Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti [Agram]. Knjiga 83, II. 86—90. U Zagrebu 1887. 88.

Ljetopis Jugoslavenske Akad. znanosti i umjetnosti. Druga svezka (1877—87). U Zagrebu 1887.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. Godina X, Br. 1—4. U Zagrebu 1888.

Magyar tudom. Akadémiai Almanach, 1888-ra. Budapest 1887.

A Magyar tudom. Akadémia Emlékbeszédek. Köt. 4, Sz. 6—10. Budapest 1887.

A Magyar tudom. Akadémia Értésitője. Évfoly. 21 (1887), Sz. 4—8. 22 (1888), Sz. 1. Budapest 1887. 88.

A Magyar tudom. Akadémia Évkönyvei. Köt. 17, D. 5. Budapest 1887.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausgeg. Bd. 5. Budapest 1887.

Ungarische Revue. Mit Unterst. d. Ungar. Akad. d. Wiss. herausgeg. 1887, (Jahrg. 7), H. 8—10. 1888, H. 1—6. Budapest 1887—88.

Értekezések a mathematikai tudományok köréből. Köt. 13, Sz. 3. Köt. 14, Sz. 1. Budapest 1887.

Értekezések a nyelv- és széptudományok köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akadémia. Köt. 14, Sz. 1—7. Budapest 1887.

Értekezések a természettudományok köréből. Köt. 16, Sz. 7. Köt. 17, Sz. 2—5. Budapest 1887.

Archaeologiai Értesitö. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Uj Folyam, Köt. 7, 3—5. 8, 1. 2. Budapest 1887. 88.

Mathematikai és természettudományi Értesitö. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 5, 6—9. 6, 1. Budapest 1887.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 22, 1—8. Budapest 1886—88.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 20, 3. Budapest 1887.

Monumenta Hungariae historica. Osztály I. Köt. 27 (Diplomatarium Alvinczianum. Köt. 3). Budapest 1887.

Monumenta Hungariae historica. Sectio III. Monumenta comitialia regni Transsylvaniae. T. 12. Budapest 1887.

Régi magyar Nyelvemlékek. Kiadta a Magyar tudom. Akad. Köt. 4, 2. Köt. 5. Budapest 1888.

Nyelvemléktár. Régi magyar codexek. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 9, 1. Köt. 10, 2. Budapest 1888.

Ballagi, A., Colbert. I. rész. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Budapest 1887.

Bayer, J., A nemzeti Játékszín története. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 1. 2. Budapest 1887.

Gelcich, J., Diplomatarium relationum reipublicae Ragusanae cum regno Hungariae. Budapest 1887.

József Föherczeg, Csigány nyelvtan. Budapest 1888.

Kúnos, J., Oszmán-Török népköltési gyüjtemény. Köt. 1: Oszmán-Török népmesék. Budapest 1887.

Marczali, H., Magyarország története II. József korában. Köt. 3. Budapest 1888.

Péch, A., Alsó Magyarország bányamivelésének története. Köt. 2. Budapest 1887.

Pesty, F., Magyarország helynevei. Köt. 1. Budapest 1888.

Simonyi, Zsigm., A magyar határozók. Köt. 1, Fele 1. Budapest 1888.

Szádeczky, L., Izabella és János Zsigmond Lengyelországban 1552—56. Budapest 1888.

Thanhoffer, L., Adatok a központi idegrendszer szerkezetéhez. Budapest 1887.

Wenzel, G., Magyarország mezögazdaságának története. Budapest 1887.

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1888, Winter-Sem. 1888/89. — Uebersicht der akad. Behörden im Studienjahr 1888/89.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. Heft 36. Graz 1888.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. Heft 31. 32. Innsbruck 1887. 88.

Berichte des naturwiss.-medizinischen Vereines in Innsbruck. Jahrg. 16 (1886/87). 17. (1887/88). Innsbruck 1887. 88.

Spisův poctěných jubilejní cenou Král. Česk. Společnosti nauk v Praze. Číslo 1. V Praze 1887.

Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag. Vereinsj. 1887. Prag 1888.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1887. Jahrg. 48. Prag 1888.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1888—89. — Ordnung d. Vorlesungen im Wintersem. 1888/89.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 26, No. 1—4. Prag 1887. 88.

Lotos. Jahrbuch f. Naturwissenschaft. Im Auftrag des Vereines »Lotos« herausg. N. F. Bd. 9 (der ganzen Reihe Bd. 37). Prag 1889.

Bulletino di archeologia e storia dalmata. Anno 10 (1887), No. 12. Anno 11 (1888), No. 1—11. Spalato 1887. 88.

Almanach der Kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Jahrg. 37. 1887. Wien 1887.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 1887, No. 26—28. Jahrg. 1888, No. 1—24.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 71, 1. u. 2. Hälfte. Bd. 72, 1. Hälfte. Wien 1887. 88.

Denkschriften der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 53. Wien 1887.

Denkschriften der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 36. Wien 1888.

Mittheilungen der Prähistorischen Commission der kaiserl. Akad. d. Wissensch. No. 1. 1887. Wien 1888.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturw. Cl. Bd. 95 (1887), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 3—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 96 (1887), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Wien 1887. 88.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 114 (1887), Heft 2. Bd. 115 (1887). Wien 1887. 88.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. 1887, III. u. IV. Quartal. 1888 (Bd. 38), I. u. II. Quartal. Wien 1887. 88.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums. Bd. 3, No. 1—4. Wien 1888.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 11, Abth. 2. Wien 1887.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1887 (Bd. 37), H. 2—4. Jahrg. 1888 (Bd. 38), H. 1—3. Wien 1888.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1887, No. 9—18. Jahrg. 1888, No. 1—14.

Belgien.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. T. 42 (IV. Sér. T. 2). 43. Anvers 1887. — Bulletin (IV. Sér. des Annales), No. 10—16. Anvers 1887. 88.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 31. Bruxelles 1887.

Annales de la Société R. malacologique de Belgique. T. 3 (Année 1868) — 9, I. II. 10—15, I. 16 (III. Sér. T. 1) — 21 (IV. Sér. T. 1). Bruxelles 1868—86.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1887, No. 2. 3. 1888, No. 1. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Histor. og philos. Afd. 6. Række, Bd. 2, No. 1. Kjøbenhavn 1888.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturvid. og mathemat. Afd. 6. Række. Bd. 4, No. 4—7. Kjøbenhavn 1887. 88.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 6, P. 3. Cambridge 1887.

Royal Irish Academy. Cunningham Memoirs. No. 4. Dublin 1887.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. II. Vol. 2 (Polite literature and antiquities), Nr. 8. Vol. 4 (Science), No. 6. Dublin 1888.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 29, P. 1—4. Dublin 1887. 88.

List of the papers published in the Transactions, Cunningham Memoirs, and Irish Manuscript Series, of the R. Irish Academy, between the years 1786 and 1886. Dublin 1887.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. N. Ser. Vol. 5, P. 7. 8. Vol. 6, P. 1. 2. Dublin 1887. 88.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Ser. II. Vol. 3, No. 14. Vol. 4, No. 1. Dublin 1887. 88.

Journal of the R. Geological Society of Ireland. Vol. 17 (N. Ser. Vol. 7), P. 2. Dublin 1887.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol. 9, P. 2. (Session 1886/87). Edinburgh 1887.

Proceedings of the Liverpool Biological Society. Vol. 1 (Session 1886/87). 2 (1887/88). Liverpool 1887. 88.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XLIII, No. 260—265. Vol. XLIV, No. 266—272. London 1887. 88.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1887. Vol. 178, A. B. London 1888.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. 49, P. I. London 1888.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 12, No. 172—175. Vol. 13, No. 184. 185. Vol. 18, No. 301—304. Vol. 19, No. 305—327. London 1881. 82. 87. 88. — List of members 10th Nov. 1887. London 1887.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Ser. II. 1887, P. 6a. 1888, P. 1—6. London 1888.

Report on the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger, 1873—76. Zoology, Vol. 23. Vol. 24, Text and Plates. Vol. 25—28. London 1888.

Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester. III. Ser. Vol. 10. London 1887.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 25. 26. Manchester 1886. 87.

Frankreich.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. III. Série. T. 2, Cahier 2, et Append. 3 (*Rayet*, Observations pluviométriques, Juin 1885—Mai 1886). T. 3, Cahier 1. Paris 1886.

Mémoires de la Société Nationale des sciences naturelles de Cherbourg. T. 25 (III. Série, T. 5). Paris 1887.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. T. 8, Fasc. 1 (Année 1886/87). — Mémoires de la section des sciences. T. 11, Fasc. 1 (Année 1885/86). Paris 1887.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg). Sér. II. T. 8, Fasc. 20. Année 19 (1886). T. 9. Fasc. 21. Année 20 (1887). Paris 1887. 88.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1887. Paris 1888.

Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, publ. sous l'autorité du Comité international, T. 6. Paris 1888.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 57. Paris 1887.

Mission scientifique du Cap Horn, 1882—83. T. 1: Histoire du voyage, p. *L. F. Martial*. T. 4: Géologie, p. *Hyades*. T. 6: Zoologie. Arachnides, p. *E. Simon*. Paris 1887. 88.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 15, No. 7. T. 16, No. 1—4.

Holland und Luxemburg.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1886. 1887.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. Deel XVII. Afdeel. Natuurkunde. Deel XXVI. Amsterdam 1888.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. III. Reeks, Deel 4. Afdeel. Natuurkunde. III. Reeks, Deel 3. 4. Amsterdam 1887. 88.

Catalogus der verzamelingen Bilderdijk en van Lennep, aanwezig in de boekerij der Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Amsterdam 1887.

Matris querela. Esther. Carmina probata in certamine Hoeufftiano ab Acad. R. disciplinarum Neerlandica. Amstelod. 1887.

Susanna. Me puero. Ad urbem Bononiam. Carmina probata in certamine Hoeufftiano ab Acad. R. disciplinarum Neerlandica. Amstelod. 1888.

Programma certaminis poetici ab Acad. R. disciplinarum Nederlandica ex legato Hoeufftiano in annum 1889 indicti. Amstelod. 1888.

Genootschap ter bevordering der natuur-, genees- en heelkunde te Amsterdam. Auszug aus dem Programm 1887.

Bijdragen tot de Dierkunde, uitg. door het Genootschap »Natura artis magistra« te Amsterdam. Aflev. 14—16. Amsterdam 1887. 88. — Feestnummer uitgeg. bij gelegenh. van het 50 j. bestaan van het Genootschap. Amsterdam 1888.

Annales de l'École Polytechnique de Delft. T. 3, Livr. 4. T. 4, Livr. 1. 2. Leide 1888.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 22, Livr. 4. 5. T. 23, Livr. 1. Harlem 1888.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes, p. p. la Société Hollandaise des sciences. T. I. La Haye 1888.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging [Leiden]. Ser. II. Deel 5, St. 2. Nijmegen 1888.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1888.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. N. Ser. 46—50. Utrecht 1887. 88.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1887, No. 48 e Indici. 1888, No. 49—71. Firenze 1887. 88.

Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Vol. 2, No. 4—6 e Indice. Vol. 3, No. 1—4. Roma 1888.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e politiche. Vol. 18 (Ser. III, 9), Fasc. 1. Milano 1887. — Classe di scienze matem. e naturali. Vol. 16 (Ser. III, 7), Fasc. 2. Milano 1888.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 20. Milano 1887.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Ser. II. Vol. 5. Modena 1887.

Atti della R. Accademia di scienze morali e politiche di Napoli. Vol. 21. 22. Napoli 1887. 88.

Società Reale di Napoli. Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accademia di scienze morali e politiche. Anno 26 (1887). Napoli 1887.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 1—4. Padova 1885—88.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 1 (1884—87). T. 2 (1888), Fasc. 1—6. Palermo 1887. 88.

Giornale di scienze naturali ed economiche, pubbl. p. cura della Società di scienze naturali ed economiche di Palermo. Vol. 18 (Anno 1887). Palermo 1887.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Della Serie Vol. 9 (Filosofia e filologia, Vol. 5). Pisa 1888.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie, Vol. 9. Pisa 1888.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 6, adunanza del 13. Nov. 1887, 15. Genn., 1. Luglio 1888.

Annuario della R. Accademia de' Lincei, 1888. Roma 1888.

Atti della R. Accademia dè' Lincei. Serie II. Memorie. Vol. 4. Roma 1887. — Serie III. Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 12. Roma 1884. — Serie IV. Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 3, P. 2 (Notizie degli scavi, 1887, Genn. — Novembre). Roma 1887. — Rendiconti. Vol. 3, II. Sem., Fasc. 6—13. Vol. 4, I. Sem., Fasc. 1—13. II. Sem., Fasc. 1—5. Roma 1887. 88.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bullettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 2, H. 4. Bd. 3, H. 1—3. Rom 1887. 88.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXIII, Disp. 1—15. Torino 1888.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie II. T. 38. Torino 1888.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. T. 5, Disp. 2—9. Venezia 1886/87.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. 22, P. 3. Venezia (1887).

Temi di premio proclamati dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti nella solenne adunanza del 20. maggio 1888.

Russland.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat. Bd. 5, S. 73—112 (Dorpat 1887. 88).

Weihrauch, K., Privatbeobachtungen der Regenstation Alswig i. J. 1886 (Sep.-A.). Dorpat 1887.

Schriften herausgeg. von d. Naturforscher-Gesellschaft bei d. Universität Dorpat. IV: *Weihrauch, K.*, Neue Untersuchungen über die Bessel'sche Formel u. deren Verwendung in der Meteorologie. Dorpat 1888.

Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen der Kaiserlichen livländ. gemeinnützigen u. ökonom. Societät f. d. J. 1886. Dorpat 1887.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. T. 15. Helsingforsiae 1888.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societ. Häftet 45—47. Helsingfors 1887. 88.

Öfversigt af Finska Vetenskabs-Societetens Förhandlingar. 28 (1885—86). 29 (1886—87). Helsingfors 1886. 87.

Arppe, A. E., Finska Vetenskaps-Societeten 1838—88, dess organisation och verksamhet. Helsingfors 1888.

Finlands geologiska Undersökning. Kartbladet 10. 11. Beskrifning till kartbladet 10. 11. Helsingfors 1887.

Universitetskija Izvěstija. God 27 (1887), No. 10—12. God 28 (1888), No. 1—9. Kiev 1887. 88.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1887, No. 4. 1888, No. 1—3. Moscou 1887. 88.

Meteorologische Beobachtungen, ausgeführt am Meteorol. Observatorium d. Landwirthschaftlichen Akademie zu Moskau. 1887, 1. u. 2. Hälfte. 1888, 1. Hälfte (Beilage z. Bulletin de la Soc. Imp. des Natural. de Moscou, II. Série, T. 1. 2). Moskau 1887. 88.

Nouveaux Mémoires de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. 15 (T. 20 de la collection), Livr. 3—5. Moscou 1885—88.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXXII, No. 2—4. St.-Pétersbourg 1888.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. 35, No. 8—10. T. 36, No. 1—11. St.-Pétersbourg 1887. 88.

Repertorium für Meteorologie, hsg. v. d. kais. Akademie d. Wissensch., redig. v. H. Wild. Bd. 11. St. Petersburg 1888. — Supplementband 5 (*Wild, H.*, Die Regen-Verhältnisse des Russischen Reichs). Nebst Atlas. St. Petersburg 1887.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von H. Wild. Jahrg. 1886, Th. 2. Jahrg. 1887, Th. 1. St. Petersburg 1887. 88.

Acta Horti Petropolitani. T. 10, Fasc. 1. Petropoli 1887.

Jahresbericht am 31. Mai 1887 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte (aus dem Russischen übersetzt). St. Petersburg 1887.

Auwers, A., Neue Reduction der Bradley'schen Beobachtungen aus d. J. 1750—52. Bd. 3. St. Petersburg 1888.

Observations de Poulkova, publ. p. O. Struve. Vol. 12. 14. St. Pétersbourg 1887. 88. — Supplément I (*Struve, H.*, Beobachtungen der Saturnstrabanten. Abth. 1). St.-Pétersbourg 1888.

Magnetische Beobachtungen des Tifliser Physikal. Observatoriums in den Jahren 1886—87, hsg. v. J. Mielberg. Tiflis 1888.

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser Physikal. Observatoriums im J. 1886, hsg. v. J. Mielberg. Tiflis 1888.

Schweden und Norwegen.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1887. Christiania 1888.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 23 (1886—87), I. II. III. Lund 1887. 88.

Antiquarisk Tidskrift för Sverige utg. af Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademien genom Bror Emil Hildebrand. Delen 10, 3. 4. Stockholm 1887.

Entomologisk Tidskrift, på föranstaltende af Entomologiska Föreningen i Stockholm utg. af Jac. Spångberg. Årg. 8 (1887), H. 1—4. Stockholm 1887.

Tromsø Museums Aarshefter. 11. Tromsø 1888. — Tromsø Museums Aarsberetning for 1887. Tromsø 1888.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 19 (1887). Upsal 1887—88.

Schweiz.

Neue Denkschriften der Allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für d. gesammten Naturwissenschaften. Bd. 30, Abth. 1. Basel 1888.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Frauenfeld 7.—9. Aug. 1887. 70. Jahresversammlung. Jahresbericht 1886/87. Frauenfeld 1887.

Compte-rendu des travaux présentés à la 70. session de la Société Helv. des sciences naturelles réunie à Frauenfeld 8.—10. août 1887. Genève 1887.

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hrsg. v. der Historischen und Antiquarischen Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 2 (der ganzen Reihe Bd. 12), H. 4. Basel 1888.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1887 (No. 1169—94). Bern 1888.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrg. 31 (Vereinsjahr 1886/87). Chur 1888.

Vierteljahrsschrift d. naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 32, H. 2—4. Jahrg. 33, H. 1. Zürich 1887. 88.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas 1—9. Beograd 1887. 88.

Srpska kralj. Akademija. Godišnjak 1 (1887). Beograd 1888. — Spomen na tužnu svečanost prilikom smrti Josipha Pančit. Beograd 1888.

Spanien.

Real Academia de ciencias morales y políticas. Año de 1888. Madrid 1888.

Botella, Cr., El problema de la emigracion. Memoria premiada por la R. Acad. de cienc. mor. y pol. Madrid 1888. — *Cervigón y Lerín, B.*, Estudio sobre la carestía de subsistencias. Memoria premiada por la R. Acad. de cienc. mor. y pol. Madrid 1888. — *Henestrosa y Boza, F. F. de*, Doctrinas juridicas de S. Tomas de Aquino. Memoria premiada por la R. Acad. de cienc. mor. y pol. Madrid 1888.

Nordamerika.

Proceedings of the American Oriental Society, at Baltimore, Oct. 1887; at Boston, May 1888.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. 7, No. 60—65. Baltimore 1887. 88.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. X, No. 2. 3. Baltimore 1888.

Johns Hopkin's University Studies in historical and political science. V. Ser., 12. Baltimore 1887.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences [Boston]. Vol. 11 (Centennial Volume), P. 5, N. 6. Cambridge 1877.

Memoirs of the Boston Society of natural history. Vol. 4, No. 1—6. Boston 1886—88.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 13, No. 6—10. Vol. 14. 15. Vol. 16 (Geological Series, Vol. 2), No. 1. 2. Vol. 17, No. 1. 2. Cambridge, Mass. 1887. 88.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. XV. Cambridge, Mass. 1887.

Journal of the Elisha Mitchell scientific Society [Chapel Hill]. Year 4 (1887), P. 2. Raleigh 1887.

Annual Report of the Geological Survey of Pennsylvania for 1886. P. 1. 2. P. 3 with Atlas. Harrisburg 1887.

Second Geological Survey of Pennsylvania. AA. Atlas Western middle Anthracite Field, P. II. — C7. Atlas Bucks and Montgomery Counties.

Memorias de la Sociedad científica »Antonio Alzate«. T. 1, Cuad. 5—10. 12. T. 2. Cuad. 1—4. México 1887. 88.

Faye, H., Teoria de los errores. Trad. del francés p. J. de Mendizabal Tamborrel. Edicion de la Sociedad »Alzate«. México 1888.

Observatorio meteorologico-magnético central de México. Boletin mensual. T. 1 (1888), Supl. al No. 5; T. 1, No. 6. 7. México 1888.

Proceedings of the Natural History Society of Wisconsin. 1888, S. 141—190. [Milwaukee] 1888.

The geological and natural history Survey of Minnesota. Bulletin No. 2—4. St. Paul 1887. — The 15. annual Report, for the year 1886. Minneapolis (St. Paul) 1887.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada for the year 1887. Vol. 5. Montreal 1888.

Geological and Natural History Survey of Canada. Annual Report. (New Series) Vol. 2. 1886. Montreal 1887.

Publications of the Lick Observatory [Mount Hamilton] of the University of California. Vol. 1 (1887). Sacramento 1887.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. 7, P. 2. New Haven 1888.

Report for the year 1886/87, presented by the Board of Managers of the Observatory to the President and Fellows of Yale College. For the year 1877/88. (New Haven) o. J.

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. IV, No. 3. 4. New York 1888.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. VI. VII, No. 1. 2. New York 1887.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 19 (1887), No. 4 and Supplement. Vol. 20 (1888), No. 1—3. New York 1887. 88.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1887, P. 3 (Sept.—Dec.). 1888, P. 1 (Jan. Febr.). 2 (March—Sept.). Philadelphia 1887. 88.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XXII (P. 3), No. 119: Early Proceedings. Vol. XXIV, No. 126. XXV, No. 127. Philadelphia 1885. 88.

Reports of the Committee appointed Oct. 21, 1887, to examine into the scientific value of Volapük, presented to the American Philosophical Society. (Philadelphia 1888).

Holden, E. S., List of recorded earthquakes in California, Lower California, Oregon and Washington Territory. Printed by direction of the Regents of the University of California. Sacramento 1887.

Bulletin of the California Academy of sciences. Vol. 2, No. 8. San Francisco 1887.

The Canadian Journal. A repertory of industry, science and art, and a record of the Proceedings of the Canadian Institute. Vol. 2. 3 and Supplement. New Ser., Vol. 1—10. 12—14. 15, No. 1—4. 6—8. Toronto 1853—77.

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto, being a continuation of the Canadian Journal of science, literature and history. III. Ser. Vol. 5, Fasc. 2. Vol. 6, Fasc. 1. Toronto 1888.

Annual Report of the Canadian Institute, Session 1886—87, being part of appendix to the Report of the Minister of education, Ontario, 1887. Toronto 1888.

Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 31—33. Washington 1888.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1885, P. II. Washington 1886.

Observations made during the year 1883 at the U. S. Naval Observatory. Washington 1887.

Annual Report of the Chief Signal-Officer to the Secretary of war for the year 1886. 1887, P. I. Washington 1886. 87.

United States Coast and Geodetic Survey. Bulletin No. 1—4. (Washington 1888.)

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work during the fiscal year ending with June 1886. P. I (Text). P. II (Sketches). Washington 1887.

Monographs of the U. S. Geological Survey. Vol. XII. With Atlas. Washington 1883.

U. S. Geological Survey. Mineral Resources of the United States. Calendar year 1886. Washington 1887.

Mittel- und Südamerika.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. T. 24, Entrega 2—6. T. 25. Entr. 1—6. Buenos Aires 1887. 88.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la República Argentina [Córdoba]. T. X, Entrega 1. 2. T. XI, Entrega 1. 2. Buenos Aires 1887. 88.

Archivos do Museu Nacional do Rio de Janeiro. Vol. 7. Rio de Janeiro 1887.

Anales del Museo Nacional. República de Costa Rica. T. I (1887). San José 1888.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. H. 5. 6. Valdivia 1887. 88.

Coleccion de historiadores de Chile i de documentos relativos a la historia nacional. T. VII: *Olivares, M. de*, Historia de la Compañia de Jesus en Chile (1593—1736), con una introd. i notas p. D. Barros Arana. Santiago 1874.

Asien.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 25 (1887), No. 4. Deel 26 (1888), No. 1. 2. Batavia 1888.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 32, Afl. 2—4. Batavia 1888.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 45, Afl. 2. Batavia, 's Hage 1888.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India anno 1653. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch., met medewerking van de Nederlandsch-Indische Regeering en onder toezicht van J. A. van der Chijs. Batavia, 's Hage 1888.

Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 9 (1886), P. I: Meteorological Observations. Batavia 1887.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgeg. d. de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 47 (VIII. Ser., D. 8). Batavia 1888.

Cotes, *E. C.* and *C. Swinhoe*, A Catalogue of the Moths of India. P. II: Bombyces. P. III: Noctues, Pseudo-Deltoides, and Deltoides. Calcutta 1887. 88.

Journal of the China Branch of the R. Asiatic Society. N. Ser. Vol. 22 (1887), No. 1—5. Shanghai 1888.

Imperial University of Japan (Teikoku Daigaku). The Calendar for the year 1887/88. Tōkyō 1888.

Journal of the College of science, Imperial University, Japan. Vol. 2, P. 1—3. Tōkyō 1888.

Mittheilungen aus der Medicinischen Facultät der Kais. Japanischen Universität. Bd. 1, No. 2. Tokio 1888.

Australien.

Transactions and Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. 24, P. 1. 2. Melbourne 1887. 88.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 20 (1886). 21 (1887). 22 (1888), P. 1. Sydney 1887. 88.

2. Einzelne Schriften.

Agües, L., Ein neues Problem. Barcelona 1888.

Auerbach, B., La diplomatie française et la cour de Saxe (1648—1680). Paris 1888.

Blasius, W., Beiträge z. Kenntniss der Vogelfauna von Celebes. (S. A.) Budapest 1886.

——, Gottlieb Braun. Nekrolog (S. A.). — Theodor Hartig. Nekrolog. (S. A.) — Hermann v. Heinemann. Nekrolog. (S. A.) — Friedrich Reck. Nekrolog (S. A.). Braunschweig 1887.

—— Ist Castor canadensis Kuhl, der amerikanische Biber, eine gute Art? (S. A.) (Braunschweig 1887).

—— Lebensbeschreibung Braunschweigischer Naturforscher u. Naturfreunde, verstorbener ehemaliger Mitglieder des Vereins f. Naturwissenschaft zu Braunschweig. Braunschweig 1887.

—— Die Vögel von Palawan (S. A.). o. O. 1888.

Borch, Frhr. L. v., Zur Entwicklung der sächsischen Wergelder. o. O. (1888).

Bourke, J. G., Compilation of notes and memoranda bearing upon the use of human ordure and human urine in rites of a religious or a semi-religious character among various nations. Washington 1888.

Darapsky, L., Las termas litiníferas del Valle del Cachapoal. Valparaiso 1887.

—— Curso pratico del analisis quimico calitativo. Santiago de Chile 1886.

Favaro, A., Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il Rè d'Italia. Espozione e disegno. Firenze 1888.

Lamprecht, G., Der Wetterring. Bautzen 1888.

Leibniz, Oeuvres, publ. pour la première fois d'après les manuscrits originaux p. A. Foucher de Careil. T. I (2. éd.). II (2. éd.). III—VII. Paris 1861—75.

Löwenberg, B., Études thérapeutiques et bactériologiques sur le furoncle de l'oreille (Extrait). Paris 1888.

Pezzi, D., La vita scientifica di Giorgio Curtius. Torino 1888.

Rosales, J. A., Bibliografia del literato Miguel Luis Amunátegui. Santiago de Chile 1888.

Schreiber, P., Zur Prüfung von Thermometern unter dem Eispunkt (S. A.). Berlin 1888.

—— Zur Frage der Herleitung wahrer Tagesmittel der Lufttemperatur aus drei- resp. viermaligen Beobachtungen (S. A.). o. O. 1888.

Schreiber, Th., Die Brunnenreliefs aus Palazzo Grimani. Leipzig 1888.

Voss, A., Zur Erinnerung an Axel Harnack (S. A.). Leipzig 1888.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

HARVARD COLLEGE
APR 25 1889

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1888.

I. II.

MIT ZEHN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1889.

SITZUNG VOM 16. JANUAR 1888.

W. Scheibner, *Mathematische Bemerkungen.* (Auszüge aus Briefen an Prof. Baltzer, † 7. Novbr. 1887.)

Leipzig, 9. Februar 1887.

. . . .

(1) Bei Benutzung Ihrer »Determinanten« für die Theorie des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier ganzer Functionen

$$f_m = a_0 + a_1 y \cdots + a_m y^m, \quad g_n = b_0 + b_1 y \cdots + b_n y^n$$

erschien mir auf S. 117 zwischen Art. 8 und 9 die Einschaltung eines Artikels wünschenswerth, der eine mehr heuristische Darstellung liefert. Ich meine etwa in folgender Weise mit Hülfe der Multiplicatoren (*Crelle* 14, S. 281)

$$M_{m-p-1} = \alpha_0 + \alpha_1 y \cdots + \alpha_{m-p-1} y^{m-p-1},$$
$$N_{n-p-1} = \beta_0 + \beta_1 y \cdots + \beta_{n-p-1} y^{n-p-1}.$$

Sei

$$P = M_{m-p-1}\, g_n - N_{n-p-1}\, f_m = c_0 + c_1 y \cdots + c_{m+n-p-1}\, y^{m+n-p-1},$$

wo

$$c_q = b_q \alpha_0 + b_{q-1}\alpha_1 \cdots + b_{p+q-m+1}\,\alpha_{m-p-1}$$
$$- a_q \beta_0 - a_{q-1}\beta_1 \cdots - a_{p+q-n+1}\,\beta_{n-p-1}$$

(mit dem Vorbehalte, dass nur diejenigen Coefficienten a_i und b_k beibehalten werden, für welche i zwischen 0 und m, k zwischen 0 und n liegt), so können die $(m + n - 2p)$ Coefficienten in M und N mittelst des linearen Systems

$$c_p = R_p, \quad c_{p+1} = 0, \quad \cdots \quad c_{m+n-p-1} = 0$$

bestimmt werden, wenn R_p die Determinante des Systems bedeutet. Dann folgt

$$P = c_0 + c_1 y \cdots + c_{p-1} y^{p-1} + R_p\, y^p,$$

also vom Grade p, falls R_p nicht verschwindet, und es ist offenbar jeder gemeinschaftliche Theiler von f und g in $Mg - Nf = P$ enthalten. Soll nun P selbst Theiler von f und g sein, so müssen die Determinanten

$$R_0 = R_1 \cdots = R_{p-1} = 0$$

verschwinden, weil wenn R_i nicht verschwände,

$$M_{m-i-1}\, g_n - N_{n-i-1}\, f_m$$

einer Function i^{ten} Grades gleich gemacht werden könnte, also für $i < p$ nicht durch P theilbar wäre.

Es sind aber jene Bedingungen nicht allein nothwendig, sondern auch ausreichend, damit f und g einen gemeinschaftlichen Theiler vom Grade p besitzen. In der That kann man, wenn $R_i = 0$,

$$M_{m-i-1}\, g - N_{n-i-1}\, f = Q_{i-1}$$

einer Function $(i-1)^{\text{ten}}$ Grades gleich machen, ohne dass M und N verschwinden. Für $i = 0$ oder $R_0 = 0$ folgt

$$M_{m-1}\, g = N_{n-1}\, f\,.$$

Wenn nun M und N keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so muss f_m durch M_{m-1} theilbar sein und man erhält den linearen Theiler

$$P = \frac{f}{M_{m-1}} = \frac{g}{N_{n-1}}\,.$$

Anderenfalls sei

$$M_{m-1} = Q_{p-1}\, M_{m-p}\,, \quad N_{n-1} = Q_{p-1}\, N_{n-p}\,,$$

folglich

$$M_{m-p}\, g = N_{n-p}\, f \quad \text{und} \quad P_p = \frac{f}{M_{m-p}} = \frac{g}{N_{n-p}}\,,$$

d. h. der Theiler P ist *mindestens* vom 1. Grade.

Ist aber auch $R_1 = 0$, so lässt sich nicht allein

$$M_{m-2}\, g - N_{n-2}\, f = Q_0 = c_0'$$

machen, sondern es muss auch $c_0' = 0$ sein, weil sonst überhaupt kein gemeinschaftlicher Theiler existiren könnte: mithin muss P *mindestens* vom 2. Grade sein. Ist nun ferner $R_2 = 0$ und

$$M_{m-3}\, g - N_{n-3}\, f = Q_1 = c_0'' + c_1''\, y\,,$$

so verschwinden auch c_0'' und c_1'', also ist P mindestens vom 3. Grade, u. s. w.

Schreibt man

$$c_q = a_0^q\,\alpha_0 + a_1^q\,\alpha_1 \cdots + a_{m-p-1}^q\,\alpha_{m-p-1}$$
$$+ b_0^q\,\beta_0 + b_1^q\,\beta_1 \cdots + b_{n-p-1}^q\,\beta_{n-p-1}\,,$$

so ergibt die Auflösung des linearen Systems

$$c_p = R_p\,, \quad c_{p+1} = 0\,, \quad \cdots \quad c_{m+n-p-1} = 0\,,$$

wegen

$$R_p = |\,a_0^q\,a_1^q \cdots a_{m-p-1}^q\,b_0^q\,b_1^q \cdots b_{n-p-1}^q\,| \text{ für } q = p, p+1, \ldots m+n-p-1\,,$$
$$= a_0^p A_0^p + a_1^p A_1^p \cdots + a_{m-p-1}^p A_{m-p-1}^p$$
$$+ b_0^p B_0^p + b_1^p B_1^p \cdots + b_{n-p-1}^p B_{n-p-1}^p:$$
$$\alpha_i = A_i^p\,, \quad \beta_k = B_k^p\,,$$

mithin

$$c_q = a_0^q A_0^p + a_1^q A_1^p \cdots + a_{m-p-1}^q A_{m-p-1}^p$$
$$+ b_0^q B_0^p + b_1^q B_1^p \cdots + b_{n-p-1}^q B_{n-p-1}^p\,.$$

Folglich geht P aus R_p hervor, wenn man in der ersten Horizontalreihe der Determinante die Elemente a_i^p und b_k^q durch

$$a_i^0 + a_i^1\,y \cdots + a_i^p\,y^p \quad \text{und} \quad b_k + b_k y \cdots + b_k^p y^q$$

ersetzt — in Uebereinstimmung mit Art. 9 des § 11.

Die Form der Bedingungsgleichungen $R_0 = R_1 \cdots = R_{p-1} = 0$ habe *ich* aus der Nachschrift einer Vorlesung von WEIERSTRASS kennen lernen.

---

(2) Die Darstellung in § 7, Art. 2 Ihrer »Determinanten« scheint mir nicht recht symmetrisch und etwa folgendergestalt zu ergänzen.

Die vollständige Auflösung der Gleichungen

$$y_k = \sum_i a_i^k\,x_i\,, \qquad R x_i = \sum_k A_i^k\,y_k$$

für $y_k = 0$ liefert,

1) wenn

$$R = |\,a_i^k\,| = \sum a_i^k A_i^k = \sum \left(a_i^k a_{i'}^{k'} - a_i^{k'} a_{i'}^k\right) A_{ii'}^{kk'} = 0:$$
$$x_i = f A_i^k$$

2) wenn die Subdeterminanten A_i^k verschwinden:

$$x_i = f A_{ik}^{kl} + g A_{il}^{kl}$$

3) wenn $A_{ii'}^{kk'} = 0$:

$$x_i = f A_{ilm}^{klm} + g A_{imk}^{klm} + h A_{ikl}^{klm}$$

u. s. w. Hier bezeichnen $f\ g\ h$ *willkürliche* Factoren, während die Indices $k\ l\ m$ *beliebig* gewählt werden dürfen.

---

(3) Ich weiss nicht, ob die Frage nach den wesentlichen Bedingungsgleichungen zwischen den Elementen a_i^k für das Verschwinden der Subdeterminanten $(n - p + 1)^{\text{ten}}$ Grades schon beantwortet ist. Die *Anzahl* dieser Bedingungen beträgt p^2, so dass beim Fortgang zu den Determinanten $(n - p)^{\text{ten}}$ Grades $2p + 1$ Gleichungen hinzutreten.

---

(4) In Ihren »Elementen« Algebra § 10, Art. 15 scheinen Nr. II und III mit Art. 17, III zusammenzugehören. Ich würde folgende Fassung des Cauchy'schen Beweises vorziehen:

Sei für

$$x = p + qi\,, \quad fx = re^{\varphi i}$$

$$h = \varepsilon e^{\omega i} \quad \text{und} \quad f(x+h) = r' e^{\varphi' i}$$

r ein Minimalwerth, dann hat man für kleine Werthe von ε $r' > r$. Aber nach dem Taylor'schen Satze ist

$$f(x+h) = fx + h^m(a + bh)\,, \quad \text{wo} \quad a = \varrho e^{\psi i} = \frac{1}{m!} f^{(m)} x$$

den ersten nicht verschwindenden Differentialquotienten der Taylor'schen Reihe bedeutet, und b für abnehmende Werthe von h nicht über alle Grenzen wachsen darf. Zerlegt man in den reellen und imaginären Theil, so wird

$$r' \cos\varphi' = r\cos\varphi + \varepsilon^m \{\varrho\cos(m\omega + \psi) + \alpha\varepsilon\}$$

$$r' \sin\varphi' = r\sin\varphi + \varepsilon^m \{\varrho\sin(m\omega + \psi) + \beta\varepsilon\}\,,$$

mithin

$$r'r' = rr + \varepsilon^m \{2r\varrho\cos(m\omega + \psi - \varphi) + \gamma\varepsilon\}\,,$$

wo $\alpha\beta\gamma$ für abnehmende Werthe von ε nicht über alle Grenzen wachsen können. Da nun für verschiedene Werthe von ω $\cos(m\omega + \psi - \varphi)$ sein Zeichen wechselt und ϱ nicht verschwindet, so kann ein Minimum von r nur für $r = 0$ eintreten.

»Ist folglich die Function fx so beschaffen, dass r einen Minimalwerth besitzt, für welchen die TAYLOR'sche Entwickelung gültig bleibt, so ist die Gleichung $fx = 0$ durch $x = p + qi$ lösbar.«

Die geforderte Bedingung ist für eine ganze Function fx erfüllt[1]). Denn da eine solche für alle endlichen Werthe von x eindeutig, endlich und stetig verläuft, können p q r als rechtwinklige Coordinaten einer zusammenhängenden, einschaaligen Fläche auf der positiven Seite der pq-Ebene angesehen werden. Während dieselbe mit zunehmender Entfernung vom Ursprung sich von der pq-Ebene unbegrenzt entfernt, muss sie an gewissen Stellen dieser Ebene am nächsten kommen, d. h. r wird ein Minimum für gewisse Werthe von $x = p + qi$, und dort muss dem bewiesenen Satze zufolge die Fläche die complexe Ebene berühren.

---

(5) Vielleicht darf ich mir bei dieser Gelegenheit die einer Notiz aus dem Jahre 1849 entlehnte Bemerkung gestatten, dass die von GAUSS im Jahre 1816 angewandte Beweismethode, bei welcher für

$$x = re^{\varphi i}, \quad fx = Re^{\Phi i}, \quad y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\, \partial \varphi}$$

das Doppelintegral $\int\int y\, dr\, d\varphi$ bei der Umkehrung der Integrationsordnung seinen Werth ändert, auch auf das Integral $\int\int z\, d\varrho\, d\varphi$ anwendbar ist, wenn für

$$x = p + qi = e^{\varrho + \varphi i}, \quad fx = P + Qi = e^{\mathrm{P} + \Phi i}$$

$$z = \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \varphi}$$

gesetzt wird.

In der That sei fx eine eindeutige stetige Function (*functio continua ac monotropa*) der complexen Variablen x, so sind P und Φ reelle Functionen der reellen Variabeln ϱ und φ, für welche die partielle Differentialformel

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \varrho} + i\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - i\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \varphi}$$

gilt. Die Werthe der Anomalieen Φ und φ können Incremente von der Form $2m\pi$ erhalten, deren Differential verschwindet, im Uebrigen sind die eingeführten Variabeln mit der Function fx stetig und monotrop. Sei nun

$$\Omega = \int\int z\, d\varrho\, d\varphi = \int \Phi\, d\varphi = -\int \mathrm{P}\, d\varrho$$

---

1) Dass in der Gleichung

$$f(x+h) = fx + h^m(a + bh)$$

für kleine Werthe von h, a und b nicht gleichzeitig verschwinden können, ist evident, wenn fx nicht constant sein soll, in welchem Falle fx in der That nicht zu verschwinden braucht.

und die Integration über die Elemente $r\,dr\,d\varphi = r^2\,d\varrho\,d\varphi$ eines concentrischen Ringes zwischen ϱ_0 und ϱ_1 vorgeschrieben, während φ die ganze Peripherie durchläuft; seien ferner $\Phi_{\varrho_0}^{\varrho_1}$ und $P_\varphi^{\varphi+2\pi}$ die stetigen, d. h. einer stetigen Aenderung der Argumente ϱ und φ zwischen den angezeigten Grenzen entsprechenden Incremente von Φ und P, so wird

$$\Omega = \int_\varphi^{\varphi+2\pi} \Phi_{\varrho_0}^{\varrho_1}\,d\varphi = -\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} P_\varphi^{\varphi+2\pi}\,d\varrho\,,$$

wenn die Umkehr der Integrationsordnung erlaubt ist.

Wegen der Monotropie von fx verschwindet die Differenz $P_\varphi^{\varphi+2\pi}$ für jeden Werth des Logarithmus $\varrho = \log r$, so dass das Integral

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} P_\varphi^{\varphi+2\pi}\,d\varrho = 0$$

[bei der heterotropen Function $1+\sqrt{x}$ z. B. würde

$$P = \log\,(1 + 2e^{\frac{1}{2}\varrho}\cos\tfrac{1}{2}\varphi + e^\varrho), \quad \text{und für} \quad \varphi + 2\pi$$

$$P = \log\,(1 - 2e^{\frac{1}{2}\varrho}\cos\tfrac{1}{2}\varphi + e^\varrho) \quad \text{werden}].$$

Dagegen lässt sich zeigen, dass bei geeigneter Wahl von ϱ_0 und ϱ_1 der Werth des Integrals

$$\int_\varphi^{\varphi+2\pi} \Phi_{\varrho_0}^{\varrho_1}\,d\varphi = \Omega$$

von φ abhängt. Es braucht nur bewiesen zu werden, dass der Differentialquotient

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi} = \Phi_{\varrho_0}^{\varrho_1}(\varphi + 2\pi) - \Phi_{\varrho_0}^{\varrho_1}(\varphi) = \Phi_\varphi^{\varphi+2\pi}(\varrho_1) - \Phi_\varphi^{\varphi+2\pi}(\varrho_0)$$

nicht verschwindet, d. h. dass $\Phi_\varphi^{\varphi+2\pi}$ für ϱ_0 und ϱ_1 verschiedene Werthe annimmt.

Hierzu lassen wir ϱ nach der negativen und positiven Seite unbestimmt wachsen. Im Allgemeinen werden für unendliche Werthe von ϱ die Grenzwerthe einer continuirlichen Function nicht von φ abhängen [die Function e^x z. B. hört im Unendlichen auf stetig zu sein], allein es ist nicht nothwendig, dass dabei $\pm P$ über alle Grenzen wachse. Wir unterscheiden also die Fälle, in denen für $\pm\varrho = \infty$ P einen endlichen, *von φ unabhängigen* Grenzwerth besitzt, und in denen $\pm P$ über alle Grenzen wächst.

Im *ersteren* Falle ist $P^2 + Q^2 = e^{2P}$ von Null und Unendlich verschieden und wir können $\pm\varrho$ so gross annehmen, dass bei variablem φ die Variabilität von $\Phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{Q}{P} = \operatorname{arc\,cot}\frac{P}{Q}$ in beliebig enge Grenzen eingeschlossen bleibt, da der Quotient $\frac{Q}{P}$ (resp. $\frac{P}{Q}$) um den Grenzwerth oscillirt, dem er sich für wachsende ϱ unbegrenzt nähert. Daraus folgt, dass wenn φ die Peripherie durchläuft, der Bogen Φ zu seinem Ausgangswerth zurückkehren muss.

Im *letzteren* Falle wollen wir die Voraussetzung machen, dass wenn ϱ hinlänglich gross genommen wird, $\pm$ P mit dem Logarithmus ϱ *continuirlich* wachse, so dass der Differentialquotient $\frac{\partial P}{\partial \varrho}$ sein Zeichen nicht mehr wechseln könne, und zwar soll diess für beliebige variable Werthe der Anomalie φ der Fall sein. Die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial \varrho} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

zeigt dann, dass während φ um 2π wächst, das Differential $d\Phi$ beständig dasselbe Zeichen behält. Hieraus schliesst man, dass bei geeigneter Bestimmung von ϱ die Anomalie Φ beständig wachsen oder abnehmen, und folglich ein nicht verschwindendes Increment $\Phi_\varphi^{\varphi+2\pi} = 2m\pi$ erhalten muss.

Bei einer ganzen Function fx — welche nicht durch x theilbar sein soll — ergibt sich für $\varrho = -\infty$ der von φ unabhängige, endliche und nicht verschwindende Werth $f0$. Andererseits wachsen ϱ und P gleichzeitig positiv über alle Grenzen, und zwar dergestalt, dass von einem gewissen Punkte an, bei wachsendem ϱ, für keinen Werth des Bogens φ der Logarithmus P abnehmen kann. Daraus folgt aber, dass sich die Integrationsgrenzen ϱ_0 und ϱ_1 so bestimmen lassen, dass zugleich

$$\Phi_\varphi^{\varphi+2\pi}(\varrho_0) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi_\varphi^{\varphi+2\pi}(\varrho_1) = 2m\pi = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}$$

werden, wo die Zahl m nicht verschwindet.

Die Integrale $\int \Phi \, d\varphi$ und $-\int P \, d\varrho$, welche durch Umkehr der Integrationsordnung aus Ω folgen, sind mithin nicht gleich und wir dürfen schliessen, dass der Nenner der Function

$$z = -\frac{P\frac{\partial P}{\partial \varphi} + Q\frac{\partial Q}{\partial \varphi}}{P^2 + Q^2}$$

innerhalb des Doppelintegrals verschwindet, da ausserdem keine unendlichen oder unbestimmten Elemente vorkommen können. Mit anderen Worten: die Gleichung $fx = 0$ ist durch endliche Werthe von ϱ und φ lösbar.

Leipzig, 12. Februar 1887.

(6) Heute sende ich Ihnen eine anderweite Bemerkung zu § 30, Art. 2,6 Ihrer »Allgemeinen Arithmetik«.[1])

Um zu entscheiden, ob der Werth des Kettenbruchs $\frac{u_1}{u}$ zwischen den beiden Näherungswerthen $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ und $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ liege, bemerke man, dass

---

1) Vergl. diese *Berichte*, Jahrgang 1864, S. 44 flg.

$$\frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{q_{i-1}\lambda_{i-1} - p_{i-1}r_{i-2}\lambda_{i-2}}{q_{i-1}\mu_{i-1} - p_{i-1}r_{i-2}\mu_{i-2}}$$
$$= \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} + \frac{\varpi_i \varrho_{i-1}}{q_{i-1}\mu^2_{i-1} - p_{i-1}r_{i-2}\mu_{i-2}\mu_{i-1}}$$

sich in entgegengesetztem Sinne ändert, wenn q_{i-1} wächst oder abnimmt, und zwar entspricht eine grössere Aenderung von q_{i-1} auch einer grösseren Aenderung von $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$, so lange der Nenner μ_i nicht durch Null hindurchgeht. Vergleicht man die Kettenbrüche für

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2 r_1}{q_2} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{p_{i-1} r_{i-2}}{q_{i-1}} \dot{-} \frac{r_{i-1} u_i}{u_{i-1}},$$
$$\frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2 r_1}{q_2} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{p_{i-1} r_{i-2}}{q_{i-1}},$$
$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2 r_1}{q_2} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{p_{i-1} r_{i-2}}{q_{i-1}} \dot{-} \frac{p_i r_{i-1}}{q_i},$$

so erhellt, dass $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ in $\frac{u_1}{u}$ übergeht, wenn statt q_{i-1}, $q_{i-1} - \frac{r_{i-1} u_i}{u_{i-1}}$ geschrieben wird, dagegen in $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$, wenn man q_{i-1} durch $q_{i-1} - \frac{p_i r_{i-1}}{q_i}$ ersetzt. Daraus folgt, dass $\frac{u_1}{u}$ zwischen $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ und $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ enthalten sein muss, wenn $\frac{r_{i-1} u_i}{u_{i-1}} = R_{i-1}$ zwischen 0 und $\frac{p_i r_{i-1}}{q_i}$ liegt. Dafür kann man auch $q_i u_i$ zwischen 0 und $p_i u_{i-1} = q_i u_i - r_i u_{i+1}$ legen, oder was dasselbe ist, $q_i u_i$ und $r_i u_{i+1}$ von entgegengesetzten Vorzeichen nehmen.

Folglich ist

$$\frac{r_i u_{i+1}}{q_i u_i} < 0$$

die Bedingung der *Semiconvergenz*, mit anderen Worten: wenn

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2 r_1}{q_2} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{p_i r_{i-1}}{q_i - R_i},$$

so muss das Ergänzungsglied R_i entgegengesetztes Vorzeichen

mit dem letzten Partialnenner q_i in $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ haben, damit der Werth des Kettenbruchs $\frac{u_1}{u}$ zwischen $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ und $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ enthalten sei.[1])

---

(7) Ich will hier noch einige bei der wiederholten linearen Transformation stattfindende Kettenbruchsentwickelungen beifügen, welche zuweilen von Vortheil sein können. Wenn

$$v_i = \frac{p_i - s_i v_{i+1}}{q_i - r_i v_{i+1}} \quad \text{oder} \quad v_{i+1} = \frac{p_i - q_i v_i}{s_i - r_i v_i}$$

(*Berichte* 1864, S. 67), und man setzt

$$p_i r_i - q_i s_i = p_i r_i' = r_i p_i'$$

$$p_i q_{i+1} - p_{i+1} s_i = p_i q_{i+1}' = - p_{i+1} s_i''$$

$$r_i s_{i+1} - q_i r_{i+1} = r_i s_{i+1}' = - r_{i+1} q_i''$$

so ergibt sich leicht

---

1) Der vorstehende Satz bedarf einer Ergänzung. In der That zeigt die Gleichung

$$\frac{u_1}{u} = \frac{(q_i - R_i)\,\lambda_i - p_i r_{i-1} \lambda_{i-1}}{(q_i - R_i)\,\mu_i - p_i r_{i-1} \mu_{i-1}} = \frac{\lambda_{i+1} - R_i \lambda_i}{\mu_{i+1} - R_i \mu_i},$$

dass die Grenzwerthe $R_i = 0$ und $R_i = \pm\infty$ den Näherungswerthen $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ und $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ entsprechen. Für Werthe von R_i mit entgegengesetzten Vorzeichen muss folglich der Kettenbruch $\frac{u_1}{u}$ das eine Mal *zwischen* $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ und $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ liegen, das andere Mal *ausserhalb* dieses Intervalls. Das gesuchte Vorzeichen ist demnach bestimmt, wenn man die Lage von $\frac{u_1}{u}$ für irgend einen Werth von R_i angeben kann.

Da für $R_i = q_i$, $\frac{u_1}{u} = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}}$ wird, so muss das Ergänzungsglied R_i das gleiche oder das entgegengesetzte Vorzeichen mit q_i haben, je nachdem der Näherungswerth $\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}}$ zwischen $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ und $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ fällt, oder nicht. Da ferner $\frac{u_1}{u} = \infty$ für $R_i = \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}$ jedenfalls ausserhalb dieses Intervalles liegt, so gilt als Bedingung der Semiconvergenz auch die Ungleichung $R_i \frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} < 0$,

wo
$$\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} = \frac{1}{q_i} \div \frac{p_i r_{i-1}}{q_{i-1}} \div \ldots \div \frac{p_3 r_2}{q_2} \div \frac{p_2 r_1}{q_1}.$$

$$\begin{aligned}
v_i &= \frac{p_i}{q_i} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_{i+1} r_i'}{q'_{i+1}} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_{i+2} r'_{i+1}}{q'_{i+2}} \cdots \mathbin{\dot{-}} \frac{p_n r'_{n-1}}{q_n'} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_n r_n' v_{n+1}}{p_n - s_n v_{n+1}} \\
&= \frac{s_i}{r_i} + \frac{p_i'}{q_i''} \mathbin{\dot{-}} \frac{r_i p'_{i+1}}{q''_{i+1}} \mathbin{\dot{-}} \frac{r_{i+1} p'_{i+2}}{q''_{i+2}} \cdots \mathbin{\dot{-}} \frac{r_{n-1} p_n'}{q_n} \mathbin{\dot{-}} r_n v_{n+1} \\
\frac{1}{v_i} &= \frac{q_i}{p_i} + \frac{r_i'}{s_i''} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_i r'_{i+1}}{s''_{i+1}} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_{i+1} r'_{i+2}}{s''_{i+2}} \cdots \mathbin{\dot{-}} \frac{p_{n-1} r_n'}{s_n} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_n}{v_{n+1}} \\
&= \frac{r_i}{s_i} \mathbin{\dot{-}} \frac{r_{i+1} p_i'}{s'_{i+1}} \mathbin{\dot{-}} \frac{r_{i+2} p'_{i+1}}{s'_{i+2}} \cdots \mathbin{\dot{-}} \frac{r_n p'_{n-1}}{s_n'} \mathbin{\dot{-}} \frac{r_n p_n'}{r_n v_{n+1} - q_n} \\
v_n &= \frac{p_{n-1}}{s_{n-1}} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_{n-2} r'_{n-1}}{s''_{n-2}} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_{n-3} r'_{n-2}}{s''_{n-3}} \cdots \mathbin{\dot{-}} \frac{p_i r'_{i+1}}{s_i''} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_i r_i' v_i}{p_i - q_i v_i} \\
&= \frac{q_{n-1}}{r_{n-1}} + \frac{p'_{n-1}}{s'_{n-1}} \mathbin{\dot{-}} \frac{r_{n-1} p'_{n-2}}{s'_{n-2}} \mathbin{\dot{-}} \frac{r_{n-2} p'_{n-3}}{s'_{n-3}} \cdots \mathbin{\dot{-}} \frac{r_{i+1} p_i'}{s_i} \mathbin{\dot{-}} r_i v_i \\
\frac{1}{v_n} &= \frac{s_{n-1}}{p_{n-1}} + \frac{r'_{n-1}}{q'_{n-1}} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_{n-1} r'_{n-2}}{q'_{n-2}} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_{n-2} r'_{n-3}}{q'_{n-3}} \cdots \mathbin{\dot{-}} \frac{p_{i+1} r_i'}{q_i} \mathbin{\dot{-}} \frac{p_i}{v_i} \\
&= \frac{r_{n-1}}{q_{n-1}} \mathbin{\dot{-}} \frac{r_{n-2} p'_{n-1}}{q''_{n-2}} \mathbin{\dot{-}} \frac{r_{n-3} p'_{n-2}}{q''_{n-3}} \cdots \mathbin{\dot{-}} \frac{r_i p'_{i+1}}{q_i''} \mathbin{\dot{-}} \frac{r_i p_i'}{r_i v_i - s_i} .
\end{aligned}$$

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass die Gleichung (a. a. O. S. 53) $\gamma_i = \gamma_{i+m}$ *identisch* erfüllt wird für

$$G = \frac{1}{4} \sec^2 \frac{n\pi}{m} , \quad \text{wo} \quad 0 < n < \frac{m}{2} .$$

Es folgt daraus, dass in diesem Falle γ_i für wachsende i keine Grenze besitzt, weil die Gleichung $G = \gamma - \gamma\gamma$ keine reelle Wurzel haben würde.

Leipzig, 19. März 1887.

(8) Die in meinem neulichen Briefe vom 9. Februar aufgeworfene Frage finde ich bereits von Herrn Kronecker (*Crelle* 72, S. 153) dahin beantwortet, dass alle Subdeterminanten m^{ten} Grades von der Form

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{vmatrix} = 0$$

verschwinden, wenn die $(n - m + 1)^2$ Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \cdots m-1 & i \\ 1 & 2 \cdots m-1 & k \end{vmatrix} \quad \text{für } i, k = m \cdots n$$

Null sind und vorausgesetzt wird, dass $\begin{vmatrix} 1 & 2 \cdots m-1 \\ 1 & 2 \cdots m-1 \end{vmatrix}$ nicht verschwinde. Herr Prof. Mayer machte mich darauf aufmerksam,

dass diess eine unmittelbare Folge aus dem Kronecker'schen Satze (Determ. § 8, 2) ist, wonach unter der betonten Voraussetzung von den n linearen homogenen Functionen $y_k = \sum_i a_i^k x_i$ die $m - 1$ ersten von einander unabhängig sind, während zwischen diesen und den übrigen $n - m + 1$ die Relationen bestehen:

$$0 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{m-1}^1 & y_1 \\ & & \cdots\cdots & & \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_{m-1}^{m-1} & y_{m-1} \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_{m-1}^k & y_k \end{vmatrix} .$$

Ich weiss nicht, aus welchem Grunde Sie durch Ihre Darstellung in § 6, 8 den Satz, der doch einen fundamentalen Charakter hat, so zu sagen verdunkelt haben; ich würde nach § 6, 1 den Zusatz verweisen: »Hiernach ist für $m < n$ jede Subdeterminante $|c_i^k|$ des componirten Systems vom $(m+1)^{\text{ten}}$ und höherem Grade Null« und für § 6, 8 eine Fassung wie die folgende vorschlagen:

Wenn die Elemente a einer Determinante n^{ten} Grades so beschaffen sind, dass sämmtliche $n_m\, n_m$ Subdeterminanten m^{ten} Grades verschwinden, so werden auch sämmtliche Subdeterminanten höherer Grade nebst der Determinante $|a_i^k| = \begin{vmatrix} 1\,2 \cdots n \\ 1\,2 \cdots n \end{vmatrix}$ Null. Es fragt sich, welche nothwendigen und ausreichenden Bedingungsgleichungen zwischen den Elementen alsdann erfüllt sein müssen.

Unter den Subdeterminanten m^{ten} Grades befinden sich die Determinanten

$$p_i^k = \begin{vmatrix} 1\,2 \cdots m-1\; i \\ 1\,2 \cdots m-1\; k \end{vmatrix} \quad \text{für} \quad i, k = m \cdots n \;,$$

während für $i, k < m$ diese Ausdrücke offenbar identisch verschwinden. Bringt man nun p_i^k auf die Form

$$p_i^k = A a_i^k - \sum_{l=1}^{m-1} a_i^l\, b_k^l \;,$$

so sind

$$A = \begin{vmatrix} 1\,2 \cdots m-1 \\ 1\,2 \cdots m-1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad b_k^l = \begin{vmatrix} 1\,2 \cdots l-1\; k\; l+1 \cdots m-1 \\ 1\,2 \quad \cdots\; l \;\cdots \quad m-1 \end{vmatrix}$$

Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades; für $p_i^k = 0$ folgt

$$A a_i^k = \sum_{l=1}^{m-1} a_i^l b_k^l .$$

Das Product

$$P = A^m \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{vmatrix} = A^m p$$

wird hiernach gleich der Determinante m^{ten} Grades eines componirten Systems, bei welchem der Summenindex l nur $m-1$ Werthe durchläuft. Mithin verschwindet p, wenn die Subdeterminante A nicht Null ist, was sich immer erreichen lässt, falls nicht sämmtliche Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades Null sein sollen.

Folglich reichen die $(n-m+1)^2$ Gleichungen $p_i^k = 0$ aus, damit sämmtliche Subdeterminanten m^{ten} Grades verschwinden. Auch kann die Anzahl dieser Bedingungen *im Allgemeinen* nicht weiter reducirt werden, weil jedes p_i^k das Element a_i^k enthält, welches in den übrigen nicht vorkommt.

Anders verhält es sich natürlich, wenn die Elemente a nicht unabhängig von einander sind. Bei *symmetrischen* $(a_i^k = a_k^i)$ Determinanten z. B. bleiben $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$ Bedingungen $p_i^k = 0$ zu befriedigen, — bei den *orthosymmetrischen* $(a_i^k = a_{i+k})$ nur $(2n-2m+1)$, — während bei den *anti-(pseudo) symmetrischen* $(a_i^k + a_k^i = 0)$ gerade und ungerade Werthe von m zu unterscheiden sind. Für gerade m sind wiederum $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$, für ungerade dagegen bloss $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+1)$ Gleichungen erforderlich.

Ein weiteres Beispiel mag die Determinante R liefern, deren Verschwinden das Vorhandensein eines gemeinschaftlichen Theilers P der beiden ganzen Functionen f_m und g_n anzeigt. Sei

$$f = PM, \quad g = PN, \quad \text{so ist} \quad Mg - Nf = 0, \quad \text{wo}$$
$$M = \alpha_0 + \alpha_1 y \cdots + \alpha_{m-1} y^{m-1}, \quad N = \beta_0 + \beta_1 y \cdots + \beta_{n-1} y^{n-1}$$

gesetzt werden darf. Für die $m+n$ Coefficienten α und β entspringt hieraus ein System von $m+n$ linearen homogenen Gleichungen, deren Determinante $R = 0$ sein muss. Wenn auch die Subdeterminanten bis zum Grade $m+n-p+1$ herab verschwinden sollen — wozu im Allgemeinen p^2 Bedingungen erforderlich sein würden — so ist diess ein Zeichen, dass M und N durch einen willkürlichen Factor

$$\gamma_0 + \gamma_1 y \cdots + \gamma_{p-1} y^{p-1}$$

vom Grade $p - 1$ theilbar sind, nach dessen Weglassung $P = \frac{f}{M} = \frac{g}{N}$ vom Grade p wird.

Bestimmt man dagegen den gemeinschaftlichen Theiler durch die Gleichung

$$P = M_{m-p-1}\, g - N_{n-p-1}\, f = c_0 + c_1 y \cdot + c_{m+n-p-1} y^{m+n-p-1}$$
$$= c_0 + c_1 y \cdots + c_{p-1} y^{p-1} + R_p y^p$$

mit Hülfe der $m + n - 2p$ linearen Gleichungen

$$c_p = R_p\,,\ c_{p+1} = 0\,,\ \cdots\ c_{m+n-p-1} = 0\,,$$

so erkennt man, dass die Determinanten $R_0\ R_1 \cdots R_{p-1}$ verschwinden müssen. Die obigen pp Bedingungen sind dadurch auf p reducirt worden, wobei R_q eine Subdeterminante von R vom Grade $m + n - 2q$ wird. Damit also die Subdeterminanten vom Grade $m + n - p + 1$ verschwinden, reicht hier das Verschwinden je einer Subdeterminante vom Grade $m + n$, $m + n - 2$, $m + n - 4$, $\cdots$ $m + n - 2p + 2$ aus.

SITZUNG VOM 13. FEBRUAR 1888.

Sophus Lie, *Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie.*

Die nachstehende Note beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen und soll einerseits neue Sätze aufstellen, andererseits ältere Resultate präcisiren.

1.

Sind $f_1 \cdots f_r$ unabhängige Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \cdots p_n$, welche Relationen von der Form

$$(1)\qquad (f_i f_k) = w_{ik}(f_1 \cdots f_r)$$

erfüllen, so befriedigen die w_{ik}, wie aus der Jacobi'schen Identität hervorgeht, die Bedingungsgleichungen

$$(2)\qquad \sum_1^r \left(\frac{\partial w_{ik}}{\partial f_s} w_{sj} + \frac{\partial w_{kj}}{\partial f_s} w_{si} + \frac{\partial w_{ji}}{\partial f_s} w_{sk} \right) = 0\ .$$

Sind andererseits r^2 Functionen $w_{ik}(f_1 \cdots f_r)$ gegeben, welche paarweise die soeben aufgestellten Gleichungen (2) und überdies noch die Relationen $w_{ik} + w_{ki} = 0$ erfüllen, so giebt es immer eine r-gliedrige Functionengruppe, deren Functionen $f_1 \cdots f_r$ in den Beziehungen (1) stehen.

Sind insbesondere die w_{ik} *homogene* Functionen *erster* Ordnung von $f_1 \cdots f_r$, so giebt es immer eine *homogene* r-gliedrige Functionengruppe von der betreffenden *Zusammensetzung.*

Ausgehend von diesen Sätzen, die ohne Schwierigkeit aus meiner allgemeinen Theorie der Functionengruppen her-

vorgehen, erkennt man leicht, dass es, wenn r^3 gegebene Constante c_{iks} die Gleichungen

$$(3)\ \sum_1^r (c_{iks}\, c_{sj\sigma} + c_{kjs}\, c_{si\sigma} + c_{jis}\, c_{sk\sigma}) = 0\,,\quad c_{iks} + c_{kis} = 0$$

erfüllen, immer r-gliedrige Transformationsgruppen giebt, welche die Zusammensetzung c_{iks} besitzen. Enthalten die betreffenden Transformationsgruppen keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, so ist ihre gemeinsame adjungirte Gruppe bekanntlich eine gleichzusammengesetzte — d. h. *holoedrisch* isomorphe — *lineare* homogene Gruppe. Enthalten dagegen die zu der Zusammensetzung c_{iks} gehörigen Gruppen ausgezeichnete infinitesimale Transformationen, so *ist es mir nicht gelungen* allgemein zu beweisen, dass es eine holoedrisch isomorphe *lineare* Gruppe giebt. Ich behalte mir vor, auf diese interessante Frage und die damit zusammenhängenden Theorien zurückzukommen. — In der Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit einer bekannten Gruppe kann man sich übrigens so einrichten, dass neben den eingliedrigen Gruppen nur Gruppen ohne ausgezeichnete infinitesimale Transformationen in Betracht kommen. Daher hat meine obenstehende Bemerkung keine tiefergehende Bedeutung für die besprochene Integrationstheorie.

In der Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen sind die folgenden *Integrations*probleme[1]) von hervorragender Wichtigkeit:

A. Alle r-gliedrigen Gruppen einer n-fachen Mannigfaltigkeit zu bestimmen.

B. Alle endlichen continuirlichen Gruppen einer n-fachen Mannigfaltigkeit zu bestimmen.

C. Alle r-gliedrigen Gruppen zu bestimmen.

Neben diese drei Probleme, die sich auf Gruppen von *Punkt*transformationen beziehen, stellen sich drei analoge Probleme A', B', C', die sich auf Gruppen von *Berührungs*transformationen beziehen.

---

1) Math. Ann. Bd. VIII, S. 303; Göttinger Nachr. 1874; Math. Ann. Bd. XVI, S. 457 und S. 528; Archiv for Math., Bd. 1, Christiania 1876. Die Bestimmung aller *Typen* von Zusammensetzungen ist ein rein *algebraisches* Problem.

Unter diesen sechs Problemen sind die Probleme B und B' unbedingt die schwierigsten. Ihre vollständige Erledigung ist mir auch nur für kleine Werthe von n gelungen; doch kann ich sie für jedes n in eine Reihe einfacherer Probleme zerlegen, unter denen sehr viele keine Schwierigkeiten darbieten.

Die Probleme C und C' lassen sich[1]) *auf die Probleme A bez. A' zurückführen* und zwar in der Weise, dass es für jedes r genügt, eine begrenzte leicht angebbare Anzahl Werthe von n für sich zu betrachten.

Wünscht man alle r-gliedrigen Berührungstransformationsgruppen gegebener Zusammensetzung c_{iks} zu bestimmen, so bildet man in $H_1 \cdots H_r$ die lineare homogene Gruppe[2])

$$(4)\qquad (H_k\, H_1)\frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + (H_k\, H_r)\frac{\partial f}{\partial H_r}$$
$$(k = 1 \cdots r)$$

oder anders geschrieben:

$$(4')\qquad \left(\sum c_{k1s}\, H_s\right)\frac{\partial f}{\partial H_1} + \cdots + \sum c_{krs}\, H_s\,\frac{\partial f}{\partial H_r}$$

und sucht darnach, wie ich im Archiv for Math., Christiania 1876, näher ausgeführt habe, alle bei ihr invarianten homogenen Gleichungssysteme, wobei jedoch alle auszuschliessen sind, aus denen sich *lineare* homogene Relationen zwischen den H_k ableiten lassen. *Diese Bestimmung verlangt offenbar keine Integrationen, sondern nur sogenannte ausführbare Operationen*, da die *endlichen* Gleichungen der linearen homogenen Gruppe (4') sich ohne Integration bestimmen lassen. Wählt man unter den gefundenen invarianten Gleichungsystemen ein bestimmtes[3]), so gehören zu ihm unbegrenzt viele Berührungstransformationsgruppen, welche jedenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden werden. Alle diese Gruppen

---

1) Archiv for Math., Bd. 1, Christiania 1876 und Bd. 10, 1885.

2) Math. Ann. Bd. XVI, S. 495.

3) Es macht hier natürlich einen wesentlichen Unterschied, ob die Gruppe (4') Invarianten besitzt oder nicht. Sucht man z. B. alle mit der Gruppe $H_1 = p$, $H_1 = xp$ gleichzusammengesetzten Gruppen, so bleibt bei der zugehörigen Gruppe (4') gar kein Gleichungssystem invariant mit Ausnahme $H_1 = 0$ und der identischen Gleichung $0 = 0$, deren letztere somit alle gleichzusammengesetzten Gruppen liefert.

sind mit einander durch Berührungstransformation ähnlich. Nimmt man zwei verschiedene invariante Gleichungssyteme, so lässt sich leicht entscheiden, ob die beiden zugehörigen Transformationsgruppen mit einander durch Berührungstransformation ähnlich sind.

Eine Berührungstransformationsgruppe der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $x_1 \cdots x_n$ heisst *reducibel*, wenn sie durch Berührungstransformation mit einer Gruppe von Punkttransformationen derselben Mannigfaltigkeit ähnlich ist. Sonst heisst sie *irreducibel*. Die Erledigung der Frage, ob eine vorgelegte Berührungstransformationsgruppe reducibel oder irreducibel ist, erledigt sich durch die allgemeine Theorie der Differentialinvarianten einer Berührungstransformationsgruppe. Derartige Probleme verlangen nach der Natur der Sache keine Integrationsoperationen, sondern nur sogenannte ausführbare Operationen.

Die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen von Punkttransformationen kann jedenfalls durch Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen[1]) geleistet werden. Schliesst man alle Gruppen mit ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen aus, so lassen sich die betreffenden Differentialgleichungen leicht integriren. Lässt man dagegen die soeben eingeführte Beschränkung fallen, so wird die Integration jener Differentialgleichungen wesentlich schwieriger. Ich bin indess auch für diesen Fall zu dem Resultate gekommen, dass sich die betreffende Integration durchführen lässt. Diese Frage ist indess so verwickelt, dass ich mir eine definitive Entscheidung derselben für eine spätere Gelegenheit vorbehalten muss. —

Die allgemeine Theorie der continuirlichen endlichen Gruppen, deren Transformationen durch nicht analytische Gleichungen $x_k' = f_k(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ bestimmt sind, lässt sich im Wesentlichen auf die Theorie der analytischen Gruppen zurückführen. Es besteht u. A. der Satz, dass jede transitive continuirliche Gruppe $x_k' = f_k(x_1 \cdots a_r)$, deren Functionen f_i eine gewisse, von r und n unabhängige Anzahl Differentiationen gestatten, mit einer analytischen Gruppe ähnlich ist. Hiermit erledigt sich die in meiner Note über die Grundlagen der Geometrie offen gelassene Frage. (Diese Berichte 1886 S. 342.)

---

1) Math. Ann. Bd. XVI, S. 528; Archiv for Math. Bd. 10, 1885.

2.

Eine transitive Gruppe G_r ist primitiv dann und nur dann, wenn die grösste Untergruppe, welche einen Punkt x_k^0 invariant lässt, in keiner grösseren Untergruppe enthalten ist. Hierbei wird vorausgesetzt, dass der Punkt x_k^0 auf keiner bei G_r invarianten Mannichfaltigkeit gelegen ist. In dieser Weise findet man jede bei G_r invariante Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_n$.

Ist die Gruppe G_r einfach transitiv, so können alle zugehörigen invarianten Zerlegungen des Raumes in einer bemerkenswerthen Weise gefunden werden. Man bildet die zugehörige reciproke, einfach transitive Gruppe Γ_r, nimmt irgend eine m-gliedrige Untergruppe Γ_m derselben und bestimmt die zugehörigen Invarianten $u_1 \cdots u_{r-m}$. Alsdann liefern die Gleichungen

$$u_1 = a_1 \cdots u_{r-m} = a_{r-m} \quad (a_k = \text{Const.})$$

die allgemeinste bei G_r invariante Zerlegung des Raumes. Hierauf gründet sich eine durchsichtige Bestimmung aller mit G_r holoedrisch (oder meroedrisch) isomorphen transitiven Gruppen.

Eine transitive Gruppe G_r ist systatisch oder asystatisch, jenachdem die früher besprochene, zu einem allgemein gelegenen Punkte x_k^0 gehörige Untergruppe in einer grösseren Untergruppe invariant ist oder nicht.

Aus meinen alten Untersuchungen fliesst ohne weiteres die Bestimmung aller einfachen, aller primitiven, aller asystatischen Gruppen eines Raumes von zwei oder drei Dimensionen. Herr PAGE hat neulich in einer noch nicht gedruckten Dissertation die von mir gestellte, aber nur theilweise erledigte Frage nach allen primitiven Gruppen eines *vier*fachen Raumes vollständig erledigt, und später hat Herr ENGEL die hierbei benutzten Rechnungen wesentlich vereinfacht. Anknüpfend an dieses Resultat des Herrn PAGE ist es mir u. a. gelungen alle einfachen Gruppen eines vierfachen Raumes und gleichzeitig alle einfachen Gruppen G_r, deren grösste Untergruppen $r-4$ wesentliche Parameter enthalten, zu bestimmen. Meine früheren Untersuchungen zeigen, dass sich hieraus für die Integralrechnung wichtige Schlüsse ziehen lassen.

3.

Unter den r-gliedrigen Transformationsgruppen sind diejenigen zunächst die wichtigsten, deren infinitesimale Trans-

formationen $Y_1 \cdots Y_i \cdots Y_r$ sich derart wählen lassen, dass $Y_1 \cdots Y_i$ für jedes i eine i-gliedrige Gruppe erzeugen, welche in der $(i+1)$-gliedrigen G_{i+1} invariant ist. Eine derartige Gruppe soll aus naheliegenden Gründen eine *integrable Gruppe* heissen.

Schon 1874 (Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania) wurde angegeben, dass sich immer entscheiden lässt, ob eine vorgelegte r-gliedrige Gruppe integrabel ist oder nicht. Um die hierzu erforderlichen Rechnungen auf ihre einfachste Form zu reduciren, ist es zweckmässig, den Begriff der derivirten (abgeleiteten) Gruppen zu benutzen.

Sind $X_1 \cdots X_r$ r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, so erzeugen alle $(X_i X_k)$ eine invariante Untergruppe mit etwa r_1 Parametern[1]), welche die *erste derivirte Gruppe* heissen soll. — Die Gruppe G_{r_1} hat nun ihre erste derivirte Gruppe G_{r_2}, welche die zweite derivirte Gruppe der Gruppe G_r heissen soll, u. s. w.

In dieser Weise gehört zu jeder Gruppe G_r eine Reihe invarianter derivirter Untergruppen, deren Zusammensetzung nur von der Zusammensetzung der Gruppe G_r abhängt.

Eine Gruppe G_r ist integrabel dann und nur dann, wenn die r-te derivirte Gruppe nur aus der Identität besteht.

Gestattet ein q-gliedriges vollständiges System:

$$A_1 f = 0 \cdots A_q f = 0$$

in n unabhängigen Veränderlichen $x_1 \cdots x_{q+r}$ eine bekannte r-gliedrige *integrable* Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, und besteht dabei keine lineare Relation von der Form

$$\sum \alpha_k(x)\, A_k f + \sum \beta_k(x)\, X_k f = 0\ ,$$

so verlangt die Integration[2]) des vollständigen Systems:

1) $r - r_1$ unter einander unabhängige Quadraturen,
2) $r_1 - r_2$ unter einander unabhängige Quadraturen, welche indess erst dann ausgeführt werden können, wenn die soeben besprochenen $r - r_1$ Quadraturen ausgeführt sind,

---

1) Archiv for Math. Bd. 8, 1883.

2) Der Satz des Textes ist enthalten in meiner 1874 veröffentlichten Integrationstheorie.

3) $r_2 - r_3$ unter einander, nicht aber von den früher besprochenen unabhängige Quadraturen, u. s. w.

Selbstverständlich gelten analoge Sätze, wenn einige unter den Differenzen $r - r_1$, $r_1 - r_2 \cdots$ von Null verschieden sind, während r_q immer grösser als Null ist.

Da man alle in einer Gruppe G_r enthaltenen invarianten G_{r-1} dadurch findet, dass man zu den r_1 infinitesimalen Transformationen der ersten derivirten Gruppe $r - r_1 - 1$ von ihnen und unter einander unabhängige infinitesimale Transformationen der G_r hinzufügt, so übersieht man ohne weiteres, wie man eine integrable Gruppe in allgemeinster Weise auf ihre von mir angegebene canonische Form bringen kann. — Jeder Satz über die Zusammensetzung aller $(r-q)$-gliedrigen Gruppen liefert einen Satz über die Zusammensetzung r-gliedriger Gruppen mit invarianter q-gliedriger Untergruppe.

4.

Kennt man drei gewöhnliche Differentialgleichungen α^{ter}, β^{ter}, γ^{ter} Ordnung

$$y_i - \varphi_i(x\, y\, y_1 \cdots y_{i-1}) = 0\,, \quad (i = \alpha, \beta, \gamma)\,,$$

welche eine gegebene Transformation in xy gestatten, so kann man, wenn

$$1 < \alpha < \beta < \gamma$$

ist, eine zu der Transformation gehörige Differentialinvariante von der Form

$$(y_\alpha - \varphi_\alpha)^\lambda\, (y_\beta - \varphi_\beta)^\mu\, (y_\gamma - \varphi_\gamma)$$

aufstellen. Dabei hängen die Zahlen λ, μ nur von α, β, γ ab:

$$\lambda + \mu + 1 = 0\,,$$
$$\lambda\alpha + \mu\beta + \gamma = 0\,.$$

Ist dagegen $1 < \alpha = \beta$, so ist schon

$$\frac{y_\alpha - \varphi_\alpha}{y_\beta - \varphi_\beta}$$

eine Differentialinvariante.

Ist andererseits ϑ eine Differentialinvariante, so ist

$$\frac{d\vartheta}{dx} = 0$$

eine invariante Differentialgleichung.

Durch Verknüpfung von diesen Bemerkungen vereinfacht man leicht, jedenfalls praktisch gesehen, meine 1883 veröffentlichte Berechnung aller Differentialinvarianten, welche zu allen Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene gehören.

Ganz analoge Sätze gelten für die bei einer gegebenen Berührungstransformation invarianten Differentialgleichungen zwischen x y. Nur muss man dabei annehmen, dass α, β, γ sämmtlich grösser als 2 sind.

SITZUNG VOM 5. MÄRZ 1888.

C. Neumann, *Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper. Zweiter Artikel*[1].

Sind die einen starren Körper M_2 sollicitirenden Kräfte von solcher Beschaffenheit, dass derselbe mit einem absolut festliegenden Körper M_1 fortdauernd in Berührung bleibt, und denkt man sich überdies die Oberflächen der beiden Körper von solcher Beschaffenheit, dass dieselben (wie z. B. zwei Ellipsoide) einander stets nur in einem einzigen Punkte berühren, so wird die augenblickliche Position des Körpers M_2 abhängig sein von *fünf* Argumenten. Und diese fünf Argumente werden, falls die Oberflächen der beiden Körper *vollkommen glatt* sind, als von einander unabhängig, mithin als independente Variable zu bezeichnen sein.

Sind hingegen die Oberflächen der beiden Körper *vollkommen rauh*, so finden zwischen jenen fünf Argumenten, wie sich leicht ergiebt, zwei lineare Differentialgleichungen statt, so dass also in diesem Fall von independenten Variablen *überhaupt nicht weiter die Rede sein kann.*

Mit Rücksicht hierauf aber bedarf der § 11 des in diesen Berichten (1887, pag. 153—190) publicirten ersten Artikels, in welchem die Existenz independenter Variablen schlechtweg vorausgesetzt wurde (vgl. daselbst die ersten neun Zeilen auf pag. 187) einer weiteren Ausführung. Dabei soll übrigens, der grösseren Allgemeinheit willen, angenommen werden, dass die einander berührenden Körper M_1 und M_2 *beide* beweglich sind, dass mithin die augenblickliche Position des Systems M_1, M_2 im Ganzen von *eilf* Argumenten abhängt. Diese eilf Argumente werden alsdann, je nachdem die Oberflächen vollkommen glatt

---

1) Das Manuscript wurde eingereicht am 5. März 1888.

oder vollkommen rauh sind, entweder von einander unabhängig, oder aber durch zwei lineare Differentialgleichungen an einander gefesselt sein.

Bevor ich indessen auf diese ziemlich complicirten Dinge näher eingehe, mag es mir gestattet sein, den eigentlichen Inhalt jenes § 11 zuvörderst (in den §§ 13, 14 und 15) durch einige einfache Beispiele zu erläutern.

§ 13.

Die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer absolut festen Oberfläche.

Ein *materieller Punkt* m sei in Bewegung begriffen unter dem Einfluss gegebener Kräfte. Und zwar mögen diese Kräfte von solcher Beschaffenheit sein, dass der Punkt m mit der Oberfläche eines *absolut festliegenden Körpers* M eine Zeit lang oder vielleicht auch dauernd in Berührung bleibt. Wir stellen uns die Aufgabe, die Bewegung des Punktes m während dieser Berührungszeit näher zu untersuchen, unter der Voraussetzung, dass die Oberflächen von m und M *vollkommen glatt* sind.

Da der Punkt m mit dem absolut festliegenden Körper M in Berührung zu denken ist, so wird offenbar seine augenblickliche Position im absoluten Raume d. i. mit Bezug auf das absolute Axensystem x, y, z völlig bestimmt sein durch Angabe zweier Argumente

(𝔄.) $$q_1 \,,\; q_2 \,,$$

die etwa bezeichnet werden können als die *Flächencoordinaten* von m auf der Oberfläche des Körpers M. Denken wir uns nun diese augenblickliche Position (q_1, q_2) irgend welcher Aenderung (dq_1, dq_2) unterworfen, und die Zuwüchse, welche die Coordinaten x, y, z des Punktes m während dieser Positionsveränderung erleiden, mit dx, dy, dz bezeichnet, und denken wir uns überdies die Gesammtheit aller auf den Punkt m überhaupt einwirkender Kräfte mit X, Y, Z bezeichnet, so wird die von all' diesen Kräften während der genannten Positionsveränderung verrichtete Arbeit den Werth haben:

(𝔅.) $$Xdx + Ydy + Zdz \,.$$

Zu den in Rede stehenden Kräften X, Y, Z gehört offenbar unter Anderm auch die von dem absolut festliegenden Körper M auf

den Punkt m ausgeübte Widerstandskraft. Dabei aber ist zu bemerken, *dass der von dieser Widerstandskraft herrührende Theil der Arbeit* (𝔅.) *gleich Null ist* [vgl. Art. I, pag. 180]; *so dass also diese Widerstandskraft bei Bildung des Ausdruckes* (𝔅.) *ganz fortgelassen werden darf.*

Dies vorausgeschickt, gehen wir über zu unserer eigentlichen Aufgabe, indem wir dabei Gebrauch machen von dem allgemeinen Hamilton'schen Satze [Art. I, pag. 177]:

$$(\mathfrak{C}.)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\Big[\delta T + (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\Big]dt = 0\ .$$

Bei Benutzung dieses Satzes haben wir eine von der *wirklichen* Bewegung nur unendlich wenig abweichende *fingirte* Bewegung uns vorzustellen, die von solcher Beschaffenheit sein muss, dass die Position des betrachteten Punktes m bei der fingirten und bei der wirklichen Bewegung im Augenblicke t_1 genau dieselbe ist, und dass Analoges auch stattfindet mit Bezug auf den Augenblick t_2. Demgemäss wird z. B. die Anwendbarkeit der Formel (ℭ.) keinerlei Bedenken unterliegen, wenn wir, ebenso wie die wirkliche Bewegung durch zwei noch unbekannte Functionen:

$$q_1 = F(t)\ ,\quad \text{und}\quad q_2 = G(t)$$

dargestellt ist, ebenso jene fingirte Bewegung durch zwei analoge Gleichungen uns ausgedrückt denken:

$$q_1 + \delta q_1 = F(t) + f(t)\quad \text{und}\quad q_2 + \delta q_2 = G(t) + g(t)\ ,$$

und dabei festsetzen, dass $f(t)$ und $g(t)$ unendlich kleine willkürliche Functionen sein sollen, die in den Augenblicken t_1 und t_2 verschwinden.

Solches festgesetzt, entspricht offenbar der in (ℭ.) enthaltene Ausdruck

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

der Positionsänderung $(\delta q_1, \delta q_2)$ in genau derselben Art, in welcher der vorhin betrachtete Ausdruck (𝔅.) der Positionsänderung (dq_1, dq_2) entsprach. Und es wird daher bei Bildung des einen wie des andern Ausdruckes jene vom Körper M ausgeübte Widerstandskraft ganz fortgelassen werden dürfen.

Demgemäss werden wir also in der Hamilton'schen Formel (ℭ.) *nur diejenigen Kräfte zu berücksichtigen brauchen, welche*

nach Absonderung jener Widerstandskraft noch übrig bleiben. Und Gleiches gilt somit auch von den aus der Formel (𝔈.), *durch die bekannten Methoden der Variationsrechnung, sich ergebenden Lagrange'schen Gleichungen*:

$$(\mathfrak{D}.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = X\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z\frac{\partial z}{\partial q_j}\,,$$

$$j = 1, 2,$$

wo q_j' *für* $\frac{dq_j}{dt}$ *steht.*

Hiermit sind die Behauptungen des § 11, soweit sie das gegenwärtige Beispiel betreffen, als richtig erwiesen.

§ 14.

Ueber die Bewegung eines starren Körpers.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Bewegung eines starren Körpers M von beliebiger Grösse und Gestalt unter dem Einfluss gegebener Kräfte näher zu untersuchen.

Die augenblickliche Position des Körpers M im absoluten Raume, d. i. mit Bezug auf das absolute Axensystem x, y, z ist offenbar völlig bestimmt durch Angabe von sechs Argumenten:

$$(\alpha.)\qquad q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6\ .$$

Denkt man sich die Position $(q_1, q_2 \cdots q_6)$ irgend welcher Aenderung $(dq_1, dq_2 \cdots dq_6)$ unterworfen, so wird die während dieser Positionsänderung von den einwirkenden Kräften geleistete Arbeit dargestellt sein durch die über alle Massentheilchen m des Körpers M sich ausdehnende Summe

$$(\beta.)\qquad \sum (X dx + Y dy + Z dz)\ .$$

Dabei bezeichnet (dx, dy, dz) die jener Positionsänderung entsprechende Verschiebung eines einzelnen Massentheilchens $m(x, y, z)$; während unter (X, Y, Z) die Gesammtheit aller auf dieses Theilchen $m(x, y, z)$ überhaupt einwirkender Kräfte zu verstehen ist; so dass also zu diesen Kräften (X, Y, Z) z. B. auch die auf m von Seiten der umgebenden Theilchen ausgeübten Cohäsionskräfte gehören. Dabei aber ist zu bemerken, *dass der von den Cohäsionskräften herrührende Theil der Arbeit* (β.) *gleich Null ist* [Satz Art. I, pag. 178]; *so dass also bei Bildung des*

Ausdruckes (β.) *die Cohäsionskräfte ganz fortgelassen werden dürfen.*

Dies vorausgeschickt, gehen wir über zu unserer eigentlichen Aufgabe, indem wir auf das System der den Körper M constituirenden Massentheilchen m den allgemeinen Hamilton'schen Satz [Art. I, pag. 177, 178]:

$$(\gamma.)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta T + \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\right]dt = 0$$

in Anwendung bringen. Dabei können wir uns die hier in Betracht kommende fingirte Bewegung eingerichtet denken nach Maassgabe irgend welcher willkürlich von der Zeit abhängender unendlich kleiner Functionen

$$\delta q_1, \delta q_2 \cdots \delta q_6\ ,$$

die in den Augenblicken t_1 und t_2 Null sind. Alsdann entspricht der in (γ.) enthaltene Ausdruck

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

der Positionsänderung ($\delta q_1, \delta q_2 \cdots \delta q_6$) in genau derselben Weise, wie der früher betrachtete Ausdruck (β.) der Positionsänderung ($dq_1, dq_2 \cdots dq_6$) entsprach. Und es werden daher bei Bildung des einen wie des anderen Ausdruckes die Cohäsionskräfte ganz fortgelassen werden dürfen.

Demgemäss werden wir also in der Hamilton'schen Formel (γ.) *nur diejenigen Kräfte zu berücksichtigen brauchen, welche nach Absonderung der Cohäsionskräfte noch übrig bleiben. Gleiches gilt daher auch von den aus der Formel* (γ.) *sich ergegebenden Lagrange'schen Gleichungen:*

$$(\delta.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z\frac{\partial z}{\partial q_j}\right),$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Hiermit sind die Behauptungen des § 11, so weit sie das gegenwärtige Beispiel betreffen, als richtig constatirt.

§ 15.

Ueber die Bewegung zweier starrer Körper, die durch eine Drehungsaxe mit einander verbunden sind.

Es seien zwei starre Körper M_1 und M_2 gegeben von beliebiger Gestalt. Und zwar sei in den Körper M_1 eine cylin-

drische Axe eingefügt, um welche der Körper M_2 (nach Art eines Rades) drehbar ist; derart, dass jedwede relative Bewegung des einen Körpers in Bezug auf den andern immer nur in einer Drehung um diese Axe bestehen kann. Wir betrachten jene cylindrische Axe als einen Theil des Körpers M_1, und denken uns die beiden Körper M_1 und M_2 frei beweglich im absoluten Raume. Sodann aber stellen wir uns die Aufgabe, die Bewegung dieses Systems M_1, M_2 unter dem Einfluss *gegebener Kräfte* näher zu untersuchen, unter der Voraussetzung, dass die einander berührenden Oberflächentheile der Körper M_1 und M_2 *vollkommen glatt* sind.

Die augenblickliche Position des Systems M_1, M_2 im absoluten Raume, d. i. mit Bezug auf das absolute Axensystem x, y, z, ist offenbar völlig bestimmt durch Angabe von sieben Argumenten:

(*a*.) $$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7,$$

von denen die sechs ersten zur Positionsbestimmung des Körpers M_1 dienen sollen, während die siebente den Drehungswinkel der beiden Körper M_1 und M_2 gegen einander repräsentiren mag[1]). Denkt man sich die Position $(q_1, q_2 \cdots q_7)$ irgend welcher Aenderung $(dq_1, dq_2 \cdots dq_7)$ unterworfen, so wird die dabei von den einwirkenden Kräften geleistete Arbeit dargestellt sein durch die über alle Massentheilchen $m(x, y, z)$ des Systems M_1, M_2 ausgedehnte Summe:

(*b*.) $$\sum(Xdx + Ydy + Zdz) .$$

Dabei bezeichnet (dx, dy, dz) die jener Positionsänderung entsprechende Verschiebung des einzelnen Theilchens $m(x, y, z)$, und (X, Y, Z) die Gesammtheit aller auf dieses Theilchen $m(x, y, z)$ überhaupt einwirkender Kräfte.

Zu den in (*b*.) enthaltenen Kräften X, Y, Z gehören daher unter Anderm auch die innerhalb M_1 vorhandenen Cohäsionskräfte, ebenso die Cohäsionskräfte innerhalb M_2, und ebenso auch die Widerstandskräfte, mit denen die beiden Körper M_1 und M_2 gegenseitig auf einander einwirken. Dabei ist zu beachten, *dass der von diesen Cohäsions- und Widerstandskräften*

---

1) Dieser Drehungswinkel ist von zwei Ebenen gebildet zu denken, von denen die eine mit dem einen, die andere mit dem andern Körper fest verbunden ist.

herrührende Theil des Ausdruckes (b.) gleich Null ist [vgl. das Theorem Art. I, pag. 184]; *so dass also diese Cohäsions- und Widerstandskräfte bei Bildung des Ausdruckes (b.) ganz fortgelassen werden dürfen.*

Bringen wir nun auf das System M_1, M_2 den allgemeinen Hamilton'schen Satz [Art. I, pag. 177, 178]:

$$(c.)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta T+\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\right]dt=0$$

in Anwendung, und denken wir uns dabei die fingirte Bewegung eingerichtet nach Maassgabe irgend welcher willkürlich von der Zeit abhängender unendlich kleiner Functionen:

$$\delta q_1,\ \delta q_2\ \cdots\ \delta q_7\ ,$$

die in den Augenblicken t_1 und t_2 Null sind, so wird offenbar der in (c.) enthaltene Ausdruck

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

von ganz analoger Beschaffenheit sein wie der Ausdruck (b.). Und es werden daher bei Bildung des einen wie des andern Ausdruckes die Cohäsions- und Widerstandskräfte ganz fortgelassen werden dürfen.

Demgemäss werden wir also in der Hamilton'schen Formel (c.) nur diejenigen Kräfte zu berücksichtigen brauchen, welche nach Absonderung der Cohäsions- und Widerstandskräfte noch übrig bleiben. Gleiches gilt daher auch von den aus dieser Formel (c.) sich ergebenden Lagrange'schen Gleichungen:

$$(d.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_j}+Y\frac{\partial y}{\partial q_j}+Z\frac{\partial z}{\partial q_j}\right),$$

$$j=1,2,3,\cdots 7\ .$$

Hiermit sind die Behauptungen des § 11, soweit sie das gegenwärtige Beispiel betreffen, als richtig constatirt.

Bemerkung. — Denkt man sich die gegebenen Kräfte X, Y, Z der Art eingerichtet, dass der Körper M_1 fortdauernd in absoluter Ruhe bleibt, so reduciren sich die sieben Argumente (*a.*) auf ein einziges, nämlich auf den Drehungswinkel von M_2 gegen M_1. Und demgemäss erhält man alsdann, an Stelle der sieben Differentialgleichungen (*d.*), nur eine einzige.

Genauer ausgedrückt, wird zu sagen sein, dass in diesem Fall die *siebente* der Differentialgleichungen (*d.*) die Bewegung des Köpers M_2 bestimmt, während die *sechs* ersten die zum Festhalten des Körpers M_1 erforderlichen Kräfte bestimmen.

§ 16.

Ueber die Bewegung zweier starrer Körper, die einander berühren, und deren Oberflächen vollkommen glatt sind.

Es seien zwei starre Körper M_1 und M_2 gegeben, die einander immer nur in einem einzigen Punkte berühren können, wie z. B. zwei Ellipsoide, oder wie z. B. eine Kugelschaale und eine im Innern derselben befindliche Kugel. Diese beiden Körper seien in Bewegung unter dem Einfluss gegebener Kräfte. Und zwar mögen diese Kräfte von solcher Beschaffenheit sein, dass die beiden Körper eine Zeit lang oder vielleicht auch dauernd mit einander in Berührung bleiben. Es soll die Bewegung der beiden Körper während der Berührungszeit näher untersucht werden, — unter der Voraussetzung, dass ihre Oberflächen *vollkommen glatt* sind.

Da es sich nur um die Berührungszeit handelt, so wird die augenblickliche Position des Systemes M_1, M_2 mit Bezug auf das absolute Axensystem x, y, z vollkommen bestimmt sein durch Angabe von eilf Argumenten:

(A.) $$q_1, q_2, \cdots q_{11},$$

die wir übrigens auch mit

(A'.) $$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, \mathrm{v}_1, \mathrm{w}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{w}_2, \psi$$

bezeichnen werden, indem wir dabei folgende Vorstellungen acceptiren.

Auf der Oberfläche des Körpers M_1 sei ein bestimmtes System von Flächencoordinaten v_1, w_1 festgesetzt, mitsammt den ihm zugehörigen Grundcurven $\mathrm{v}_1 = \text{Const.}$ und $\mathrm{w}_1 = \text{Const.}$ Analoges sei ausgeführt auf der Oberfläche von M_2, unter Anwendung der Buchstaben v_2, w_2. Was nun die eilf Argumente (A'.) betrifft, so sollen $q_1, q_2, \cdots q_6$ zur Positionsbestimmung des Körpers M_1 dienen. Sodann aber sollen v_1, w_1 und v_2, w_2 die Flächencoordinaten des augenblicklichen Berührungspunktes der beiden Körper M_1 und M_2 vorstellen. Endlich soll ψ derjenige Winkel sein, unter welchem die durch den augenblicklichen Berührungspunkt gehenden Grundcurven $\mathrm{w}_1 = \text{Const.}$ und $\mathrm{w}_2 = \text{Const.}$ gegen einander geneigt sind. Letzteres, nämlich die Definition von ψ, bedarf noch einer etwas genaueren Darlegung, die in wenig Augenblicken gegeben werden soll.

Um die Vorstellungen zu fixiren, und zugleich zu vereinfachen, wollen wir die auf der Oberfläche von M_1 verlaufenden

Curvensysteme $v_1 =$ Const. und $w_1 =$ Const. zu einander *orthogonal* uns denken. Ueberdies wollen wir jede Curve $w_1 =$ Const., gerechnet in der Richtung des *wachsenden* v_1, kurzweg als eine Curve v_1, und umgekehrt jede Curve $v_1 =$ Const., gerechnet in der Richtung des *wachsenden* w_1, als eine Curve w_1 bezeichnen. Markiren wir nun auf der betrachteten Oberfläche irgend zwei einander benachbarte Punkte (v_1, w_1) und $(v_1 + dv_1, w_1 + dw_1)$, so wird das von diesen beiden Punkten begrenzte Linienelement ds_1 darstellbar sein durch eine Formel von der Gestalt:

$$(\varepsilon.) \qquad ds_1^2 = f_1^2 dv_1^2 + g_1^2 dw_1^2 ,$$

wo f_1 und g_1 bestimmte Functionen von v_1, w_1 sind, welche man die *Differentialparameter* zu nennen pflegt.

Die Bedeutung dieser Parameter f_1, g_1, welche stets als *positiv* betrachtet werden sollen, ist leicht angebbar. Geht man nämlich vom Punkte (v_1, w_1) in der Richtung der Curve v_1 (also in der Richtung des *wachsenden* v_1) fort bis zum nächstfolgenden Punkte $(v_1 + dv_1, w_1)$, so ergiebt sich für das in solcher Weise durchlaufene Wegelement ds_1 aus der vorstehenden Formel der Ausdruck: $ds_1 = \pm f_1 dv_1$. Hier aber ist, weil f_1 und dv_1 beide positiv sind, und ds_1 (als absolute Länge des Linienelementes) ebenfalls positiv ist, das *obere* Zeichen zu nehmen; so dass man also erhält

$$(\varepsilon'.) \qquad ds_1 = f_1 dv_1 , \text{ d. i. } f_1 = \frac{ds_1}{dv_1} .$$

Demgemäss ist f_1 zu bezeichnen *als ein Element der Curve* v_1, *dasselbe dividirt durch den zugehörigen Zuwachs von* v_1. Desgleichen ergiebt sich für ein Element ds_1 der Curve w_1 die Formel:

$$(\varepsilon''.) \qquad ds_1 = g_1 dw_1 , \text{ d. i. } g_1 = \frac{ds_1}{dw_1} ;$$

so dass also dieses g_1 bezeichnet werden kann *als ein Element der Curve* w_1, *dasselbe dividirt durch den zugehörigen Zuwachs von* w_1.

Analoge Festsetzungen mögen andererseits getroffen werden auf der Oberfläche des Körpers M_2; so dass z. B. für das zwei Punkte (v_2, w_2) und $(v_2 + dv_2, w_2 + dw_2)$ dieser Oberfläche verbindende Linienelement ds_2 die Formel gilt:

$$(\zeta.) \qquad ds_2^2 = f_2^2 dv_2^2 + g_2^2 dw_2^2 ,$$

wo f_2 und g_2, die sogenannten *Differentialparameter*, bestimmte *positive* Functionen der Argumente v_2, w_2 vorstellen.

Solches festgesetzt, *soll nun unter ψ derjenige Winkel verstanden sein, unter welchem die Richtungen der durch den augenblicklichen Berührungspunkt gehenden Curven* v_1 *und* v_2 *gegen einander geneigt sind.*

Bemerkung. — Aus der Definition der Argumente $(A.)$ oder $(A'.)$ folgt sofort, dass zur Positionsbestimmung des Körpers M_1 nur die sechs ersten Argumente $q_1, q_2, \ldots q_6$ erforderlich sind. Dies überträgt sich auf die einzelnen Elemente des Körpers. Sind mithin x_1, y_1, z_1 die Coordinaten für irgend ein solches Element m_1, so werden x_1, y_1, z_1 nur von $q_1, q_2, \ldots q_6$, nicht aber von v_1, w_1, v_2, w_2, ψ abhängen.

Anders verhält es sich offenbar mit den Massenelementen m_2 des Körpers M_2. Denn die Coordinaten x_2, y_2, z_2 eines solchen Elementes werden sowohl von $q_1, q_2, \ldots q_6$, wie auch von v_1, w_1, v_2, w_2, ψ abhängig sein.

Denkt[1] man sich die augenblickliche Position $(q_1, q_2, \cdots q_{11})$ des Systems M_1, M_2 irgend welcher Aenderung $(dq_1, dq_2, \cdots dq_{11})$ unterworfen, und die von allen auf M_1, M_2 einwirkenden Kräften während dieser Positionsveränderung verrichtete Arbeit mit

$$(B.) \qquad \sum (Xdx + Ydy + Zdz)$$

bezeichnet, *so wird der von den Cohäsions- und Widerstandskräften herrührende Theil dieser Arbeit gleich* Null *sein* [Theorem, Art. I, pag. 184]; *so dass man also bei Bildung dieses Ausdruckes* $(B.)$ *die Cohäsions- und Widerstandskräfte ganz fortlassen darf.*

Dies vorangeschickt, gehen wir über zu unserer eigentlichen Aufgabe, indem wir auf die zu untersuchende Bewegung des Systems M_1, M_2 den allgemeinen HAMILTON'schen Satz [Art. I, pag. 177, 178] in Anwendung bringen:

$$(C.) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta T + \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\right] dt = 0 \ .$$

Dabei können wir die fingirte Bewegung uns eingerichtet denken nach Maassgabe irgend welcher willkürlich von der Zeit abhängender unendlich kleiner Functionen

$$\delta q_1, \ \delta q_2, \ \cdots \ \delta q_{11} \ ,$$

welche in den Augenblicken t_1 und t_2 verschwinden. Alsdann ist der in $(C.)$ enthaltene Ausdruck

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

1) Zur Bezeichnung der besprochenen eilf Argumente werden wir, je nach unserem Belieben, bald die in $(A.)$, bald die in $(A'.)$ angegebenen Buchstaben benutzen.

von analoger Beschaffenheit wie der Ausdruck (*B.*). Und es werden daher bei Bildung des einen wie des andern Ausdruckes die Cohäsions- und Widerstandskräfte fortgelassen werden dürfen.

Demgemäss brauchen wir also in der Hamilton'schen Formel (*C.*) *nur diejenigen Kräfte zu berücksichtigen, welche nach Absonderung der Cohäsions- und Widerstandskräfte noch übrig bleiben. Gleiches gilt somit auch von den aus* (*C.*) *sich ergebenden Lagrange'schen Differentialgleichungen:*

$$(D.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z\frac{\partial Z}{\partial q_j}\right),$$

$$j = 1, 2, \cdots 11 .$$

Hiermit sind die Behauptungen des § 11, soweit sie das gegenwärtige Beispiel betreffen, als richtig constatirt.

Bemerkung. — Denkt man sich die einwirkenden Kräfte von solcher Beschaffenheit, dass der Körper M_1 fortdauernd in Ruhe bleibt, so reduciren sich die eilf Argumente (*A.*) oder (*A'.*) auf nur *fünf*, nämlich auf v_1, w_1, v_2, w_2. ψ; während die Anzahl der Differentialgleichungen eine analoge Reduction erfährt.

Genauer ausgedrückt, wird zu sagen sein, dass in diesem Fall die *fünf* letzten der Differentialgleichungen (*D.*) die Bewegung des Körpers M_2 bestimmen, während die *sechs* ersten dienen können zur näheren Bestimmung der zum Festhalten des Körpers M_1 erforderlichen Kräfte.

§ 17.

Betrachtung des Falles, dass die Oberflächen der beiden Körper vollkommen rauh sind.

Es soll die Aufgabe des vorhergehenden Paragraphs von Neuem in Betracht gezogen werden, nur mit dem Unterschiede, dass die Oberflächen der beiden Körper M_1 und M_2 nicht als vollkommen glatt, sondern im Gegentheil als *vollkommen rauh* vorausgesetzt sein mögen. Bedienen wir uns nun zur Positionsbestimmung des Systems M_1, M_2 wiederum der eilf Argumente

$$(1.)\qquad q_1, q_2, \cdots q_6, v_1, w_1, v_2, w_2, \psi ,$$

so tritt, im Vergleich mit dem vorhergehenden Paragraph, der Unterschied ein, dass die Zuwüchse dieser Argumente während der Zeit dt nicht mehr von einander unabhängig, sondern vielmehr durch zwei bestimmte Relationen

$$(2.)\qquad \begin{aligned} dv_1 &= F dv_2 + G dw_2 , \\ dw_1 &= H dv_2 + J dw_2 \end{aligned}$$

an einander gefesselt sind. Dabei bezeichnen F, G, H, J bestimmte Functionen von v_1, w_1, v_2, w_2, ψ. Diese Relationen, auf deren Ableitung am Schluss dieses Paragraphs näher eingegangen werden soll, ergeben sich direct aus der gemachten Voraussetzung, dass die Oberflächen der beiden Körper vollkommen rauh sind, und dass also ein Gleiten der einen Oberfläche längs der andern schlechterdings unmöglich ist.

Betrachtet man irgend eine dem gegenwärtigen Charakter des Systems M_1, M_2, d. i. den Differentialgleichungen (2.) entsprechende Positionsänderung:

(3.) $$dq_1,\ dq_2,\ \cdots\ dq_6,\ dv_1,\ dw_1,\ dv_2,\ dw_2,\ d\psi\ ,$$

und bezeichnet man die während dieser Positionsänderung von allen überhaupt einwirkenden Kräften geleistete Arbeit mit

(4.) $$\sum(Xdx + Ydy + Zdz)\ ,$$

so wird derjenige Theil dieser Arbeit, welcher von den Cohäsions- und Widerstandskräften herrührt, gleich ***Null*** *sein* [Theorem, Art. I, pag. 184]; *so dass also diese Cohäsions- und Widerstandskräfte bei Bildung des Ausdruckes* (4.) *ganz fortgelassen werden dürfen.*

Zur Lösung der gestellten Aufgabe bringen wir nun den allgemeinen HAMILTON'schen Satz [Art. I, pag. 177, 178] in Anwendung:

(5.) $$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta T + \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\right]dt = 0\ ,$$

indem wir dabei die fingirte Bewegung uns eingerichtet denken nach Maassgabe irgend welcher willkürlich von der Zeit abhängender Functionen:

(6.) $$\delta q_1,\ \delta q_2,\ \cdots\ \delta q_6,\ \delta v_1,\ \delta w_1,\ \delta v_2,\ \delta w_2,\ \delta\psi\ ,$$

die durchweg unendlich klein sind und in den Zeitaugenblicken t_1 und t_2 verschwinden. Abgesehen von diesen beiden für die Gültigkeit der HAMILTON'schen Formel (5.) nothwendigen Bedingungen, wollen wir die Functionen (6.) noch einer gewissen dritten Bedingung unterwerfen, die für die Gültigkeit jener Formel *nicht* nothwendig ist, die aber für unsere Zwecke von Vortheil ist, und die darin bestehen soll, dass dieselben den Relationen

(7.) $$\begin{aligned}\delta v_1 &= F\delta v_2 + G\delta w_2\ ,\\ \delta w_1 &= H\delta v_2 + J\delta w_2\end{aligned}$$

entsprechen; so dass also diese Functionen (6.), Alles zusammengefasst, folgenden drei Bedingungen unterworfen sein sollen:

(8.) $\begin{cases} \alpha. & \text{Sie sollen durchweg unendlich klein sein;} \\ \beta. & \text{Sie sollen in den Augenblicken } t_1 \text{ und } t_2 \text{ verschwinden;} \\ \gamma. & \text{Sie sollen den Relationen (7.) Genüge leisten.} \end{cases}$

Beiläufige Bemerkungen. — Man kann im Ganzen dreierlei Arten von Bewegungen unterscheiden: die noch unbekannte *wirkliche* Bewegung, ferner die von dieser nur unendlich wenig verschiedene *fingirte* Bewegung, und endlich eine dritte Art von Bewegung, welche die *Uebergangsbewegung* heissen mag.

Denken wir uns nämlich die gestellte Aufgabe gelöst, mithin die

(A.) $$q_1, q_2, \cdots q_6, v_1, w_1, v_2, w_2, \psi$$

als Functionen der Zeit bestimmt, so entspricht diesen Functionen die *wirkliche* Bewegung. In genau derselben Weise entspricht die *fingirte* Bewegung gewissen anderen Functionen

(B.) $$q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, \cdots q_6+\delta q_6, v_1+\delta v_1, w_1+\delta w_1, v_2+\delta v_2, w_2+\delta w_2, \psi+\delta\psi,$$

die von jenen nur unendlich wenig abweichen. Betrachten wir endlich diejenigen beiden Positionen, welche das System M_1, M_2 in ein und demselben Augenblick t bei der wirklichen und bei der fingirten Bewegung besitzt, und lassen wir das System direct aus der einen dieser beiden Positionen in die andere übergehen, so mag die so definirte Bewegung eine *Uebergangsbewegung* heissen.

Die *wirkliche* Bewegung wird selbstverständlich dem Charakter des gegebenen materiellen Systems, also z. B. auch den Relationen (2.) entsprechen. Genau dasselbe gilt aber auch von der *Uebergangsbewegung*; denn die

(C.) $$\delta q_1, \delta q_2, \cdots \delta q_6, \delta v_1, \delta w_1, \delta v_2, \delta w_2, \delta\psi$$

sind von uns den Relationen (7.) unterworfen worden. — Hingegen wird die *fingirte* Bewegung dem Charakter des Systems im Allgemeinen *nicht* entsprechen. Denn dazu würde erforderlich sein, dass, ebenso wie die Functionen (A.) den Relationen (2.) entsprechen, ebenso die Functionen (B.) folgenden analogen Relationen

(D.) $$\begin{aligned} d(v_1+\delta v_1) &= (F+\delta F)\, d(v_2+\delta v_2) + (G+\delta G)\, d(w_2+\delta w_2), \\ d(w_1+\delta w_1) &= (H+\delta H)\, d(v_2+\delta v_2) + (J+\delta J)\, d(w_2+\delta w_2) \end{aligned}$$

Genüge leisteten; was im Allgemeinen *keineswegs* der Fall ist, — es sei denn, dass wir die Functionen (C.), ausser den Bedingungen (8. α, β, γ), noch irgend welchen anderen Beschränkungen unterwerfen wollten.

Das unterlassen wir. Und wir bedienen uns also bei Anwendung des Hamilton'schen Satzes (5.) einer fingirten Bewegung, die dem Charakter des gegebenen materiellen Systems *keineswegs* entspricht. Das aber ist für die Anwendung jenes Satzes auch nicht erforderlich. In der That haben wir schon vorhin bemerkt [vgl. den Uebergang von (6.) zu (7.)], dass für die Gültigkeit jenes Satzes lediglich die Erfüllung der beiden Bedingungen (8. α, β) erforderlich ist.

Ebenso wie der in (4.) betrachtete Ausdruck

$$\sum (Xdx + Ydy + Zdz)$$

sich bezog auf irgend eine den Relationen

$$dv_1 = Fdv_2 + Gdw_2 ,$$
$$dw_1 = Hdv_2 + Jdw_2$$

entsprechende Positionsänderung

$$dq_1 , dq_2 , \cdots dq_6 , dv_1 , dw_1 , dv_2 , dw_2 , d\psi ;$$

in genau derselben Weise bezieht sich der im Hamilton'schen Satze (3.) enthaltene Ausdruck

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) ,$$

zufolge unserer Festsetzungen, auf eine den Relationen

$$\delta v_1 = F\delta v_2 + G\delta w_2 ,$$
$$\delta w_1 = H\delta v_2 + J\delta w_2$$

entsprechende Positionsänderung:

$$\delta q_1 , \delta q_2 , \cdots \delta q_6 , \delta v_1 , \delta w_1 , \delta v_2 , \delta w_2 , \delta \psi .$$

Demgemäss wird von diesem letzteren Ausdruck genau dasselbe gelten, was bei (4.) vom ersteren gesagt wurde. Es werden also bei Bildung des einen wie des anderen Ausdrucks die Cohäsions- und Widerstandskräfte ganz fortgelassen werden dürfen.

Wir gelangen somit zu dem Resultate, dass man in der Hamilton'schen Formel

$$(9.) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Big[\delta T + \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\Big] dt = 0 ,$$

bei Voraussetzung der Relationen

$$(10.) \qquad \begin{aligned} \delta v_1 &= F\delta v_2 + G\delta w_2 , \\ \delta w_1 &= H\delta v_2 + J\delta w_2 , \end{aligned}$$

nur diejenigen Kräfte zu berücksichtigen braucht, welche nach Absonderung der Cohäsions- und Widerstandskräfte noch übrig bleiben. Gleiches gilt daher auch von den aus jener Formel (9.) *mit*

Rücksicht auf die Bedingungen (10.) *sich ergebenden eilf Differentialgleichungen. Diese leztern sind dargestellt durch die sechs Formeln:*

$$(11.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z\frac{\partial z}{\partial q_j}\right),$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

und überdies durch folgende fünf Formeln:

$$(12.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{v}_1'} - \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{v}_1} = \sum_{M_2}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{v}_1} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{v}_1} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{v}_1}\right) + \lambda, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{w}_1'} - \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{w}_1} = \sum_{M_2}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{w}_1} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{w}_1} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{w}_1}\right) + \mu, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{v}_2'} - \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{v}_2} = \sum_{M_2}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{v}_2} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{v}_2} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{v}_2}\right) - \lambda F - \mu H, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{w}_2'} - \dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{w}_2} = \sum_{M_2}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{w}_2} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{w}_2} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{w}_2}\right) - \lambda G - \mu J, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \psi'} - \dfrac{\partial T}{\partial \psi} = \sum_{M_2}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial \psi} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \psi} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \psi}\right), \end{cases}$$

wo die neu hinzugetretenen Factoren λ, μ *unbekannte Functionen der Zeit vorstellen.* **Die in den Formeln (12.) enthaltenen Summen können beschränkt gedacht werden auf die den Körper M_2 sollicitirenden Kräfte, wie solches angedeutet ist durch den dem Summenzeichen beigefügten Index M_2. Denn die Angriffspunkte der den Körper M_1 sollicitirenden Kräfte, d. i. die Massenelemente dieses Körpers M_1 besitzen Coordinaten x, y, z, welche von v_1, w_1, v_2, w_2, ψ *unabhängig* sind [vgl. die Bemerkung pag. 31].**

Fügt man schliesslich zu den *eilf* Gleichungen (11.), (12.) noch hinzu die beiden Relationen (2.):

$$(13.)\qquad \begin{aligned} d\mathrm{v}_1 &= F d\mathrm{v}_2 + G d\mathrm{w}_2, \\ d\mathrm{w}_1 &= H d\mathrm{v}_2 + J d\mathrm{w}_2, \end{aligned}$$

so hat man im Ganzen *dreizehn* Gleichungen, mittelst deren die *dreizehn* Unbekannten

$$(14.)\qquad q_1,\ q_2,\ \cdots\ q_6,\ \mathrm{v}_1,\ \mathrm{w}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \mathrm{w}_2,\ \psi \text{ und } \lambda,\ \mu$$

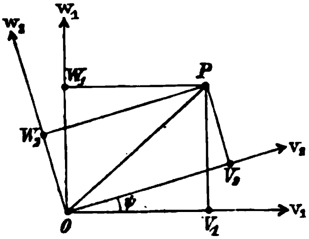
sich als Functionen der Zeit bestimmen lassen.

Nachträgliche Begründung der Formeln (2.) **pag. 32.** — Während der zu untersuchenden noch unbekannten Bewegung der beiden Körper M_1 und M_2 wird ihr gegenseitiger Berührungspunkt von Augenblick zu Augenblick seine Lage ändern sowohl auf der Oberfläche des *einen*, wie auch auf der des *andern* Körpers. Mithin wird derselbe auf jeder der beiden Oberflächen eine gewisse Curve beschreiben. Diese beiden Curven seien bezeichnet mit $A_1 B_1 C_1 D_1 \cdots$ und $A_2 B_2 C_2 D_2 \cdots$; der Art, dass im *ersten* Augenblick die beiden Punkte A_1, A_2 coincidiren, und zusammengenommen den Berührungspunkt der beiden Körper repräsentiren, während im *zweiten* Augenblick der Berührungspunkt in gleicher Weise durch B_1, B_2, im *dritten* durch C_1, C_2 dargestellt ist, u. s. f. Alsdann werden, weil die Oberflächen der beiden Körper *vollkommen rauh*, somit gleitende Bewegungen unmöglich sind, die Gleichungen stattfinden:

$$(A_1 B_1) = (A_2 B_2)\,, \quad (B_1 C_1) = (B_2 C_2)\,, \quad (C_1 D_1) = (C_2 D_2)\,, \quad \text{etc. etc.}$$

Kurz, es werden die beiden Curven, ohne zu gleiten, *auf einander fortrollen*, oder (wie man wohl auch sagen kann) *von einander sich abwickeln*. Bezeichnet man also dasjenige Linienelement, welches die beiden Curven im Augenblick t mit einander gemein haben, mit OP, so kann man etwa O als den Berührungspunkt der beiden Körper im Augenblick t, und P als ihren Berührungspunkt im Augenblick $t + dt$ ansehen. Dieses in der gemeinschaftlichen Tangentialebene der beiden Körper gelegene Element OP sei dargestellt in der hier folgenden Zeichnung; und die Ebene dieser Zeichnung sei die soeben genannte Tangentialebene.

Die beiden durch O gehenden Grundcurven v_1 und w_1 sind nach unserer Voraussetzung (pag. 30) *orthogonal*, so dass also der Winkel $v_1 O w_1$ ein rechter ist. Gleiches gilt, was den anderen Körper betrifft, von den durch O gehenden Grundcurven v_2 und w_2, so dass also der Winkel $v_2 O w_2$ ebenfalls ein rechter ist. Ueberdies wird der Winkel ψ, nach unserer Definition (pag. 31), dargestellt sein durch den Winkel $v_1 O v_2$.



Denkt man sich jetzt die vier Punkte V_1, W_1 und V_2, W_2 auf den genannten vier Grundcurven in solcher Weise markirt,

dass jedes der beiden Vierecke OV_1PW_1 und OV_2PW_2 ein *Rechteck* ist, so ergeben sich die Formeln:

$$(\alpha.)\qquad \begin{aligned} OV_1 &= OV_2 \cos\psi - OW_2 \sin\psi\ , \\ OW_1 &= OV_2 \sin\psi + OW_2 \cos\psi\ . \end{aligned}$$

Nun repräsentiren O und P den gegenseitigen Berührungspunkt der beiden Körper in den Augenblicken t und $t + dt$. Bezeichnet man demgemäss den Punkt O, was seine Coordinaten auf der einen und andern Oberfläche betrifft, mit

$$(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1) \text{ und } (\mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_2)\ ,$$

andererseits aber den Punkt P in entsprechender Weise mit

$$(\mathfrak{v}_1 + d\mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1 + d\mathfrak{w}_1) \text{ und } (\mathfrak{v}_2 + d\mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_2 + d\mathfrak{w}_2)\ ,$$

so gelten die Formeln:

$$(\beta.)\qquad \begin{aligned} OV_1 &= f_1 d\mathfrak{v}_1\ , \qquad & OV_2 &= f_2 d\mathfrak{v}_2\ , \\ OW_1 &= g_1 d\mathfrak{w}_1\ , & OW_2 &= g_2 d\mathfrak{w}_2\ , \end{aligned}$$

wo f_1, g_1 und f_2, g_2 die auf pag. 30 eingeführten stets positiven Functionen von $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$, resp. $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{w}_2$ vorstellen. Substituirt man diese Werthe (β.) in (α.), so folgt:

$$(\gamma.)\qquad \begin{aligned} f_1 d\mathfrak{v}_1 &= f_2 \cos\psi\, d\mathfrak{v}_2 - g_2 \sin\psi\, d\mathfrak{w}_2\ , \\ g_1 d\mathfrak{w}_1 &= f_2 \sin\psi\, d\mathfrak{v}_2 + g_2 \cos\psi\, d\mathfrak{w}_2\ , \end{aligned}$$

oder, falls man die eine Formel durch f_1, die andere durch g_1 dividirt:

$$(\delta.)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{v}_1 &= F d\mathfrak{v}_2 + G d\mathfrak{w}_2\ , \\ d\mathfrak{w}_1 &= H d\mathfrak{v}_2 + J d\mathfrak{w}_2\ , \end{aligned}$$

wo alsdann F, G, H, J folgende von $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{w}_2$, ψ abhängende Functionen vorstellen:

$$(\varepsilon.)\qquad \begin{aligned} F &= \frac{f_2 \cos\psi}{f_1}\ , \qquad & G &= \frac{-g_2 \sin\psi}{f_1}\ , \\ H &= \frac{f_2 \sin\psi}{g_1}\ , & J &= \frac{g_2 \cos\psi}{g_1}\ . \end{aligned}$$

Die Formeln (δ.) repräsentiren aber die abzuleitenden Gleichungen (2.) pag. 32.

§ 18.

Uebergang zu dem speciellen Falle, dass von den beiden vollkommen rauhen Oberflächen die eine eine Ebene ist.

Die einwirkenden Kräfte seien von solcher Beschaffenheit, dass der Körper M_1 fortdauernd in *absoluter Ruhe* bleibt, so dass also die zur Positionsbestimmung dieses Körpers dienenden Argumente $q_1, q_2, \cdots q_6$ fortdauernd *constant* bleiben. Alsdann können die diesen $q_1, q_2, \cdots q_6$ entsprechenden Gleichungen (11.) pag. 36, als unnöthig fortgelassen werden; so dass also nur noch die Gleichungen (12.) und (13.), d. i. folgende *sieben* Gleichungen übrig bleiben:

$$(1.)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathrm{v}_1'} - \frac{\partial T}{\partial \mathrm{v}_1} = \sum_{M_2}\left(X\frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}_1} + Y\frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}_1} + Z\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}_1}\right) + \lambda,$$

$$(2.)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathrm{w}_1'} - \frac{\partial T}{\partial \mathrm{w}_1} = \sum_{M_2}\left(X\frac{\partial x}{\partial \mathrm{w}_1} + Y\frac{\partial y}{\partial \mathrm{w}_1} + Z\frac{\partial z}{\partial \mathrm{w}_1}\right) + \mu,$$

$$(3.)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathrm{v}_2'} - \frac{\partial T}{\partial \mathrm{v}_2} = \sum_{M_2}\left(X\frac{\partial x}{\partial \mathrm{v}_2} + Y\frac{\partial y}{\partial \mathrm{v}_2} + Z\frac{\partial z}{\partial \mathrm{v}_2}\right) - \lambda F - \mu H,$$

$$(4.)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathrm{w}_2'} - \frac{\partial T}{\partial \mathrm{w}_2} = \sum_{M_2}\left(X\frac{\partial x}{\partial \mathrm{w}_2} + Y\frac{\partial y}{\partial \mathrm{w}_2} + Z\frac{\partial z}{\partial \mathrm{w}_2}\right) - \lambda G - \mu J,$$

$$(5.)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \sum_{M_2}\left(X\frac{\partial x}{\partial \psi} + Y\frac{\partial y}{\partial \psi} + Z\frac{\partial z}{\partial \psi}\right),$$

$$(6.)\qquad d\mathrm{v}_1 = F d\mathrm{v}_2 + G d\mathrm{w}_2,$$

$$(7.)\qquad d\mathrm{w}_1 = H d\mathrm{v}_2 + J d\mathrm{w}_2,$$

welche ausreichend sind, um die *sieben* Unbekannten

$$(8.)\qquad \mathrm{v}_1, \mathrm{w}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{w}_2, \psi \text{ und } \lambda, \mu$$

als Functionen der Zeit zu berechnen, und in solcher Weise die Bewegung des Körpers M_2 zu bestimmen.

Wir wollen uns den absolut unbeweglichen Körper M_1 mit der Erde fest verbunden denken, indem wir dabei die Voraussetzung machen, *die Erde befinde sich im Weltraum in absoluter Ruhe.* Abgesehen von den vorhandenen Cohäsions- und Widerstandskräften, und abgesehen von den zum Festhalten des Körpers

M_1 erforderlichen Kräften, mag das System M_1, M_2 nur noch dem Einfluss der *Schwere* unterliegen. Dabei wollen wir die gewöhnliche Vorstellung adoptiren, dass die auf irgend ein Massentheilchen m einwirkende Schwerkraft $= mg$ ist, wo g eine *Constante* vorstellt, und dass die Richtung dieser Kraft ebenfalls *constant* ist. Ueberdies mag das absolute Axensystem x, y, z so gewählt sein, dass seine x-Axe die der Richtung der Schwere entgegengesetzte Richtung besitzt; so dass also die Componenten jener Kraft mg die Werthe haben:

$$X = -mg\,, \quad Y = 0\,, \quad Z = 0\,.$$

In den Formeln (1.), (2.), ⋯ (5.) dürfen nun die Cohäsions- und Widerstandskräfte fortgelassen werden [vgl. pag. 35, 36]; so dass also nur noch die von der *Schwere* herrührenden Kräfte und die zum *Festhalten des Körpers M_1* dienenden Kräfte übrig bleiben. Die letzteren fallen aber ebenfalls fort, weil in jenen in (1.), (2.), ⋯ (5.) vorhandenen Summen, wie durch den beigefügten Index M_2 angedeutet ist, nur die den Körper M_2 sollicitirenden Kräfte in Rechnung zu bringen sind.

Demgemäss bleiben, was die Gleichungen (1.), (2.), ... (5.) betrifft, als wirklich zu berücksichtigende Kräfte nur allein noch übrig die den Körper M_2 sollicitirenden Schwerkräfte:

$$X = -mg\,, \quad Y = 0\,, \quad Z = 0\,;$$

so dass also z. B. die in (5.) enthaltene Summe den Werth annimmt:

$$-\sum_{M_2} mg\,\frac{\partial x}{\partial \psi} = -g\,\frac{\partial}{\partial \psi}\Big(\sum_{M_2} mx\Big)\,,$$

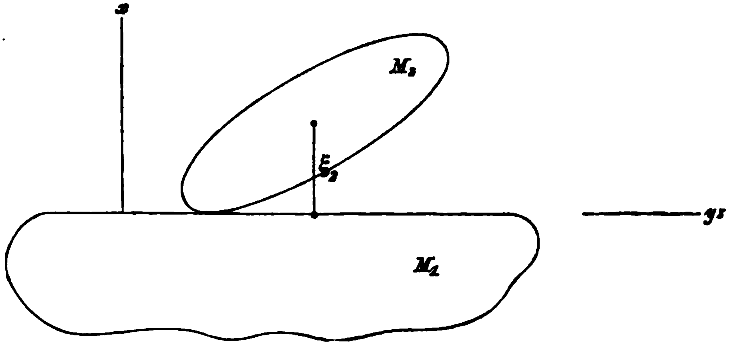
ein Werth, welcher offenbar [vgl. etwa Art. I, pag. 167] auch so darstellbar ist:

$$-g\,\frac{\partial}{\partial \psi}\,(M_2\,\xi_2) = -gM_2\,\frac{\partial \xi_2}{\partial \psi}\,.$$

Dabei bezeichnet M_2 die Gesammtmasse des Körpers M_2, und ξ_2 die x-Coordinate des *Massenmittelpunktes* dieses Körpers. In solcher Weise reduciren sich die in (1.), (2.), (3.), (4.), (5.) enthaltenen Summen respective auf:

$$(9.)\quad -gM_2\,\frac{\partial \xi_2}{\partial \mathfrak{v}_1}\,,\; -gM_2\,\frac{\partial \xi_2}{\partial \mathfrak{w}_1}\,,\; -gM_2\,\frac{\partial \xi_2}{\partial \mathfrak{v}_2}\,,\; -gM_2\,\frac{\partial \xi_2}{\partial \mathfrak{w}_2}\,,\; -gM_2\,\frac{\partial \xi_2}{\partial \psi}\,.$$

Wir wollen nun weiter annehmen, die vom Körper M_2 berührte *obere Seite* des festliegenden Körpers M_1 sei eine *horizontale Ebene*, d. h. senkrecht zur constanten Richtung der Schwere. Auch wollen wir diese Horizontalebene geradezu zur yz-Ebene



uns gewählt denken; so dass also ξ_2 das vom Massenmittelpunkte des Körpers auf diese Horizontalebene herabgelassene Perpendikel repräsentirt. Alsdann wird offenbar ξ_2 völlig bestimmt sein, sobald nur diejenige Oberflächenstelle (v_2, w_2) des Körpers M_2 gegeben ist, welche derselbe augenblicklich der Berührung darbietet. Es wird mithin ξ_2 lediglich von v_2, w_2 abhängen; so dass also die Ausdrücke (9.) sich reduciren auf:

$$(10.)\qquad \text{Null}\,,\quad \text{Null}\,,\quad -gM_2\frac{\partial\xi_2}{\partial v_2}\,,\quad -gM_2\frac{\partial\xi_2}{\partial w_2}\,,\quad \text{Null}\,.$$

Aber auch die *linken* Seiten der Formeln (1.), (2.), ··· (5.) sind gegenwärtig einer bedeutenden Vereinfachung fähig, falls man nur festsetzt, dass die in der Horizontalebene yz angenommenen Grundcurven v_1 und w_1 durch zwei einander senkrechte Systeme *gerader Linien* dargestellt sein sollen, nämlich festsetzt, dass die Variable v_1 identisch mit y, und ebenso w_1 identisch mit z sein soll. Alsdann sind offenbar die diesen Grundcurven oder Grundlinien entsprechenden Functionen f_1 und g_1 beide $= 1$ [vgl. die für f_1 und g_1 gegebene Definition pag. 30]. Hierdurch gewinnen die Functionen F, G, H, J [(ε.) pag. 38] die Gestalt:

$$F = f_2 \cos\psi\,,\qquad G = -\,g_2 \sin\psi\,,$$
$$H = f_2 \sin\psi\,,\qquad J = g_2 \cos\psi\,;$$

so dass also die Gleichungen (6.), (7.) übergehen in.

$$(11.)\qquad \begin{aligned} dv_1 &= f_2 \cos\psi\, dv_2 - g_2 \sin\psi\, dw_2\,, \\ dw_1 &= f_2 \sin\psi\, dv_2 + g_2 \cos\psi\, dw_2\,. \end{aligned}$$

Was nun jene *linken* Seiten der Formeln (1.), (2.), ··· (5.) anbelangt, so repräsentirt das dort auftretende T (weil der Körper M_1 in absoluter Ruhe ist) die lebendige Kraft *des Körpers* M_2 *allein*. Diese lebendige Kraft des Körpers M_2 ist offenbar abhängig von

$$(\alpha.)\qquad v_1,\, w_1,\, v_2,\, w_2,\, \psi \text{ und } v_1',\, w_1',\, v_2',\, w_2',\, \psi'\,,$$

wo die Accente Differentiationen nach der Zeit vorstellen. Die Differentialquotienten v_1', w_1' sind aber, auf Grund der Relationen (11.), ohne Weiteres ausdrückbar durch v_2, w_2, ψ und v_2', w_2'; so dass also jene Grössen (α.) sich reduciren auf:

$$(\beta.)\qquad v_1,\, w_1,\, v_2,\, w_2,\, \psi \text{ und } v_2',\, w_2',\, \psi'\,.$$

Die Stelle (v_1, w_1) der Horizontalebene ist aber für die Berechnung der lebendigen Kraft des Körpers M_2, wie man leicht übersieht, durchaus gleichgültig. Demgemäss kann diese lebendige Kraft T nur noch abhängen von

$$(\gamma.)\qquad v_2,\, w_2,\, \psi \text{ und } v_2',\, w_2',\, \psi'\,.$$

Hieraus folgt, dass die linken Seiten der Formeln (1.) und (2.) beide $= 0$ sind. Die in diesen Formeln enthaltenen Summen sind aber, nach (10.), ebenfalls $= 0$; so dass also dieselben die Gestalt annehmen:

$$0 = 0 + \lambda\,,$$
$$0 = 0 + \mu\,.$$

Mit Rücksicht hierauf gewinnen die Formeln (3.), (4.), (5.), falls man gleichzeitig für die daselbst vorhandenen Summen die Werthe (10.) substituirt, folgendes Aussehen:

$$(12.)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_2'} - \frac{\partial T}{\partial v_2} &= -gM_2\frac{\partial \xi_2}{\partial v_2}\,, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w_2'} - \frac{\partial T}{\partial w_2} &= -gM_2\frac{\partial \xi_2}{\partial w_2}\,, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= 0\,; \end{aligned}$$

wobei hinzugefügt werden mag:

$$(13.) \qquad T = T\,(v_2\,,\, w_2\,,\, \psi,\, v_2',\, w_2',\, \psi')\,,$$

$$(14.) \qquad \xi_2 = \xi_2\,(v_2\,,\, w_2)\,,$$

um in solcher Weise die Grössen anzudeuten, von denen T und ξ_2 abhängig sind.

Mittelst der Gleichungen (12.) *ergeben sich* v_2, w_2, ψ *als Functionen der Zeit. Und solches ausgeführt gedacht, ergeben sich alsdann, auf Grund der Gleichungen* (11.), v_1 *und* w_1 *ebenfalls als Functionen der Zeit.*

Bemerkung. Die drei zur Bestimmung von v_2, w_2, ψ dienenden Differentialgleichungen (12.) sind, wie man leicht übersieht, ersetzbar durch die *eine* Formel:

$$(f.) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T + \delta U\right) dt = 0\,, \quad \text{wo } U = -\,g M_2 \xi_2\,.$$

Von dieser Formel (*f.*) habe ich früher bereits Gebrauch gemacht, in meinem Aufsatz über die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluss der Schwere (diese Berichte, 1885, pag. 365).

Uebrigens kann man diese Formel (*f.*) leicht *direct* ableiten, falls man nur einerseits beachtet, dass die hier in Betracht kommenden Argumente v_2, w_2, ψ, ebenso wie ihre Zuwüchse völlig unabhängig von einander sind, andererseits aber beachtet, dass die Arbeit der von der festen Horizontalebene auf den Körper ausgeübten Widerstandskräfte = 0 ist [vgl. Art. I, pag. 181, 182].

§ 19.

Betrachtung des allgemeinen Falles, dass über die beiden einander berührenden Oberflächen, hinsichtlich ihrer Glätte oder Rauhheit, keinerlei Voraussetzung gemacht wird.

Die Widerstandskräfte R_1 und R_2, welche die beiden einander berührenden Körper M_1 und M_2 in irgend einem Augenblick ihrer Bewegung auf einander ausüben, sind von uns früher (Art. I, pag. 179) in die Componenten N_1, P_1, Q_1 und N_2, P_2, Q_2 zerlegt worden, der Art, dass N_1, N_2 die Richtung der im Berührungspunkt errichteten Normale besitzen, während P_1, P_2 und Q_1, Q_2 nach zwei auf einander senkrechten Tangenten gerechnet sind[1]).

1) Um einen besseren Anschluss an die letzten Paragraphe zu gewinnen, haben wir hier die in jenem Art. I, pag. 179 benutzte Bezeichnungsweise ein wenig geändert, indem wir die Körper und Kräfte nicht mehr mit M, M_1, R, R_1, etc., sondern mit M_1, M_2, R_1, R_2, etc. benennen.

Dabei können offenbar die beiden tangentialen Kräfte P_1, Q_1, nach dem Gesetz des Parallelogramms, vereinigt werden zu einer einzigen tangentialen Kraft S_1. Desgleichen sind auch P_2, Q_2 ersetzbar durch eine einzige Kraft S_2.

Nach dem Grundgesetze der Action und Reaction (Art. I, pag. 163) sind nun die Kräfte R_1 und R_2 von gleicher Stärke und entgegengesetzter Richtung. Analoges gilt daher auch von N_1 und N_2, ebenso von P_1 und P_2, ebenso von Q_1 und Q_2, und ebenso endlich auch von S_1 und S_2. Bezeichnet man also z. B. die den Coordinatenaxen x, y, z entsprechenden Componenten der Kräfte S_1 und S_2 mit $\overline{X}_1$, $\overline{Y}_1$, $\overline{Z}_1$ und $\overline{X}_2$, $\overline{Y}_2$, $\overline{Z}_2$:

$$(1.)\qquad S_1\,(\overline{X}_1, \overline{Y}_1, \overline{Z}_1)\,, \qquad S_2\,(\overline{X}_2, \overline{Y}_2, \overline{Z}_2)\,,$$

so finden die Gleichungen statt:

$$(2.)\qquad \overline{X}_1 = -\overline{X}_2\,, \qquad \overline{Y}_1 = -\overline{Y}_2\,, \qquad \overline{Z}_1 = -\overline{Z}_2\,.$$

Der hier zu betrachtende *allgemeine* Fall, in welchem über die beiden Oberflächen, hinsichtlich ihrer Glätte oder Rauhheit. keinerlei Voraussetzung gemacht werden soll, unterscheidet sich offenbar von dem früher untersuchten Specialfall der *vollkommen glatten* Oberflächen nur durch das Hinzutreten der tangentialen Kräfte S. Die für diesen Specialfall erhaltenen Differentialgleichungen [(*D*.) pag. 32]:

$$(3.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)$$

werden daher in die Differentialgleichungen des gegenwärtigen *allgemeinen* Falles übergehen, sobald wir, *ohne in der damaligen Bedeutung der Buchstaben* X, Y, Z [vgl. (*D*.) pag. 32] *irgend etwas zu ändern*, zu diesen Kräften X, Y, Z noch jene unbekannten tangentialen Kräfte S hinzutreten lassen.

Bezeichnet man die im Augenblick t an der Berührungsstelle gelegenen Theilchen der beiden Körper M_1 und M_2 respective mit $m_1\,(x_1, y_1, z_1)$ und $m_2\,(x_2, y_2, z_2)$, so finden in diesem Augenblick die Gleichungen statt: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$. Im nächstfolgenden Zeitaugenblick $t + dt$ hingegen werden die Coordinaten jener beiden Theilchen Werthe annehmen, die offenbar im Allgemeinen *nicht* mehr einander gleich sind. Die Kraft S_1 wirkt, was den Augenblick t anbetrifft, lediglich ein auf das Theilchen $m_1\,(x_1, y_1, z_1)$; desgleichen wirkt S_2 lediglich ein auf $m_2\,(x_2, y_2, z_2)$. Fügt man also diese Kräfte S_1 und S_2

in den Gleichungen (3.) hinzu, indem man dabei für die Componenten derselben die Bezeichnungen (1.) benutzt, so erhält man:

$$(4.)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z\frac{\partial z}{\partial q_j}\right) + L(q_j)\,,$$

$$j = 1, 2, \cdots 11\,,$$

wo die Glieder $L(q_j)$ die Werthe haben:

$$L(q_j) = \left(\overline{X}_1\frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \overline{Y}_1\frac{\partial y_1}{\partial q_j} + \overline{Z}_1\frac{\partial z_1}{\partial q_j}\right) + \left(\overline{X}_2\frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \overline{Y}_2\frac{\partial y_2}{\partial q_j} + \overline{Z}_2\frac{\partial z_2}{\partial q_j}\right),$$

Werthe, die mit Rücksicht auf (2.) auch so darstellbar sind:

$$(5.)\quad L(q_j) = \overline{X}_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_j} - \frac{\partial x_2}{\partial q_j}\right) + \overline{Y}_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial q_j} - \frac{\partial y_2}{\partial q_j}\right) + \overline{Z}_1\left(\frac{\partial z_1}{\partial q_j} - \frac{\partial z_2}{\partial q_j}\right).$$

Diese Gleichungen (4.), *in denen X, Y, Z genau dieselbe Bedeutung haben, wie früher in* (*D.*) pag. 32, *repräsentiren also die Differentialgleichungen für den hier betrachteten allgemeinen Fall.* Und es handelt sich also jetzt nur noch um die nähere Bestimmung der in diesen Gleichungen enthaltenen Grössen $L(q_j)$.

Bezeichnet man die eilf Argumente $q_1, q_2, \cdots q_{11}$, ebenso wie früher [vgl. (*A.*), (*A'.*) pag. 29], mit

$$(6.)\quad q_1, q_2, \cdots q_6, \mathrm{v}_1, \mathrm{w}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{w}_2, \psi\,,$$

so ergeben sich, wie sogleich bewiesen werden soll, für die in (5.) enthaltenen partiellen Differentialquotienten folgende Formeln:

$$(7\alpha.)\quad \frac{\partial x_1}{\partial q_j} = \frac{\partial x_2}{\partial q_j}\,, \qquad \text{für } j = 1, 2, \cdots 6\,,$$

$$(7\beta.)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{v}_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{v}_1} = f_1 \cos(\mathrm{v}_1, x)\,,$$

$$(7\gamma.)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{w}_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{w}_1} = g_1 \cos(\mathrm{w}_1, x)\,,$$

$$(7\delta.)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{v}_2} = 0\,, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{v}_2} = -f_2 \cos(\mathrm{v}_2, x)\,,$$

$$(7\varepsilon.)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{w}_2} = 0\,, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{w}_2} = -g_2 \cos(\mathrm{w}_2, x)\,,$$

$$(7\zeta.)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \psi} = 0\,, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \psi} = 0\,;$$

wobei zu bemerken ist, dass diese Formeln in Gültigkeit bleiben, wenn man in ihnen den Buchstaben x durchweg mit y, oder durchweg mit z vertauscht. Dabei repräsentiren f_1, g_1, f_2, g_2 die früher (pag. 30) eingeführten, stets positiven Functionen. Ferner bezeichnen (v_1, x), (v_1, y), (v_1, z) und (w_1, x), (w_1, y), (w_1, z) diejenigen Winkel, unter denen die durch den Berührungspunkt gehenden Grundcurven v_1 und w_1 gegen die absoluten Axen x, y, z geneigt sind. Analoge Bedeutungen haben (v_2, x), etc. und (w_2, x), etc. mit Bezug auf die durch jenen Punkt gehenden Grundcurven v_2 und w_2.

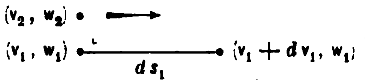
Beweis der Formeln (7α.). — Aendern sich von den eilf Argumenten (6.) nur $q_1, q_2, \cdots q_6$, während $\mathrm{v}_1, \mathrm{w}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{w}_2, \psi$ constant bleiben, so bewegen sich die beiden Körper offenbar der Art, als bildeten sie zusammengenommen einen *einzigen* starren Körper. Folglich werden die partiellen Ableitungen der Coordinaten des Berührungspunktes nach $q_1, q_2, \cdots q_6$ *ein und dieselben* Werthe haben, einerlei ob man diesen Punkt als ein Theilchen des einen, oder als ein Theilchen des andern Körpers sich denkt. — *Q. e. d.*

Beweis der Formeln (7β., γ., δ., ε., ζ.) *linker Hand.* — Betrachtet man irgend ein Massentheilchen des Körpers M_1, so sind die Coordinaten dieses Theilchens stets *unabhängig* von $\mathrm{v}_1, \mathrm{w}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{w}_2, \psi$ [vgl. die Bemerkung auf pag. 31]. Gleiches gilt daher z. B. auch von dem augenblicklich an der Berührungsstelle befindlichen Theilchen $m_1(x_1, y_1, z_1)$. — *Q. e. d.*

Beweis der Formeln (7β., γ.) *rechter Hand.* — Die Ausdrücke

$$(A.)\qquad \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{v}_1} d\mathrm{v}_1, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \mathrm{v}_1} d\mathrm{v}_1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial \mathrm{v}_1} d\mathrm{v}_1,$$

in denen $d\mathrm{v}_1$ *positiv* gedacht werden mag, repräsentiren diejenige räumliche Verschiebung, welche das Theilchen $m_2(x_2, y_2, z_2)$ erfährt, sobald man von den eilf Argumenten (6.) nur allein v_1 sich ändern, und zwar um $d\mathrm{v}_1$ anwachsen lässt. Thut man aber dies, so wird der Körper M_1 in Ruhe verharren (weil $q_1, q_2, \cdots q_6$ ungeändert bleiben), hingegen der Körper M_2 eine gewisse Bewegung ausführen. Und zwar wird diese Bewegung von M_2 der Art sein, dass die von ihm der Berührung dargebotene Stelle $(\mathrm{v}_2, \mathrm{w}_2)$ constant *dieselbe* bleibt, dass aber diese constante Berührungsstelle $(\mathrm{v}_2, \mathrm{w}_2)$ längs der Oberfläche des Körpers M_1 vom Punkte $(\mathrm{v}_1, \mathrm{w}_1)$ zum Punkte $(\mathrm{v}_1 + d\mathrm{v}_1, \mathrm{w}_1)$ fortwandert. Das



an jener Stelle (v_2, w_2) befindliche Massentheilchen m_2 (x_2, y_2, z_2) wird mithin dieselbe Wanderung ausführen, also das auf der Grundcurve v_1 zwischen den beiden Punkten (v_1, w_1) und $(v_1 + dv_1, w_1)$ gelegene Linienelement ds_1 durchlaufen. Demgemäss sind die Ausdrücke $(A.)$ nichts Anderes als die Componenten

$$(B.) \qquad ds_1 \cos(v_1, x), \qquad ds_1 \cos(v_1, y), \qquad ds_1 \cos(v_1, z)$$

des Linienelementes ds_1. Aus dieser Identität der Ausdrücke $(A.)$ und $(B.)$ folgt aber, weil $\frac{ds_1}{dv_1} = f_1$ ist [vgl. pag. 30],

$$(C.) \qquad \frac{\partial x_2}{\partial v_1} = f_1 \cos(v_1, x), \quad \frac{\partial y_2}{\partial v_1} = f_1 \cos(v_1, y), \quad \frac{\partial z_2}{\partial v_1} = f_1 \cos(v_1, z).$$

In analoger Weise wird man offenbar erhalten:

$$(D.) \qquad \frac{\partial x_2}{\partial w_1} = g_1 \cos(w_1, x), \quad \frac{\partial y_2}{\partial w_1} = g_1 \cos(w_1, y), \quad \frac{\partial z_2}{\partial w_1} = g_1 \cos(w_1, z).$$

Diese Formeln $(C.)$, $(D.)$ aber sind es, die hier bewiesen werden sollten.

Beweis der Formeln $(7\delta., \varepsilon.)$ *rechter Hand.* — Die Ausdrücke

$$(\mathfrak{A}.) \qquad \frac{\partial x_2}{\partial v_2} dv_2, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial v_2} dv_2, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial v_2} dv_2,$$

in denen dv_2 *positiv* gedacht werden mag, repräsentiren diejenige räumliche Verschiebung, welche das Theilchen m_2 (x_2, y_2, z_2) erleidet, sobald man von den eilf Argumenten $(6.)$ nur allein v_2 sich ändern, und zwar um dv_2 wachsen lässt. Thut man aber dies, so wird der Körper M_1 in Ruhe bleiben (weil $q_1, q_2, \cdots q_6$ ungeändert bleiben), der Körper M_2 hingegen eine gewisse Bewegung erfahren. Und zwar wird solches der Art von statten gehen, dass die vom *festliegenden* Körper M_1 der Berührung dargebotene Stelle (v_1, w_1) constant *dieselbe* bleibt, und dass jener *in Bewegung begriffene* Körper M_2 diese festliegende Stelle (v_1, w_1) successive mit verschiedenen Punkten, zuerst mit dem Punkte (v_2, w_2), zuletzt mit dem Punkte $(v_2 + dv_2, w_2)$ berührt. Es wird

$$R \longleftarrow \quad (\mathrm{v}_2, \mathrm{w}_2) \bullet \overset{ds_2}{\longrightarrow} \bullet (\mathrm{v}_2 + d\mathrm{v}_2, \mathrm{w}_2)$$
$$(\mathrm{v}_1, \mathrm{w}_1) \bullet$$

also das zwischen diesen beiden Punkten befindliche Element ds_2 der (auf M_2 liegenden) Grundcurve v_2 fortwandern in der Richtung R. Folglich sind jene Ausdrücke ($\mathfrak{A}$.) identisch mit

$$ds_2 \cos (R, x) \,, \qquad ds_2 \cos (R, y) \,, \qquad ds_2 \cos (R, z) \,,$$

also, weil die Richtung R zur Richtung der Grundcurve v_2 *entgegengesetzt* ist, identisch mit:

$$(\mathfrak{B}.) \quad -ds_2 \cos (\mathrm{v}_2, x) \,, \quad -ds_2 \cos (\mathrm{v}_2, y) \,, \quad -ds_2 \cos (\mathrm{v}_2, z) \,.$$

Aus dieser Identität der Ausdrücke ($\mathfrak{A}$.) und ($\mathfrak{B}$.) folgt aber, weil $\frac{ds_2}{d\mathrm{v}_2} = f_2$ ist [vgl. pag. 30], sofort:

$$(\mathfrak{C}.) \quad \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{v}_2} = -f_2 \cos (\mathrm{v}_2, x) \,, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \mathrm{v}_2} = -f_2 \cos (\mathrm{v}_2, y) \,,$$
$$\frac{\partial z_2}{\partial \mathrm{v}_2} = -f_2 \cos (\mathrm{v}_2, z) \,.$$

In analoger Weise ergeben sich offenbar die Formeln:

$$(\mathfrak{D}.) \quad \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{w}_2} = -g_2 \cos (\mathrm{w}_2, x) \,, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \mathrm{w}_2} = -g_2 \cos (\mathrm{w}_2, y) \,,$$
$$\frac{\partial z_2}{\partial \mathrm{w}_2} = -g_2 \cos (\mathrm{w}_2, z) \,.$$

Diese Formeln ($\mathfrak{C}$.), ($\mathfrak{D}$.) sind es aber, um deren Beweis es sich hier handelte.

Beweis der Formel (7 ζ.) *rechter Hand.* — Die Ausdrücke

$$(\mathfrak{a}.) \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \psi} d\psi \,, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \psi} d\psi \,, \quad \frac{\partial z_2}{\partial \psi} d\psi$$

repräsentiren diejenige räumliche Verschiebung, welche das Theilchen $m_2(x_2, y_2, z_2)$ erfährt, sobald man von den eilf Argumenten (6.) nur allein ψ sich ändern, und zwar um $d\psi$ wachsen lässt. Thut man aber dies, so wird der Körper M_1 in Ruhe verharren, und der Körper M_2 eine gewisse Drehung erleiden um die im Berührungspunkte errichtete Normale. Bei einer solchen Drehung erleidet aber das am Berührungspunkte befindliche Theilchen $m_2(x_2, y_2, z_2)$ *gar keine* Verschiebung. Folglich sind jene Ausdrücke ($\mathfrak{a}$.) gleich *Null*. — *Q. e. d.*

Wir gehen jetzt weiter in unserer eigentlichen Untersuchung. Aus (5.) ergiebt sich mit Rücksicht auf (7 α.):

$$(8.)\qquad L(q_j) = 0\ ,\qquad \text{für } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Was ferner das dem Argument v_1 entsprechende L betrifft, so ist nach (5.):

$$L(v_1) = \overline{X}_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_1} - \frac{\partial x_2}{\partial v_1}\right) + \overline{Y}_1 \left(\frac{\partial y_1}{\partial v_1} - \frac{\partial y_2}{\partial v_1}\right) + \overline{Z}_1 \left(\frac{\partial z_1}{\partial v_1} - \frac{\partial z_2}{\partial v_1}\right),$$

also mit Rücksicht auf (7 β.):

$$L(v_1) = -f_1 \left(\overline{X}_1 \cos(v_1, x) + \overline{Y}_1 \cos(v_1, y) + \overline{Z}_1 \cos(v_1, z)\right),$$

also mit Rücksicht auf (1.):

$$L(v_1) = -f_1\, S_1 \cos(S_1, v_1)\ .$$

In analoger Weise lässt sich das dem w_1 entsprechende L berechnen, so dass man also die Formeln erhält:

$$(9.)\qquad \begin{aligned} L(v_1) &= -f_1 \overline{V}_1\ , \\ L(w_1) &= -g_1 \overline{W}_1\ , \end{aligned}$$

wo $\overline{V}_1$ und $\overline{W}_1$ die Componenten der tangentialen Kraft S_1 nach den Grundcurven v_1 und w_1 vorstellen.

In ähnlicher Art erhält man aus (5.) und (7 δ., ε.) die Formeln:

$$\begin{aligned} L(v_2) &= +f_2 \overline{V}_2\ , \\ L(w_2) &= +g_2 \overline{W}_2\ , \end{aligned}$$

wo $\overline{V}_2$ und $\overline{W}_2$ die Componenten der Kraft S_1 (nicht S_2) nach den Grundcurven v_2 und w_2 vorstellen. Diese letzteren Formeln aber kann man, weil $\overline{V}_1$, $\overline{W}_1$ und $\overline{V}_2$, $\overline{W}_2$ die Componenten *ein- und derselben* tangentialen Kraft S_1 repräsentiren, mithin [vgl. die Figur pag. 37] die Relationen stattfinden:

$$\begin{aligned} \overline{V}_2 &= +\overline{V}_1 \cos\psi + \overline{W}_1 \sin\psi\ , \\ \overline{W}_2 &= -\overline{V}_1 \sin\psi + \overline{W}_1 \cos\psi\ , \end{aligned}$$

auch so schreiben:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} L(v_2) &= f_2 (+\overline{V}_1 \cos\psi + \overline{W}_1 \sin\psi)\ , \\ L(w_2) &= g_2 (-\overline{V}_1 \sin\psi + \overline{W}_1 \cos\psi)\ . \end{aligned}$$

Endlich erhält man für das dem ψ entsprechende L aus (5.) und mit Rücksicht auf (7 ζ.) den Werth:

$$(11.)\qquad L(\psi) = 0 .$$

Führt man zur Abkürzung, an Stelle von $\overline{V}_1$, $\overline{W}_1$, neue Unbekannte λ, μ ein, indem man setzt:

$$(12.)\qquad -f_1\overline{V}_1 = \lambda\,,\quad \text{und}\quad -g_1\overline{W}_1 = \mu\,,$$

so kann man die Formeln (9.), (10), (11.), wie sich leicht ergiebt, folgendermassen schreiben:

$$(13.)\qquad \begin{aligned} &L(v_1) = \lambda\,, && L(v_2) = -\lambda F - \mu H\,,\\ &L(w_1) = \mu\,, && L(w_2) = -\lambda G - \mu J\,,\\ &L(\psi) = 0\,. \end{aligned}$$

In der That ergeben sich die Formeln *rechter* Hand sofort, falls man nur in (10.) die aus (12.) für $\overline{V}_1$, $\overline{W}_1$ entspringenden Werthe substituirt, und dabei Gebrauch macht von den früher [in (ε.) pag. 38] eingeführten Bezeichnungen F, G, H, J.

Substituirt man jetzt die Werthe (8.) und (13.) in den zu Anfang aufgestellten eilf Differentialgleichungen (4.), so erhält man:

$$(14.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_j} + Y\frac{\partial y}{\partial q_j} + Z\frac{\partial z}{\partial q_j}\right),$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

und ferner:

$$(15.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial v_1'} - \dfrac{\partial T}{\partial v_1} = \sum_{M_2}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial v_1} + Y\dfrac{\partial y}{\partial v_1} + Z\dfrac{\partial z}{\partial v_1}\right) + \lambda\,,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial w_1'} - \dfrac{\partial T}{\partial w_1} = \sum_{M_2}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial w_1} + Y\dfrac{\partial y}{\partial w_1} + Z\dfrac{\partial z}{\partial w_1}\right) + \mu\,,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial v_2'} - \dfrac{\partial T}{\partial v_2} = \sum_{M_2}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial v_2} + Y\dfrac{\partial y}{\partial v_2} + Z\dfrac{\partial z}{\partial v_2}\right) - \lambda F - \mu H\,,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial w_2'} - \dfrac{\partial T}{\partial w_2} = \sum_{M_2}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial w_2} + Y\dfrac{\partial y}{\partial w_2} + Z\dfrac{\partial z}{\partial w_2}\right) - \lambda G - \mu J\,,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \psi'} - \dfrac{\partial T}{\partial \psi} = \sum_{M_2}\left(X\dfrac{\partial x}{\partial \psi} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \psi} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \psi}\right), \end{cases}$$

wo in den Formeln (15.) die Summation beschränkt gedacht werden darf auf den Körper M_2, weil die Coordinaten der zu M_1

gehörigen Massentheilchen von v_1, w_1, v_2, w_2, ψ unabhängig sind, [vgl. die Bemerkung pag. 31].

Für den hier betrachteten allgemeinen Fall, dass über die beiden Oberflächen, hinsichtlich ihrer Glätte oder Rauhheit, keinerlei Voraussetzung gemacht ist, gelten also die eilf Differentialgleichungen (14.), (15.), *die im Ganzen mit dreizehn Unbekannten*

(16.) $\quad q_1, q_2, \cdots q_6, v_1, w_1, v_2, w_2, \psi$ *und* λ, μ

behaftet sind. Dabei haben λ, μ *folgende Bedeutungen* [vgl. (12.)]:

(17.) $\quad \lambda = - f_1 \; S_1 \cos(S_1, v_1)\,, \quad \mu = - g_1 \; S_1 \cos(S_1, w_1)\,,$

wo S_1 *die den Körper* M_1 *an seiner Berührungsstelle erfassende unbekannte Reibungskraft repräsentirt, eine Kraft, welche herrührt von der dortigen Einwirkung des Körpers* M_2.

Was die sonst noch in den Gleichungen (14.), (15.) *enthaltenen Kräfte* X, Y, Z *anbetrifft, so brauchen dabei nur diejenigen Kräfte in Rechnung gebracht zu werden, welche nach Absonderung der Cohäsions- und Widerstandskräfte noch übrig bleiben; wie solches deutlich hervorgeht aus den zu Anfang dieses Paragraphs angestellten Ueberlegungen* [vgl. pag. 44, 45], *und aus dem Satze* (*D.*) pag. 32, *an den jene Ueberlegungen sich anlehnten.*

Eilf Gleichungen sind selbstverständlich unzureichend zur Bestimmung von *dreizehn* Unbekannten. Demgemäss ist also das allgemeine Problem, welches hier vorliegt, nicht weiter behandelbar, — es sei denn, dass man sich entschlösse, über den Werth der Reibungskraft S_1 und ihrer beiden Componenten irgend welche bestimmten Annahmen zu machen.

Hingegen können wir von den Gleichungen (14.), (15.) mit Leichtigkeit übergehen zu den früher behandelten Specialfällen, und in solcher Weise eine Controle erhalten für die damaligen Resultate. Sind die beiden Oberflächen *vollkommen glatt*, mithin die Reibungskraft S_1 gleich *Null*, so sind λ, μ, zufolge (17.), ebenfalls gleich *Null*; so dass also in diesem Falle die Differentialgleichungen (14.), (15.) unmittelbar übergehen in die früher gefundenen Formeln (*D.*) pag. 32.

Sind andererseits die beiden Oberflächen *vollkommen rauh*, so treten noch hinzu die bekannten Differentialgleichungen

(18.)
$$dv_1 = F dv_2 + G dw_2\,,$$
$$dw_1 = H dv_2 + J dw_2\,.$$

Und diese Gleichungen (18.), in Verbindung mit den eilf Gleichungen (14.), (15.), repräsentiren in der That diejenigen dreizehn Gleichungen, welche wir früher [in (11.), (12.), (13.) pag. 36] für den Fall *vollkommen rauher* Oberflächen gefunden hatten.

§ 20.

Der analytische Ausdruck für die lebendige Kraft zweier mit einander in Berührung bleibender Körper, unter der Voraussetzung, dass einer von diesen beiden Körpern absolut festliegt.

Will man die in den vier letzten Paragraphen aufgestellten Differentialgleichungen auf irgend einen speciellen Fall in Anwendung bringen, so hat man vor Allem das in jenen Gleichungen enthaltene T (die lebendige Kraft der beiden Körper), seinem analytischen Ausdrucke nach, näher zu bestimmen. Dabei mag der Einfachheit willen vorausgesetzt sein, dass *einer* der beiden Körper *absolut festliegt.* Auch mögen die früheren Bezeichnungen M_1, v_1, w_1, f_1, g_1 und M_2, v_2, w_2, f_2, g_2, zur Erleichterung der Schreibweise, durch die etwas bequemeren Bezeichnungen M, v, w, f, g und M^*, v^*, w^*, f^*, g^* ersetzt werden. Und zwar sei M der festliegende, und M^* der in Bewegung begriffene Körper.

Wir betrachten zunächst den Körper M für sich allein. Es sei π ein beliebiger Oberflächenpunkt dieses Körpers; ferner seien α, β, γ drei von π ausgehende, gegen einander senkrechte Strahlen; und zwar sei α die Richtung der *äussern* Normale der Körperoberfläche, während β und γ die Richtungen der durch π gehenden Curven v und w [vgl. pag. 30] repräsentiren sollen. Auch mag vorausgesetzt sein, dass das Strahlensystem α, β, γ *positiv* ist, dass also α zu β zu γ ebenso liegen, wie bei der linken Hand der kleine Finger zum Zeigefinger zum Daumen, eine Voraussetzung, der man durch geeignete Einrichtung der Argumente v, w stets zu entsprechen im Stande sein wird. Ferner seien die vom *Massenmittelpunkte* σ des Körpers M ausgehenden *Hauptträgheitsaxen* dieses Körpers benannt mit 1, 2, 3; wobei die Bezeichnung wiederum der Art eingerichtet sein soll, dass das Strahlensystem 1, 2, 3 *positiv* ist. Mit Bezug auf diese Trägheitsaxen 1, 2, 3 mögen die rechtwinkligen Coordinaten des Oberflächenpunktes π und die Richtungscosinus der von π ausgehenden Strahlen α, β, γ bezeichnet sein durch π_1, π_2, π_3 und α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3.

Da wir uns den Körper M, seiner Masse und Gestalt nach, in völlig bestimmter Weise gegeben denken, so sind offenbar diese dem Oberflächenpunkte π zugehörigen Grössen $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *bestimmte Functionen* von v, w, falls wir nämlich unter v, w die *Oberflächencoordinaten* des Punktes π verstehen. Auch übersehen wir sofort, dass diese Functionen den beiden Formeln entsprechen werden:

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = \frac{\partial \pi_1}{\partial v} : \frac{\partial \pi_2}{\partial v} : \frac{\partial \pi_3}{\partial v},$$

$$\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 = \frac{\partial \pi_1}{\partial w} : \frac{\partial \pi_2}{\partial w} : \frac{\partial \pi_3}{\partial w}.$$

Führen wir also die sogenannten *Differentialparameter* ein [vgl. pag. 30]:

$$f = \sqrt{\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_3}{\partial v}\right)^2},$$

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_2}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \pi_3}{\partial w}\right)^2},$$

so ergeben sich die Formeln:

$$\beta_1 = \frac{1}{f}\frac{\partial \pi_1}{\partial v}, \quad \beta_2 = \frac{1}{f}\frac{\partial \pi_2}{\partial v}, \quad \beta_3 = \frac{1}{f}\frac{\partial \pi_3}{\partial v},$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{g}\frac{\partial \pi_1}{\partial w}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{g}\frac{\partial \pi_2}{\partial w}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{g}\frac{\partial \pi_3}{\partial w};$$

und diese Formeln führen, weil die Strahlen α, β, γ zu einander senkrecht sind, sofort zu folgenden sechs Relationen:

$$\sum \alpha_j \frac{\partial \pi_j}{\partial v} = 0, \qquad \sum \alpha_j \frac{\partial \pi_j}{\partial w} = 0,$$

$$\sum \beta_j \frac{\partial \pi_j}{\partial v} = f, \qquad \sum \beta_j \frac{\partial \pi_j}{\partial w} = 0,$$

$$\sum \gamma_j \frac{\partial \pi_j}{\partial v} = 0, \qquad \sum \gamma_j \frac{\partial \pi_j}{\partial w} = g,$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über $j = 1, 2, 3$.

Aus diesen sechs Relationen ergeben sich durch Multiplication mit $d\text{v}$, $d\text{w}$, und Addition die drei Formeln:

$$\sum \alpha_j \left(\frac{\partial \pi_j}{\partial \text{v}} d\text{v} + \frac{\partial \pi_j}{\partial \text{w}} d\text{w}\right) = 0 ,$$

$$\sum \beta_j \left(\frac{\partial \pi_j}{\partial \text{v}} d\text{v} + \frac{\partial \pi_j}{\partial \text{w}} d\text{w}\right) = f d\text{v} ,$$

$$\sum \gamma_j \left(\frac{\partial \pi_j}{\partial \text{v}} d\text{v} + \frac{\partial \pi_j}{\partial \text{w}} d\text{w}\right) = g d\text{w} ;$$

und diese drei Formeln, in denen die Zuwüchse $d\text{v}$, $d\text{w}$ *beliebige* Werthe haben, sind offenbar der einfacheren Schreibweise fähig:

(1.) $$\sum \alpha_j \, d\pi_j = 0 , \quad \sum \beta_j \, d\pi_j = f d\text{v} , \quad \sum \gamma_j \, d\pi_j = g d\text{w} .$$

Bei dieser Gelegenheit mögen hier noch folgende Abbreviaturen eingeführt werden:

(2.) $$\sum \beta_j \, d\gamma_j = d\mathsf{A} , \quad \sum \gamma_j \, d\alpha_j = d\mathsf{B} , \quad \sum \alpha_j \, d\beta_j = d\Gamma ,$$

von denen weiterhin Gebrauch zu machen ist.

Soviel über den Körper M. — Analoge Bezeichnungen mögen nun aber andererseits beim Körper M^* eingeführt werden, nur mit dem einen Unterschiede, dass α^* hier nicht die in π^* vorhandene äussere Normale, sondern die daselbst errichtete *innere* Normale vorstellen soll. Was die zu (1.), (2.) analogen Formeln

(3.) $$\sum \alpha_j^* \, d\pi_j^* = 0, \quad \sum \beta_j^* \, d\pi_j^* = f^* \, d\text{v}^*, \quad \sum \gamma_j^* \, d\pi_j^* = g^* \, d\text{w}^*$$

und

(4.) $$\sum \beta_j^* \, d\gamma_j^* = d\mathsf{A}^*, \quad \sum \gamma_j^* \, d\alpha_j^* = d\mathsf{B}^*, \quad \sum \alpha_j^* \, d\beta_j^* = d\Gamma^*$$

betrifft, so sind selbstverständlich die Coordinaten π_j^* und die Richtungscosinus α_j^*, β_j^*, γ_j^* bezogen zu denken auf den Massenmittelpunkt σ^* des Körpers M^* und auf die von σ^* ausgehenden Hauptträgheitsaxen 1^*, 2^*, 3^* dieses Körpers. Auch mag wiederum jedes der beiden Systeme α^*, β^*, γ^* und 1^*, 2^*, 3^* als *positiv* vorausgesetzt sein.

Die relative Lage der beiden Körper M und M^* zu einander wird völlig bestimmt sein durch Angabe der fünf Argumente:

(5.) $$\text{v}, \text{w}, \text{v}^*, \text{w}^*, \psi ,$$

falls man nämlich unter v, w und v^*, w^* die Oberflächencoordinaten des augenblicklichen Berührungspunktes, und unter ψ

denjenigen Winkel versteht, den die von diesem Punkte ausgehenden Strahlen β und β^* mit einander einschliessen. Uebrigens mag der Winkel ψ, nach Art eines Azimuthes, von β aus in der Richtung $\beta\gamma$ gerechnet werden.

Dies vorangeschickt, gehen wir jetzt über zu unserm eigentlichen Thema. Wir denken uns (wie schon zu Anfang dieses Paragraphs bemerkt wurde) den Körper M *absolut festliegend*, hingegen den Körper M^* in irgend welcher Bewegung begriffen, die indessen von solcher Art sein soll, dass beide Körper fortdauernd mit einander in Berührung bleiben, so dass also die fünf Argumente (5.) irgend welche Functionen der Zeit sein werden.

Alsdann ist offenbar die lebendige Kraft T des Körpers M stets $= 0$, während die lebendige Kraft T^* des Körpers M^* irgend welchen Werth besitzen wird. Um diesen Werth näher angeben zu können, führen wir die Ausdrücke ein:

$$(6.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{a} &= 0\,, \\ \mathfrak{b} &= -f^*\frac{d\mathsf{v}^*}{dt} + \left(+f\frac{d\mathsf{v}}{dt}\cos\psi + g\frac{d\mathsf{w}}{dt}\sin\psi\right), \\ \mathfrak{c} &= -g^*\frac{d\mathsf{w}^*}{dt} + \left(-f\frac{d\mathsf{v}}{dt}\sin\psi + g\frac{d\mathsf{w}}{dt}\cos\psi\right), \end{aligned}$$

sowie auch folgende Ausdrücke:

$$(7.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{d\mathsf{A}^*}{dt} - \frac{d\mathsf{A}}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\,, \\ \mathfrak{B} &= \frac{d\mathsf{B}^*}{dt} - \left(+\frac{d\mathsf{B}}{dt}\cos\psi + \frac{d\Gamma}{dt}\sin\psi\right), \\ \mathfrak{C} &= \frac{d\Gamma^*}{dt} - \left(-\frac{d\mathsf{B}}{dt}\sin\psi + \frac{d\Gamma}{dt}\cos\psi\right), \end{aligned}$$

und setzen überdiess:

$$(8.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{r}_j &= \mathfrak{a}\alpha_j^* + \mathfrak{b}\beta_j^* + \mathfrak{c}\gamma_j^*\,, \\ \mathfrak{R}_j &= \mathfrak{A}\alpha_j^* + \mathfrak{B}\beta_j^* + \mathfrak{C}\gamma_j^*\,. \end{aligned}$$

Alsdann besitzt die in Rede stehende lebendige Kraft T^* des Körpers M^* den Werth:

$$(9.)\quad 2T^* = \left\{ \begin{aligned} &M^*(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{R}_2\pi_3^* - \mathfrak{R}_3\pi_2^*)^2 + M_1^*\mathfrak{R}_1^2 \\ +\,&M^*(\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{R}_3\pi_1^* - \mathfrak{R}_1\pi_3^*)^2 + M_2^*\mathfrak{R}_2^2 \\ +\,&M^*(\mathfrak{r}_3 + \mathfrak{R}_1\pi_2^* - \mathfrak{R}_2\pi_1^*)^2 + M_3^*\mathfrak{R}_3^2 \end{aligned} \right\},$$

wo unter M^* die *Gesammtmasse* des Körpers M^*, und unter M_1^*, M_2^*, M_3^* seine den Axen 1*, 2*, 3* entsprechenden *Hauptträgheitsmomente* zu verstehen sind. — Uebrigens können wir die Formel (9.) auch so schreiben:

$$(10.) \quad 2T^* = \begin{Bmatrix} M^* (\mathfrak{a} + \mathfrak{C} b^* - \mathfrak{B} c^*)^2 + M_1^* \mathfrak{R}_1^2 \\ + M^* (\mathfrak{b} + \mathfrak{A} c^* - \mathfrak{C} a^*)^2 + M_2^* \mathfrak{R}_2^2 \\ + M^* (\mathfrak{c} + \mathfrak{B} a^* - \mathfrak{A} b^*)^2 + M_3^* \mathfrak{R}_3^2 \end{Bmatrix},$$

wo alsdann a^*, b^*, c^* die Bedeutungen haben:

$$(10a.) \quad a^* = \sum \alpha_j^* \pi_j^*, \quad b^* = \sum \beta_j^* \pi_j^*, \quad c^* = \sum \gamma_j^* \pi_j^*.$$

Diese Formeln (9.), (10.) dürften die einfachsten und elegantesten sein, durch welche die in Rede stehende lebendige Kraft überhaupt darstellbar ist. Ich begnüge mich damit, dieselben hier mitgetheilt zu haben, ohne auf ihre Ableitung näher eingehen zu wollen. Macht man übrigens die Voraussetzung, dass die beiden Körperoberflächen *vollkommen rauh* sind, so werden während der betrachteten Bewegung fortdauernd die linearen Differentialgleichungen stattfinden[1])

$$(11.) \quad \begin{aligned} f d\mathfrak{v} &= f^* d\mathfrak{v}^* \cos\psi - g^* d\mathfrak{w}^* \sin\psi, \\ g d\mathfrak{w} &= f^* d\mathfrak{v}^* \sin\psi + g^* d\mathfrak{w}^* \cos\psi, \end{aligned}$$

d. i. die Gleichungen:

$$(12.) \quad \begin{aligned} f^* d\mathfrak{v}^* &= + f d\mathfrak{v} \cos\psi + g d\mathfrak{w} \sin\psi, \\ g^* d\mathfrak{w}^* &= - f d\mathfrak{v} \sin\psi + g d\mathfrak{w} \cos\psi. \end{aligned}$$

Demgemäss sind für den Fall *vollkommen rauher* Oberflächen die in (6.) angegebenen Ausdrücke $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sämmtlich $= 0$, mithin die in (8.) angegebenen $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ ebenfalls sämmtlich $= 0$; wodurch die Gestalt der Formeln (9.) und (10.) sich alsdann wesentlich vereinfacht.

Bemerkung. — Sind *beide* Körper M und M^* in Bewegung begriffen, so treten zu den in (6.), (7.) angegebenen Ausdrücken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ noch gewisse von der Bewegung des Körpers M abhängende Glieder hinzu. Diese Glieder hinzugefügt gedacht, bleiben alsdann die weiteren Formeln (8.), (9.), (10.), (10a.) nach wie vor in Kraft.

---

1) In der That sind diese Differentialgleichungen (11.) mit den früher auf pag. 38 angegebenen identisch; wie man sofort erkennt, falls man nur die zu Anfang dieses Paragraphs in der Bezeichnungsweise vorgenommene Aenderung berücksichtigt.

§ 21.
Allgemeine Sätze zur Berechnung der lebendigen Kraft eines starren Körpers.

Die Ableitung der im vorhergehenden Paragraph mitgetheilten Formeln ist mit sehr beschwerlichen Rechnungen verbunden. Diese Rechnungen aber können wesentlich reducirt werden durch Anwendung einer schon früher[1]) von mir exponirten allgemeinen Methode, auf welche ich hier von Neuem mir einzugehen erlauben werde. Dabei sei sogleich bemerkt, dass die in Rede stehende Methode in den weiter folgenden Paragraphen von Nutzen sein wird.

Ein starrer Körper M sei in Drehung begriffen um eine *absolut feste* Axe α, und irgend ein fester Punkt dieser Axe α sei bezeichnet mit A. Ferner seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und A_1, A_2, A_3 die Richtungscosinus von α und die Coordinaten von A in Bezug auf ein *absolut unbewegliches* Axensystem 1, 2, 3. Ueberdies mag φ der Drehungswinkel sein. Denkt man sich also durch die Axe α zwei Ebenen gelegt, von denen die eine mit dem Körper M verbunden ist, während die andere eine absolut feste Lage besitzt, so soll φ derjenige Winkel sein, den diese beiden Ebenen mit einander einschliessen.

Fasst man nun, während der Körper M um die feste Axe α rotirt, irgend ein Theilchen m dieses Körpers ins Auge, und bezeichnet man das von m während der Zeit dt beschriebene Wegelement mit ds, so steht offenbar ds senkrecht gegen die Linie mA, und ebenso auch senkrecht gegen die Axe α. Sind also x_1, x_2, x_3 und $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3$ die Coordinaten des Theilchens m zu Anfang und zu Ende der Zeit dt, mithin dx_1, dx_2, dx_3 die senkrechten Componenten des Wegelementes ds, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(x_1 - A_1)\,dx_1 + (x_2 - A_2)\,dx_2 + (x_3 - A_3)\,dx_3 = 0\,,$$
$$\alpha_1\,dx_1 + \alpha_2\,dx_2 + \alpha_3\,dx_3 = 0\,.$$

Hieraus folgt:

$$(1.)\quad \begin{cases} dx_1 = \lambda\,[\alpha_2\,(x_3 - A_3) - \alpha_3\,(x_2 - A_2)]\,, \\ dx_2 = \lambda\,[\alpha_3\,(x_1 - A_1) - \alpha_1\,(x_3 - A_3)]\,, \\ dx_3 = \lambda\,[\alpha_1\,(x_2 - A_2) - \alpha_2\,(x_1 - A_1)]\,, \end{cases}$$

---

1) Vgl. diese Berichte 1869, pag. 182, und die Math. Ann. Bd. 3, pag. 350, insbesondere aber die Math. Ann. Bd. 11, pag. 379. Ich gehe auf diesen Gegenstand hier *von Neuem* ein, weil es mir inzwischen gelungen ist, die damals gegebene Darstellung bedeutend zu vereinfachen.

wo λ noch unbekannt ist. Erhebt man nun die Gleichungen (1.) zum Quadrat, und addirt, so erhält man:

$$ds^2 = \lambda^2 \Big([\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2] [(x_1 - A_1)^2 + (x_2 - A_2)^2 + (x_3 - A_3)^2] - \\ - [\alpha_1 (x_1 - A_1) + \alpha_2 (x_2 - A_2) + \alpha_3 (x_3 - A_3)]^2 \Big),$$

d. i.

$$(2.) \qquad ds^2 = \lambda^2 \, [(Am)^2 - (AC)^2] \, .$$

Dabei bezeichnet (Am) die Länge der von A nach m gehenden geraden Linie, und (AC) die senkrechte Projection dieser Linie auf die Axe α; so dass also ACm ein bei C rechtwinkliges Dreieck ist. Demgemäss ist $(Am)^2 - (AC)^2 = (Cm)^2$; wodurch die Formel (2.) übergeht in:

$$(3.) \qquad ds^2 = \lambda^2 (Cm)^2 .$$

Nun repräsentirt aber (Cm) den Radius derjenigen Kreisperipherie, längs welcher das Theilchen m fortschreitet. Bezeichnet man also die Zunahme des Drehungswinkels φ des Körpers während der Zeit dt mit $d\varphi$, so ist $ds = (Cm)\, d\varphi$. Dies in (3.) eingesetzt, ergiebt sich:

$$(4.) \qquad \lambda = d\varphi \, .$$

Substituirt man diesen Werth von λ in den Gleichungen (1.), und dividirt man überdies dieselben durch das betrachtete Zeitelement dt, so gelangt man zu folgendem Satze:

Satz. — *Dreht sich ein starrer Körper M um eine durch den Punkt A gehende feste Axe α, und bezeichnet man die Coordinaten von A und die Richtungscosinus von α mit A_1, A_2, A_3 und α_1, α_2, α_3, so sind die Geschwindigkeitscomponenten eines jedweden Körpertheilchens $m\,(x_1, x_2, x_3)$ darstellbar durch die Formeln:*

$$(5.) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = [\alpha_2 (x_3 - A_3) - \alpha_3 (x_2 - A_2)] \dfrac{d\varphi}{dt} \, , \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = [\alpha_3 (x_1 - A_1) - \alpha_1 (x_3 - A_3)] \dfrac{d\varphi}{dt} \, , \\[2ex] \dfrac{dx_3}{dt} = [\alpha_1 (x_2 - A_2) - \alpha_2 (x_1 - A_1)] \dfrac{d\varphi}{dt} \, . \end{cases}$$

Dabei ist unter φ der Drehungswinkel, mithin unter $\dfrac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit zu verstehen.

Diese einfachen Dinge vorangeschickt, gehen wir über zur Betrachtung eines Körpers, der um *mehrere* Axen sich drehen kann, wie das z. B. der Fall ist bei der bekannten CARDANI'schen Aufhängung eines Körpers mittelst mehrerer Ringe; wobei alsdann diese Axen selber im Allgemeinen nicht mehr festliegen, sondern von Augenblick zu Augenblick ihre Lage ändern.

Um unserer Untersuchung einen möglichst allgemeinen Charakter zu verleihen, wollen wir einen starren Körper M uns denken, dessen räumliche Position abhängig ist von *zwei* Argumenten φ und ϑ, und dabei annehmen, diese Abhängigkeit sei von solcher Art, dass der Körper bei constant erhaltenem ϑ und alleiniger Aenderung von φ *um eine Axe α sich dreht*, für welche φ selber den zugehörigen Drehungswinkel repräsentirt, und dass der Körper andererseits bei constant erhaltenem φ und alleiniger Aenderung von ϑ *um irgend eine Axe β rotirt*, für welche alsdann ϑ den Drehungswinkel vorstellt. Solches festgesetzt, wollen wir die Geschwindigkeitscomponenten irgend eines Körpertheilchens $m\,(x_1, x_2, x_3)$ analytisch auszudrücken suchen für den Fall, dass φ und ϑ *gleichzeitig* sich ändern, dass also φ und ϑ beliebig gegebene Functionen der Zeit sind.

Da die räumliche Lage des Theilchens $m\,(x_1, x_2, x_3)$, ebenso wie die des ganzen betrachteten Körpers, nur von φ und ϑ abhängt, φ und ϑ ihrerseits aber Functionen der Zeit sind, so ergiebt sich z. B.:

$$\text{(6.)} \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial x_1}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}\,.$$

Der *erste* Term rechter Hand repräsentirt offenbar denjenigen Werth, welchen die Geschwindigkeitscomponente $\frac{dx_1}{dt}$ annehmen würde, falls man ϑ constant erhalten wollte. Alsdann aber würde die Bewegung des Körpers in einer blossen Drehung um die Axe α bestehen, so dass also dieser erste Term nach Maassgabe der früheren Formeln (5.) folgendermassen ausdrückbar ist:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} = [\alpha_2 (x_3 - A_3) - \alpha_3 (x_2 - A_2)]\,\frac{d\varphi}{dt}\,,$$

wo α_1, α_2, α_3 die Richtungscosinus der Axe α, und A_1, A_2, A_3 die Coordinaten eines auf α liegenden Punktes A vorstellen.

In analoger Weise erhält man für den *zweiten* Term rechter Hand in (6.) die analoge Formel:

$$\frac{\delta x_1}{\delta \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = [\beta_2(x_3 - B_3) - \beta_3(x_2 - B_2)]\frac{d\vartheta}{dt},$$

wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die Richtungscosinus der Axe β, und B_1, B_2, B_3 die Coordinaten eines auf β liegenden Punktes B vorstellen.

Substituirt man diese Ausdrücke in (6.), so erhält man die erste Formel des folgenden Systems:

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = V_1 + \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2\,, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = V_2 + \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3\,, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = V_3 + \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1\,. \end{cases}$$

In diesem System, dessen beide letzten Formeln in analoger Weise sich ergeben, haben alsdann die Ω's und V's folgende Bedeutungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} \Omega_1 = \alpha_1 \dfrac{d\varphi}{dt} + \beta_1 \dfrac{d\vartheta}{dt}\,, \\ \Omega_2 = \alpha_2 \dfrac{d\varphi}{dt} + \beta_2 \dfrac{d\vartheta}{dt}\,, \\ \Omega_3 = \alpha_3 \dfrac{d\varphi}{dt} + \beta_3 \dfrac{d\vartheta}{dt}\,, \end{cases}$$

$$(8a.)\quad \begin{cases} V_1 = (\alpha_3 A_2 - \alpha_2 A_3)\dfrac{d\varphi}{dt} + (\beta_3 B_2 - \beta_2 B_3)\dfrac{d\vartheta}{dt}\,, \\ V_2 = (\alpha_1 A_3 - \alpha_3 A_1)\dfrac{d\varphi}{dt} + (\beta_1 B_3 - \beta_3 B_1)\dfrac{d\vartheta}{dt}\,, \\ V_3 = (\alpha_2 A_1 - \alpha_1 A_2)\dfrac{d\varphi}{dt} + (\beta_2 B_1 - \beta_1 B_2)\dfrac{d\vartheta}{dt}\,. \end{cases}$$

Die Formeln (7.) beziehen sich auf das Zeitelement dt, oder (was dasselbe ist) auf die *beiden Zeitaugenblicke* t *und* $t + dt$. Um die eigentliche Bedeutung dieser Formeln (7.) besser übersehen zu können, bemerken wir, dass die rechten Seiten derselben

für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ auf V_1, V_2, V_3 sich reduciren, und dass also V_1, V_2, V_3 die Geschwindigkeitscomponenten desjenigen speciellen Massentheilchens vorstellen, welches im Augenblicke t im Anfangspunkte des Coordinatensystems (1, 2, 3) sich befindet. Denken wir uns also z. B. dieses absolut feste Axensystem (1, 2, 3) der Art gewählt, dass sein Anfangspunkt im Augenblicke t mit dem *Massenmittelpunkte* σ des betrachteten Körpers coincidirt, so werden V_1, V_2, V_3 die Geschwindigkeitscomponenten dieses Massenmittelpunktes σ vorstellen.

Nachträglich übersehen wir nun leicht, wie diese hier angestellten Betrachtungen auf den Fall *beliebig vieler* Argumente φ, ϑ, τ, $\cdots$ ausdehnbar sind, und gelangen daher, indem wir der grösseren Einfachheit willen die Richtungscosinus α_1, α_2, α_3 und β_1, β_2, β_3 respective mit φ_1, φ_2, φ_3 und ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 bezeichnen, zu folgendem Resultate:

Satz. — *Die augenblickliche Position eines starren Körpers M im Raume sei abhängig von beliebig vielen Argumenten* φ, ϑ, τ, $\cdots$, *der Art, dass die Bewegung des Körpers, falls nur eines dieser Argumente sich ändert, in einer Drehung um eine bestimmte Axe besteht, für welche dieses allein sich ändernde Argument den zugehörigen Drehungswinkel repräsentirt. Diese Axen mögen respective die* φ*-Axe, die* ϑ*-Axe, die* τ*-Axe, u. s. w. genannt werden; so dass z. B. die* φ*-Axe diejenige ist, um welche der Körper sich drehen würde, falls man nur allein das* φ *sich ändern lassen, die übrigen Argumente* ϑ, τ, $\cdots$ *aber constant erhalten wollte.*

Denkt man sich nun sämmtliche Argumente φ, ϑ, τ, $\cdots$ *in Aenderung begriffen, nämlich jedes derselben als eine beliebig gegebene Function der Zeit, so werden für die in solcher Weise charakterisirte Bewegung des Körpers die Geschwindigkeitscomponenten eines jeden Körpertheilchens* m (x_1, x_2, x_3) *darstellbar sein durch folgende Formeln:*

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= V_1 + \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2 \,, \\
(9.) \qquad \frac{dx_2}{dt} &= V_2 + \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3 \,, \\
\frac{dx_3}{dt} &= V_3 + \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1 \,,
\end{aligned}$$

wo V_1, V_2, V_3 die Geschwindigkeitscomponenten des Massenmittelpunktes σ des Körpers vorstellen, während Ω_1, Ω_2, Ω_3 die Bedeutungen haben:

$$
(10.)\qquad
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \varphi_1 \frac{d\varphi}{dt} + \vartheta_1 \frac{d\vartheta}{dt} + \tau_1 \frac{d\tau}{dt} + \cdots, \\
\Omega_2 &= \varphi_2 \frac{d\varphi}{dt} + \vartheta_2 \frac{d\vartheta}{dt} + \tau_2 \frac{d\tau}{dt} + \cdots, \\
\Omega_3 &= \varphi_3 \frac{d\varphi}{dt} + \vartheta_3 \frac{d\vartheta}{dt} + \tau_3 \frac{d\tau}{dt} + \cdots.
\end{aligned}
$$

Hier bezeichnen φ_1, φ_2, φ_3 die Richtungscosinus der φ-Axe, ebenso ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 diejenigen der ϑ-Axe; u. s. f.

Dabei ist vorausgesetzt, das der Betrachtung zu Grunde gelegte absolut feste Axensystem (1, 2, 3) *sei so gewählt, dass sein Anfangspunkt im Augenblicke t mit dem Massenmittelpunkte σ coincidirt.*

Bemerkung. — Der Massenmittelpunkt ist hier, wie aus der Ableitung des Satzes deutlich hervorgeht, nur beispielsweise gewählt. Hat z. B. der Körper die Gestalt eines Parallelepipedums, so wird der Satz auch dann noch gültig bleiben, wenn man statt des Massenmittelpunktes irgend eine bestimmte Ecke dieses Parallelepipedums nimmt.

Erhebt man die das Theilchen $m(x_1, x_2, x_3)$ betreffenden Gleichungen (9.) zum Quadrat, und multiplicirt man sodann noch mit der Masse m dieses Theilchens, so erhält man z. B.:

$$
m\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = m(V_1 + \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2)^2 .
$$

Summirt man jetzt diese Formel über sämmtliche Theilchen m des ganzen Körpers, so ergiebt sich:

$$
(11.)\qquad \sum m\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = V_1^2 \sum m + \Omega_2^2 \sum m x_3^2 + \Omega_3^2 \sum m x_2^2 +
$$
$$
+ 2V_1\Omega_2 \sum m x_3 - 2V_1\Omega_3 \sum m x_2 - 2\Omega_2\Omega_3 \sum m x_2 x_3 .
$$

Dieser Formel (11.) liegt, ebenso wie den Formeln (9.), die Voraussetzung zu Grunde, dass der *Anfangspunkt* des absolut festen Axensystems (1, 2, 3) im Augenblicke t mit dem Massenmittelpunkte σ des Körpers coincidirt. Fügen wir nun zu dieser Voraussetzung noch die hinzu, dass im Augenblicke t die *Axen* des Systems (1, 2, 3) mit den von σ ausgehenden Hauptträgheits-

axen des Körpers zusammenfallen sollen, so werden nicht nur die Relationen gelten [Art. I, pag. 167]:

$$(\alpha.)\quad \sum m = M\,,\quad \sum mx_1 = 0\,,\quad \sum mx_2 = 0\,,\quad \sum mx_3 = 0\,,$$

sondern, wie aus der Theorie der Trägheitsmomente [1]) sich ergiebt, auch folgende Relationen stattfinden:

$$(\beta.)\quad \begin{aligned} &\sum m(x_2^2 + x_3^2) = M_1\,, \qquad &&\sum mx_2x_3 = 0\,,\\ &\sum m(x_3^2 + x_1^2) = M_2\,, &&\sum mx_3x_1 = 0\,,\\ &\sum m(x_1^2 + x_2^2) = M_3\,, &&\sum mx_1x_2 = 0\,, \end{aligned}$$

wo M die *Gesammtmasse* des Körpers, und M_1, M_2, M_3 seine *Hauptträgheitsmomente* bezeichnen. Durch diese Relationen $(\alpha.)$, $(\beta.)$ gewinnt die Formel (11.) die einfachere Gestalt:

$$\sum m\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = MV_1^2 + \Omega_2^2 \sum mx_3^2 + \Omega_3^2 \sum mx_2^2\,.$$

Desgleichen ergeben sich die analogen Formeln:

$$\sum m\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = MV_2^2 + \Omega_3^2 \sum mx_1^2 + \Omega_1^2 \sum mx_3^2\,,$$

$$\sum m\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = MV_3^2 + \Omega_1^2 \sum mx_2^2 + \Omega_2^2 \sum mx_1^2\,.$$

Addirt man aber diese drei Formeln, so folgt mit Rücksicht auf $(\beta.)$:

$$(12.)\qquad 2T = MV^2 + M_1\Omega_1^2 + M_2\Omega_2^2 + M_3\Omega_3^2\,,$$

wo T die lebendige Kraft des ganzen Körpers bezeichnet, während V die Geschwindigkeit seines Massenmittelpunktes σ repräsentirt. Wir erhalten somit folgenden Satz:

---

1) Auf die Theorie der Trägheitsmomente hier näher eingehen zu wollen, würde durchaus überflüssig sein. Denn, wenn ich auch in dem gegenwärtigen Aufsatz allerhand elementare Dinge berührt habe, so ist das doch immer nur insofern geschehen, als es nothwendig war, um die hier darzulegenden Grundzüge der analytischen Mechanik in zusammenhängender und geschlossener Gestalt zu Tage treten zu lassen. Die Theorie der Trägheitsmomente aber repräsentirt inmitten der Entwickelung der analytischen Mechanik gewissermassen eine feste Insel, deren Aussehen stets *ein und dasselbe* bleiben wird, welche Grundlagen und welche Richtung man jener Entwickelung auch zuertheilen mag.

Satz. — *Es sei σ der Massenmittelpunkt eines starren Körpers von der Gesammtmasse M. Ferner seien 1, 2, 3 seine von σ ausgehenden Hauptträgheitsaxen, und M_1, M_2, M_3 die diesen Axen entsprechenden Trägheitsmomente.*

Die augenblickliche Position dieses Körpers im Raume sei abhängig von beliebig vielen Argumenten φ, ϑ, τ, ...; und zwar der Art, dass die Bewegung des Körpers, falls nur eines dieser Argumente sich ändert, in einer Drehung um eine bestimmte Axe besteht, für welche dieses allein sich ändernde Argument den zugehörigen Drehungswinkel repräsentirt. Diese den einzelnen Argumenten entsprechenden Axen mögen respective die φ-Axe, die ϑ-Axe, die τ-Axe, u. s. f. genannt werden.

Denkt man sich nun all' diese Argumente gleichzeitig in Aenderung begriffen, nämlich jedes derselben als eine beliebig gegebene Function der Zeit, so wird die lebendige Kraft T des Körpers in jedem Augenblicke dieser Bewegung darstellbar sein durch folgende Formel:

$$2T = MV^2 + M_1\Omega_1^2 + M_2\Omega_2^2 + M_3\Omega_3^2\,, \tag{13.}$$

wo V die Geschwindigkeit des Punktes σ vorstellt, während $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ die Werthe haben:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \varphi_1\frac{d\varphi}{dt} + \vartheta_1\frac{d\vartheta}{dt} + \tau_1\frac{d\tau}{dt} + \cdots, \\ \Omega_2 &= \varphi_2\frac{d\varphi}{dt} + \vartheta_2\frac{d\vartheta}{dt} + \tau_2\frac{d\tau}{dt} + \cdots, \\ \Omega_3 &= \varphi_3\frac{d\varphi}{dt} + \vartheta_3\frac{d\vartheta}{dt} + \tau_3\frac{d\tau}{dt} + \cdots. \end{aligned} \tag{14.}$$

Hier bezeichnen φ_1, φ_2, φ_3 die Richtungscosinus der φ-Axe in Bezug auf die Hauptträgheitsaxen 1, 2, 3. Analoge Bedeutungen haben ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 für die ϑ-Axe. U. s. f.

Ist z. B. der Körper nur drehbar um eine *einzige*, und zwar absolut feste Axe AB, und bringt man auf diese Axe AB die Bezeichnungen φ, φ_1, φ_2, φ_3 in Anwendung, so reduciren sich die Ausdrücke (14.) auf ihre ersten Glieder; so dass die Formel (13.) die Gestalt erhält:

$$2T = MV^2 + (M_1\varphi_1^2 + M_2\varphi_2^2 + M_3\varphi_3^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{15.}$$

Bezeichnet man den constanten senkrechten Abstand des Massenmittelpunktes σ von jener Axe AB mit l, so ist offenbar $V = l\frac{d\varphi}{dt}$; so dass also die Formel (15.) auch so darstellbar ist:

$$(16.)\qquad 2T = [Ml^2 + M_1\varphi_1^2 + M_2\varphi_2^2 + M_3\varphi_3^2]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 .$$

Der hier in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck repräsentirt aber bekanntlich das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe AB. Demgemäss ergiebt sich folgender

Zusatz. — *Befindet sich ein starrer Körper in Drehung um eine absolut feste Axe AB, so gilt für seine lebendige Kraft T die Formel:*

$$(17.)\qquad 2T = M_{AB}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \mathsf{M}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 ,$$

wo $\mathsf{M} = M_{AB}$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf jene Axe AB, und $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit vorstellt.

Uebrigens kann man den Satz (13.), (14.) leicht verallgemeinern, und gelangt alsdann zu folgendem Resultate:

Allgemeines Theorem. — *Es sei σ der Massenmittelpunkt eines starren Körpers von der Gesammtmasse M. Ferner seien 1, 2, 3 seine von σ ausgehenden Hauptträgheitsaxen, und M_1, M_2, M_3 die diesen Axen entsprechenden Trägheitsmomente.*

Die augenblickliche Position dieses Körpers im Raume sei abhängig von beliebig vielen Argumenten Φ, Θ, $\cdots$; ohne[1]) *dass dabei über die Art und Weise dieser Abhängigkeit irgend welche Voraussetzung gemacht werden soll. Alsdann wird der Körper, falls man von all' jenen Argumenten nur Φ allein sich ändern, etwa um $d\Phi$ wachsen lässt, um eine gewisse Axe sich drehen, während diese Axe ihrerseits, sich selber parallel bleibend, nach irgend welcher Richtung sich verschiebt. Diese Axe mag die Φ-Axe heissen, und der ihr zugehörige Drehungswinkel mit φ bezeichnet sein. In analogem Sinne mag beim Argument Θ von der Θ-Axe und vom Winkel ϑ die Rede sein. U. s. f.*

Denkt man sich alsdann all' diese Argumente Φ, Θ, $\cdots$ gleichzeitig in Aenderung begriffen, nämlich jedes derselben

---

1) Hierdurch unterscheidet sich das hier anzugebende Theorem von dem specielleren Satze (13.), (14.).

als eine beliebig gegebene Function der Zeit, so wird die lebendige Kraft T des Körpers in jedem Augenblicke dieser Bewegung darstellbar sein durch die Formel:

$$(18.)\qquad 2T = MV^2 + M_1\Omega_1^2 + M_2\Omega_2^2 + M_3\Omega_3^2\,,$$

wo V die Geschwindigkeit des Punktes σ vorstellt, und Ω_1, Ω_2, Ω_3 *die Werthe haben:*

$$(19.)\qquad \begin{aligned} \Omega_1 &= \Phi_1\frac{d\varphi}{dt} + \Theta_1\frac{d\vartheta}{dt} + \cdots \\ \Omega_2 &= \Phi_2\frac{d\varphi}{dt} + \Theta_2\frac{d\vartheta}{dt} + \cdots \\ \Omega_3 &= \Phi_3\frac{d\varphi}{dt} + \Theta_3\frac{d\vartheta}{dt} + \cdots . \end{aligned}$$

Hier bezeichnen Φ_1, Φ_2, Φ_3 *die Cosinus derjenigen Winkel, unter denen die Φ-Axe gegen die Axen 1, 2, 3 geneigt ist. Analoge Bedeutungen haben* Θ_1, Θ_2, Θ_3 *für die Θ-Axe. U. s. f.*

Auf den Beweis dieses Theorems werde ich übrigens schon deswegen hier nicht näher eingehen, weil ich von demselben im Folgenden keinen Gebrauch machen, vielmehr mit dem specielleren Satze (13.), (14.) mich begnügen werde.

§ 22.

Ueber die Bewegung eines starren Körpers unter dem Einfluss der Schwere, insbesondere über das Pendel.

Wir wollen in diesem Paragraph, und ebenso auch in den beiden folgenden Paragraphen, die Erde im Weltraume in *absoluter Ruhe* uns denken, und irgend ein mit der Erde verbundenes, also ebenfalls absolut unbewegliches Axensystem mit (x, y, z) bezeichnen. Gleichzeitig wollen wir in Betreff der *Schwere* die gewöhnlichen Vorstellungen acceptiren, also annehmen, dass die von der Schwere auf irgend ein Massentheilchen m ausgeübte Kraft $= mg$ sei, wo g eine *Constante* vorstellt, und dass die Richtung dieser Kraft ebenfalls *constant* sei, indem wir dabei in üblicher Weise der Worte *vertical* und *horizontal* uns bedienen. Die constanten Winkel, unter denen die Richtung der Kraft mg gegen die Axen des Systems (x, y, z) geneigt ist, mögen α, β, γ heissen; so dass also die betreffenden Componenten jener Kraft die Werthe haben:

$$(1.)\qquad mg\cos\alpha\,,\qquad mg\cos\beta\,,\qquad mg\cos\gamma\,.$$

Bringen wir nun die Laplace'schen Differentialgleichungen (Art. I, pag. 166) auf einen *starren Körper* M in Anwendung, der unter dem Einfluss der Schwere und unter dem gleichzeitigen Einfluss irgend welcher anderweitiger äusserer Kräfte X^A, Y^A, Z^A in Bewegung begriffen ist, so erhalten wir mit Rücksicht auf (1.) folgende sechs Formeln:

$$(2.)\begin{cases} \sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum mg\cos\alpha + \sum X^A, \\ \text{etc. etc.} \\ \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum mg(y\cos\gamma - z\cos\beta) + \sum(yZ^A - zY^A), \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

Diese Formeln sind, falls man die Gesammtmasse des Körpers mit M, ferner die Coordinaten seines Massenmittelpunktes σ mit ξ, η, ζ bezeichnet, und die bekannten Relationen (Art. I, pag. 167) beachtet:

$$\sum m = M\,,\quad \sum mx = M\xi\,,\quad \sum my = M\eta\,,\quad \sum mz = M\zeta\,,$$

auch folgendermassen darstellbar:

$$(3.)\begin{cases} \sum m\frac{d^2x}{dt^2} = (Mg\cos\alpha) + \sum X^A, \\ \text{etc. etc.} \\ \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \eta(Mg\cos\gamma) - \zeta(Mg\cos\beta) + \sum(yZ^A - zY^A), \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

Diese Formeln (3.) sind, was ihre rechten Seiten betrifft, offenbar von genau derselben Beschaffenheit, als bestünde die von der Schwere auf den Körper ausgeübte Wirkung in einer *einzigen*, den Körper im Punkte (ξ, η, ζ) erfassenden Kraft mit den Componenten $Mg\cos\alpha$, $Mg\cos\beta$, $Mg\cos\gamma$. Folglich wird die durch diese Formeln (3.) sich bestimmende Bewegung des Körpers ebenfalls von derselben Beschaffenheit sein, als bestünde die Wirkung der Schwere in jener *einen* Kraft; so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Satz. *Der Einfluss der Schwere auf einen starren Körper ist stets von genau derselben Art, als wäre die ganze Masse des Körpers concentrirt in seinem Massenmittelpunkte. Mit Rücksicht hierauf pflegt dieser Massenmittelpunkt kurzweg als* Schwerpunkt *des Körpers bezeichnet zu werden.*

Dies vorausgeschickt, gehen wir über zur *Theorie des Pendels*, d. i. zur Betrachtung eines starren Körpers M, der unter dem Einfluss der Schwere in Drehung begriffen ist um eine *festgehaltene* horizontale Axe. Irgend zwei Punkte dieser Axe mögen mit 1 und 2 bezeichnet sein; und die zum Festhalten dieser Axe dienenden Kräfte mögen die Punkte 1 und 2 zu Angriffspunkten haben, und, was ihre noch unbekannten Componenten betrifft, mit X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 bezeichnet sein.

Wir können auf das Pendel M ohne Weiteres die Laplace'schen Differentialgleichungen anwenden. Selbstverständlich haben wir alsdann *sämmtliche* den Körper M sollicitirenden äusseren Kräfte, also nicht nur die Schwere, sondern auch die soeben genannten Kräfte X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 in diese Gleichungen aufzunehmen. In solcher Weise aber gelangen wir zu sechs Gleichungen, die von den Formeln (3.) nur dadurch sich unterscheiden, dass X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 an Stelle der dortigen X^A, Y^A, Z^A eingetreten sind, so dass also z. B. die *letzte* dieser sechs Gleichungen folgendermassen lauten wird:

$$(4.)\quad \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = Mg\,(\xi\cos\beta - \eta\cos\alpha) + \\ + (x_1Y_1 - y_1X_1) + (x_2Y_2 - y_2X_2)\,,$$

wo x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der beiden Punkte 1 und 2 vorstellen.

Denkt man sich jetzt das mit der Erde verbundene absolut feste Axensystem (x, y, z) der Art gewählt, dass die x-Axe vertical nach unten gerichtet ist, und dass überdies die z-Axe mit der horizontalen Pendelaxe 1 2 zusammenfällt, so sind die Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 sämmtlich $= 0$; ferner ist alsdann $\alpha = 0$, und $\beta = \gamma = 90^0$; so dass also die Formel (4.) sich reducirt auf:

$$(5.)\quad \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\,Mg\eta\,.$$

Mit Bezug auf den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ und mit Bezug auf irgend ein Körpertheilchen $m(x, y, z)$ mögen die Bezeichnungen eingeführt werden:

$$(6.)\quad \begin{cases} \xi = \lambda \cos \varphi\,, \\ \eta = \lambda \sin \varphi\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = l \cos (\varphi + \delta)\,, \\ y = l \sin (\varphi + \delta)\,. \end{cases}$$

Alsdann repräsentirt φ den *variablen* Winkel, unter welchem die durch die Pendelaxe z und den Schwerpunkt σ gehende Ebene gegen die Verticalebene zx geneigt ist. Andererseits aber werden λ und l, δ *Constanten* sein; und zwar bezeichnen λ und l die senkrechten Abstände der Punkte σ und m von der Pendelaxe. Substituirt man die Werthe (6.) in (5.), so folgt sofort:

$$\left(\sum m l^2\right) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - Mg\lambda \sin \varphi\,,$$

d. i.

$$(7.)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \frac{Mg\lambda}{\mathsf{M}} \sin \varphi\,,$$

wo alsdann $\mathsf{M} = \sum m l^2$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Pendelaxe vorstellt.

Bemerkung. — Wir haben hier von den sechs Gleichungen (3.) nur die *letzte* benutzt. Bringt man gleichzeitig auch die *übrigen* in Anwendung, so ergeben sich die Werthe jener unbekannten Kräfte X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2, welche zum Festhalten der beiden Punkte 1 und 2 erforderlich sind.

Wir haben hier vorausgesetzt, dass zwei bestimmte Punkte 1 und 2 des pendelnden Körpers M festgehalten werden. Fast in genau derselben Weise aber lässt sich aus den LAPLACE'schen Differentialgleichungen die Formel (7.) auch dann ableiten, wenn der Körper M mit einer in zwei festen Lagern sich drehenden cylindrischen Axe versehen ist, falls man nur voraussetzt, dass die einander berührenden Flächentheile des Cylinders und jener beiden Lager *vollkommen glatt* sind.

In der That wird in diesem Fall die auf irgend einen Punkt x_1, y_1, z_1 von Seiten des festen Lagers ausgeübte Widerstandskraft X_1, Y_1, Z_1 gegen die Cylinderoberfläche *normal* sein. Es wird daher die in diesem Fall in der Gleichung (4.) an Stelle der Glieder

$$(x_1 Y_1 - y_1 X_1) + (x_2 Y_2 - y_2 X_2)$$

auftretende Summe

$$\sum (x_1 Y_1 - y_1 X_1)$$

wiederum *verschwinden*, falls man nur die z-Axe des Coordinatensystems mit der geometrischen Axe des in Rede stehenden Cylinders zusammenfallen lässt. Denn alsdann wird für jedweden Punkt x_1, y_1, z_1 der Cylinderoberfläche und für die auf denselben ausgeübte normale Druckkraft X_1, Y_1, Z_1 die Formel stattfinden:

$$x_1 : y_1 : z_1 = X_1 : Y_1 : Z_1 .$$

Andere Methode. — Man kann andererseits zur Ermittelung der Bewegung des Pendels auch den Satz der lebendigen Kraft benutzen:

$$dT = \sum \left(X dx + Y dy + Z dz \right), \tag{8.}$$

wo alsdann T die lebendige Kraft des betrachteten Körpers bezeichnet. Dabei braucht man, zufolge jenes Satzes [vgl. Art. I, pag. 185], von den auf die einzelnen Körpertheilchen $m(x, y, z)$ einwirkenden Kräften X, Y, Z nur diejenigen zu berücksichtigen, welche nach Absonderung der Cohäsions- und Widerstandskräfte noch übrig bleiben, also nur diejenigen Kräfte zu berücksichtigen, welche von der *Schwere* herrühren. Der Einfluss dieser letzteren Kräfte ist aber (Satz pag. 68) von genau derselben Art, als wäre die ganze Masse des Körpers in seinem Schwerpunkte $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ vereinigt. Demgemäss reducirt sich die Formel (8.), unter Anwendung der Bezeichnungen (1.), auf:

$$dT = (Mg \cos\alpha)\, d\xi + (Mg \cos\beta)\, d\eta + (Mg \cos\gamma)\, d\zeta . \tag{9.}$$

Lässt man jetzt, ebenso wie vorhin, die x-Axe vertical nach unten laufen, und die z-Axe mit der Pendelaxe zusammenfallen, mithin $\alpha = 0$, und $\beta = \gamma = 90^\circ$ werden, so folgt:

$$dT = Mg\, d\xi , \tag{10.}$$

oder, falls man für ξ den Werth (6.) und für T den Werth (17.) pag. 65 substituirt:

$$d \left[\frac{1}{2} \mathsf{M} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = - Mg\lambda \sin\varphi \, d\varphi ,$$

d. i.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \frac{Mg\lambda}{\mathsf{M}} \sin\varphi ; \tag{11.}$$

was mit (7.) übereinstimmt.

Dritte Methode. — Man kann schliesslich zur Lösung der gestellten Aufgabe auch den HAMILTON'schen Satz, oder vielmehr die aus diesem sich ergebende LAGRANGE'sche Differentialgleichung [Art. I, pag. 187]:

$$(12.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial \varphi} + Y\frac{\partial y}{\partial \varphi} + Z\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)$$

benutzen. Dabei ist hinsichtlich der Kräfte X, Y, Z genau dasselbe zu sagen, was vorhin [beim Uebergange von (8.) zu (9.)] bemerkt wurde; so dass man also mit Rücksicht auf (1.) zu folgender Formel gelangt:

$$(13.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = (Mg\cos\alpha)\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + (Mg\cos\beta)\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + (Mg\cos\gamma)\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}.$$

Lässt man jetzt die x-Axe vertical nach unten laufen, und die z-Axe mit der Pendelaxe zusammenfallen, mithin $\alpha = 0$, und $\beta = \gamma = 90^0$ werden, so folgt:

$$(14.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Mg\frac{\partial \xi}{\partial \varphi},$$

oder, falls man für ξ den Werth (6.) und für T den Werth (17.) pag. 65 substituirt:

$$\mathsf{M}\varphi'' = -Mg\lambda \sin\varphi ,$$

d. i.

$$(15.)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mg\lambda}{\mathsf{M}}\sin\varphi ;$$

was mit (7.) und (11.) übereinstimmt.

§ 23.

Ueber die Bewegung eines aus zwei gegen einander drehbaren Körpern zusammengesetzten Pendels.

Der pendelnde Körper M sei zusammengesetzt aus *zwei* Körpern $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{m}$, von denen der Erstere mit einem in zwei festen[1]) Lagern drehbaren Cylinder AB versehen ist, während beide Körper unter einander durch einen zweiten Cylinder $\alpha\beta$ verbunden sind. Dieser Cylinder $\alpha\beta$ soll in $\mathfrak{M}$ fest eingefügt gedacht werden, andererseits soll $\mathfrak{m}$ um denselben (nach Art

1) Man vgl. den Anfang des vorhergehenden Paragraphs.

eines Rades) drehbar[1]), und zu Anfang um denselben in irgend welche Rotationsgeschwindigkeit versetzt worden sein. Dabei sei sogleich bemerkt, dass wir die geometrischen Axen der beiden Cylinder AB und $\alpha\beta$ ebenfalls mit AB und $\alpha\beta$ bezeichnen werden, und dass wir völlig dahingestellt sein lassen, ob diese beiden Linien AB und $\alpha\beta$ in derselben Ebene liegen, oder nicht. Ihr *constanter Neigungswinkel* mag mit x bezeichnet, und AB (die eigentliche Pendelaxe) *horizontal* gedacht werden.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Bewegung des Systems $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}$ unter dem Einfluss der *Schwere* näher zu untersuchen, unter der Voraussetzung, dass keine Reibung stattfindet, dass mithin die in jenen Axen AB und $\alpha\beta$ einander berührenden Flächen *vollkommen glatt* sind. Auch mag, der Einfachheit willen, vorausgesetzt sein, dass der Körper $\mathfrak{m}$ ein *Umdrehungskörper* ist, und dass die Axe $\alpha\beta$ identisch sei mit der geometrischen Axe dieses Umdrehungskörpers. Der *Massenmittelpunkt* σ des Systems $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}$ wird alsdann, während $\mathfrak{m}$ um $\alpha\beta$ rotirt, mit Bezug auf $\mathfrak{M}$ stets ein und dieselbe relative Lage behalten, mithin als ein Punkt anzusehen sein, der mit der Masse des Körpers $\mathfrak{M}$ starr verbunden ist.

Die augenblickliche Position des Systems $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}$ hängt offenbar nur von *zwei* Argumenten ab, nämlich von den den Axen AB und $\alpha\beta$ entsprechenden Drehungswinkeln φ und τ. Dabei mag φ eingeschlossen gedacht werden von der mit $\mathfrak{M}$ verbundenen Ebene $AB\sigma$ und von der durch AB gehenden Verticalebene. Andererseits mag τ gelegen sein zwischen zwei durch $\alpha\beta$ gehenden Ebenen, von denen die eine mit $\mathfrak{M}$, die andere mit $\mathfrak{m}$ verbunden ist.

Für die Bewegung des Systems $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}$ gelten nun, falls man seine lebendige Kraft mit T bezeichnet, die Lagrange'schen Differentialgleichungen [Art. I, pag. 187]:

$$(1.)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial \varphi} + Y\frac{\partial y}{\partial \varphi} + Z\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right),$$

$$(2.)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \tau'} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial \tau} + Y\frac{\partial y}{\partial \tau} + Z\frac{\partial z}{\partial \tau}\right).$$

---

1) Es soll also $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{M}$ in derselben Weise verbunden sein, wie früher, pag. 27, M_2 mit M_1 verbunden war. Vgl. die Figur pag. 74.

Dabei braucht man, was die auf die einzelnen Elemente $m(x, y, z)$ des Systems einwirkenden Kräfte X, Y, Z betrifft, nur diejenigen zu berücksichtigen, welche nach Absonderung der Cohäsions- und Widerstandskräfte noch übrig bleiben, also nur diejenigen zu berücksichtigen, welche von der *Schwere* herrühren. Denkt man sich also die x-Axe *vertical nach unten* gerichtet, so reducirt sich z. B. die rechte Seite der Formel (1.) auf

$$\sum\left(gm\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) = g\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sum m x\right) = g\frac{\partial}{\partial \varphi}(M\xi),$$

wo $M = \mathfrak{M} + \mathfrak{m}$ die *Gesammtmasse* des Systems, und ξ die x-Coordinate des schon vorhin genannten *Massenmittelpunktes* σ vorstellt. Diese Coordinate ξ ist aber, wie aus der Definition des Winkels φ folgt, $= \lambda \cos \varphi$, wo λ den senkrechten Abstand des Punktes σ von der Axe AB bezeichnet. Demgemäss ergiebt sich für die rechte Seite der Formel (1.) der Werth:

$$g\frac{\partial}{\partial \varphi}(M\lambda \cos \varphi) = -\, gM\lambda \sin \varphi \,.$$

Desgleichen ergiebt sich für die rechte Seite der Formel (2.) folgender Werth:

$$g\frac{\partial}{\partial \tau}(M\lambda \cos \varphi) = 0 \,;$$

so dass also jene Gleichungen (1.), (2.) die Gestalt gewinnen:

$$(3.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\, gM\lambda \sin \varphi \,,$$

$$(4.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \tau'} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \,.$$

Bezeichnet man die lebendigen Kräfte der beiden Körper $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{m}$, einzeln genommen, mit $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{t}$, setzt man also:

$$(5.)\qquad T = \mathfrak{T} + \mathfrak{t} \,,$$

so ist [nach (17.) pag. 65]:

$$(6.)\qquad 2\mathfrak{T} = \mathfrak{M}_{AB}\varphi'^2 \,,$$

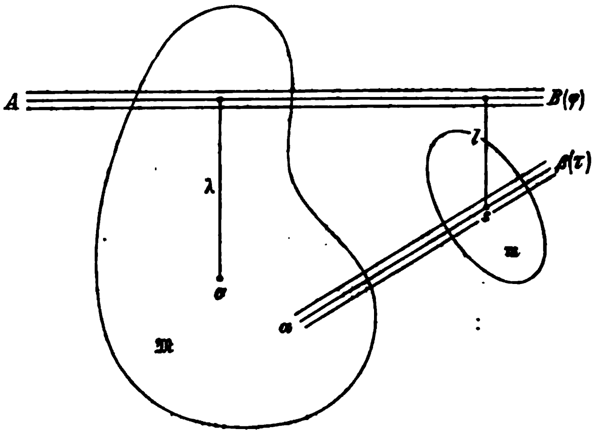
wo $\mathfrak{M}_{AB}$ das Trägheitsmoment des Körpers $\mathfrak{M}$ in Bezug auf die Pendelaxe AB vorstellt. Andererseits ist [nach (13.), (14.) pag. 64.]:

$$(7.)\qquad 2\mathfrak{t} = \mathfrak{m}V^2 + \mathfrak{m}_1\Omega_1^2 + \mathfrak{m}_2\Omega_2^2 + \mathfrak{m}_3\Omega_3^2 \,.$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{m}$ die Gesammtmasse des Körpers $\mathfrak{m}$, und V die augenblickliche Geschwindigkeit seines Massenmittelpunktes s; so dass also dieses V den Werth besitzt:

$$(\alpha.) \qquad V = l\varphi',$$

wo l den senkrechten Abstand des Punktes s von der Axe AB vorstellt [vgl. die folgende Figur]. Ferner bezeichnen 1, 2, 3 die vom Punkte s ausgehenden Hauptträgheitsaxen des Körpers $\mathfrak{m}$; so dass also die Axe 1 als identisch angesehen werden kann mit $\alpha\beta$. Ferner bezeichnen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ die den Axen 1, 2, 3



entsprechenden Hauptträgheitsmomente des Körpers $\mathfrak{m}$; so dass also $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_3$ ist. Endlich sind unter Ω_1, Ω_2, Ω_3 folgende Ausdrücke zu verstehen:

$$(\beta.) \qquad \begin{aligned} \Omega_1 &= \varphi_1\varphi' + \tau_1\tau', \\ \Omega_2 &= \varphi_2\varphi' + \tau_2\tau', \\ \Omega_3 &= \varphi_3\varphi' + \tau_3\tau'; \end{aligned}$$

dabei repräsentiren $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und τ_1, τ_2, τ_3 die Richtungscosinus der Axen AB und $\alpha\beta$ in Bezug auf die Axen 1, 2, 3; so dass also z. B.

$$\tau_1 = 1 \quad \text{und} \quad \tau_2 = \tau_3 = 0$$

ist. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus (7.) durch Substitution der Werthe (α.), (β.) die Formel:

$$(8.) \qquad 2\mathfrak{t} = \mathfrak{m}(l\varphi')^2 + \mathfrak{m}_1(\varphi_1\varphi' + \tau')^2 + \mathfrak{m}_2(\varphi_2\varphi')^2 + \mathfrak{m}_3(\varphi_3\varphi')^2,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(9.) \qquad 2\mathfrak{t} = [\mathfrak{m}l^2 + \mathfrak{m}_1\varphi_1^2 + \mathfrak{m}_2\varphi_2^2 + \mathfrak{m}_3\varphi_3^2]\,\varphi'^2 + 2\mathfrak{m}_1\varphi_1\varphi'\tau' + \mathfrak{m}_1\tau'^2.$$

Der Winkel der φ-Axe AB gegen die Axe 1 oder $\alpha\beta$ ist derselbe, den wir zu Anfang dieses Paragraphs mit $\varkappa$ bezeichnet haben. Demgemäss ist $\varphi_1 = \cos\varkappa$. Ueberdies repräsentirt der in (9.) in der eckigen Klammer enthaltene Ausdruck, wie man leicht erkennt, das Trägheitsmoment $\mathfrak{m}_{AB}$ des Körpers $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die Axe AB; so dass man also diese Formel (9.) auch so schreiben kann:

(10.) $$2\mathfrak{t} = \mathfrak{m}_{AB}\varphi'^2 + 2\mathfrak{m}_1 \cos\varkappa \cdot \varphi'\tau' + \mathfrak{m}_1\tau'^2 .$$

Nunmehr folgt aus (5.) durch Substitution der Werthe (6.) und (10.):

(11.) $$2T = (\mathfrak{M}_{AB} + \mathfrak{m}_{AB})\varphi'^2 + 2\mathfrak{m}_1 \cos\varkappa \cdot \varphi'\tau' + \mathfrak{m}_1\tau'^2 ,$$

oder einfacher geschrieben:

(12.) $$2T = \mathsf{M}\varphi'^2 + 2\mu \cos\varkappa \cdot \varphi'\tau' + \mu\tau'^2 .$$

Von den hier auftretenden Constanten

(12a.) $$\mathsf{M} = \mathfrak{M}_{AB} + \mathfrak{m}_{AB} \quad \text{und} \quad \mu = \mathfrak{m}_1$$

repräsentirt alsdann die erstere das Trägheitsmoment des ganzen Systems $M = \mathfrak{M} + \mathfrak{m}$ in Bezug auf die *Pendelaxe* AB, während die letztere das Trägheitsmoment des Umdrehungskörpers $\mathfrak{m}$ in Bezug auf seine *geometrische Axe* $\alpha\beta$ bezeichnet.

Durch Substitution des Werthes (12.) erhalten die Differentialgleichungen (3.), (4.) die Gestalt:

(13.) $$\mathsf{M}\varphi'' + \mu\cos\varkappa \cdot \tau'' = -gM\lambda \sin\varphi ,$$

(14.) $$\tau'' + \cos\varkappa \cdot \varphi'' = 0 ;$$

woraus, durch Elimination von τ'', sich ergiebt:

$$(\mathsf{M} - \mu\cos^2\varkappa)\,\varphi'' = -gM\lambda \sin\varphi ,$$

d. i.

(15.) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{gM\lambda}{\mathsf{M} - \mu\cos^2\varkappa}\sin\varphi .$$

Durch diese Gleichung bestimmt sich φ als Function der Zeit. Und solches absolvirt gedacht, bestimmt sich alsdann, mittelst der aus (14.) *entspringenden Formel:*

(16.) $$\frac{d\tau}{dt} + \cos\varkappa\,\frac{d\varphi}{dt} = \text{Const.} ,$$

auch τ als Function der Zeit.

Um das Hauptresultat unserer Untersuchung besser übersehen zu können, wollen wir jetzt das gegebene Pendel $M = \mathfrak{M} + \mathfrak{m}$ zum zweiten Mal in Schwingung versetzen, nachdem wir aber zuvor die beiden Körper $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{m}$ *zusammengelöthet*, d. h. starr mit einander verbunden haben. Alsdann erhalten wir für dieses Pendel nicht mehr die Differentialgleichung (15.), sondern vielmehr [nach (7.) pag. 69] die einfachere Gleichung:

$$(F.) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{gM\lambda}{\mathsf{M}} \sin\varphi ,$$

wo sämmtliche Buchstaben genau dieselbe Bedeutung haben, wie in (15.). Demgemäss gelangen wir durch Vergleichung dieser Formeln (*F.*) und (15.) zu folgendem Resultate:

Denkt man sich das gegebene Pendel $M = \mathfrak{M} + \mathfrak{m}$ zu wiederholten Malen in Schwingung versetzt, einmal unter der Voraussetzung, dass die beiden Körper $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{m}$ zusammengelöthet sind, das andere Mal unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{m}$ um die Axe $\alpha\beta$ drehbar, und zu Anfang um diese Axe in irgend welche Rotationsgeschwindigkeit versetzt ist, so wird das Gesetz der Pendelbewegung in beiden Fällen denselben Charakter haben, und nur einen Unterschied darbieten hinsichtlich der in ihm enthaltenen Constanten.

Genauer ausgedrückt: Geht man vom ersten zum zweiten Fall über, so wird in der Pendelbewegung ein Unterschied eintreten genau von derselben Art, als wäre das ursprüngliche Trägheitsmoment M des Pendels plötzlich um eine gewisse Constante vermindert worden. Diese Constante ist $= \mu \cos^2 \varkappa$, wo μ das Trägheitsmoment des Umdrehungskörpers $\mathfrak{m}$ in Bezug auf seine geometrische Axe $\alpha\beta$, und $\varkappa$ den Neigungswinkel dieser Axe gegen die Pendelaxe AB vorstellt. [Vgl. die Figur pag. 74.]

§ 24.

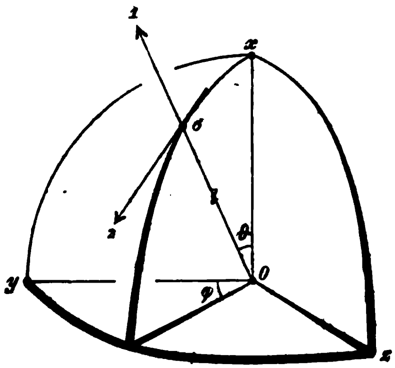
Ueber die Bewegung eines Kreisels, dessen Spitze festgehalten wird.

Wir nehmen die festgehaltene[1]) Spitze O des Kreisels zum Anfangspunkt eines absolut festen Axensystems (x, y, z), dessen x-Axe *vertical nach oben* laufen mag, und setzen, was die Coordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunktes σ des Kreisels betrifft:

$$(1.) \qquad \begin{aligned} \xi &= l \cos\vartheta , \\ \eta &= l \sin\vartheta \cos\varphi , \\ \zeta &= l \sin\vartheta \sin\varphi , \end{aligned}$$

1) Man vgl. den Anfang des § 22, pag. 66.

wo l die constante Länge der Linie $O\sigma$ vorstellt. Alsdann wird die augenblickliche Position des Kreisels im Raume völlig bestimmt sein durch Angabe der drei Argumente φ, ϑ und τ, wo τ den *Drehungswinkel* vorstellt. Es soll nämlich τ denjenigen Winkel bezeichnen, unter welchem eine bestimmte mit dem Kreisel verbundene und durch seine geometrische Axe $O\sigma$ gehende Ebene gegen die augenblickliche Meridianebene σOx (d. i. gegen die Ebene des Winkels ϑ) geneigt ist.



Um die Vorstellung zu fixiren, wollen wir die Spitze des Kreisels als eine kleine Kugel uns vorstellen, welche eingesenkt ist in eine auf der festen Horizontalebene yz bei O sich vorfindende kugelförmige (resp. halbkugelförmige) Vertiefung, und annehmen, dass die daselbst einander berührenden Flächentheile *vollkommen glatt* sind. Auch soll der Radius der genannten kleinen Kugel genau ebenso gross sein, wie der Radius jener kugelförmigen Vertiefung; so dass also der mit O bezeichnete Punkt den gemeinschaftlichen Mittelpunkt dieser beiden Kugelflächen repräsentirt.

Ebenso wie in den früher betrachteten Beispielen werden alsdann bei den Lagrange'schen Gleichungen, und auch beim Satz der lebendigen Kraft nur die von der *Schwere* herrührenden Kräfte zu berücksichtigen sein; so dass man also, mit Hinblick auf den Satz pag. 68, und mit Rücksichtnahme auf (1.), zu folgenden Formeln gelangt:

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \varphi'} - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = -\,gM\dfrac{\partial \xi}{\partial \varphi} = 0\,, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \vartheta'} - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta} = -\,gM\dfrac{\partial \xi}{\partial \vartheta} = gMl\sin\vartheta\,, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \tau'} - \dfrac{\partial T}{\partial \tau} = -\,gM\dfrac{\partial \xi}{\partial \tau} = 0\,, \\ dT = -\,gM\,d\xi\,,\ \text{d. i.}\ T + gMl\cos\vartheta = \text{Const.}\,, \end{cases}$$

wo T die lebendige Kraft des Kreisels, und M seine Masse vorstellt.

Bezeichnet man die vom Schwerpunkte σ ausgehenden drei Hauptträgheitsaxen des Kreisels mit 1, 2, 3, und die entsprechenden Trägheitsmomente mit M_1, M_2, M_3, so ist die lebendige Kraft T des Kreisels [Satz (13.), (14.) pag. 64] ausdrückbar durch die Formel:

$$2T = MV^2 + M_1\Omega_1^2 + M_2\Omega_2^2 + M_3\Omega_3^2 \,, \tag{3.}$$

wo die Ω's die Bedeutungen haben:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \varphi_1\varphi' + \vartheta_1\vartheta' + \tau_1\tau' \,, \\ \Omega_2 &= \varphi_2\varphi' + \vartheta_2\vartheta' + \tau_2\tau' \,, \\ \Omega_3 &= \varphi_3\varphi' + \vartheta_3\vartheta' + \tau_3\tau' \,; \end{aligned} \tag{4.}$$

während V die augenblickliche Geschwindigkeit des Schwerpunktes σ repräsentirt. Es hat mithin V^2, wie aus (1.) sich ergiebt, den Wert:

$$V^2 = l^2(\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\vartheta) \,. \tag{5.}$$

Was die Formeln (4.) betrifft, so repräsentiren φ_1, φ_2, φ_3 die Cosinus der Winkel, unter welchen die φ-Axe gegen die Hauptträgheitsaxen 1, 2, 3 geneigt ist. Und zwar ist dabei unter dieser φ-Axe diejenige Axe zu verstehen, um welche der betrachtete Körper M sich drehen würde, falls man die beiden andern Argumente ϑ und τ constant erhalten wollte. Hieraus folgt, dass diese φ-Axe identisch ist mit der Linie Ox [vgl. die Figur], d. i. mit der x-Axe. Demgemäss ergeben sich für φ_1, φ_2, φ_3 die Werthe:

$$\varphi_1 = \cos\vartheta \,, \qquad \varphi_2 = -\sin\vartheta \,, \qquad \varphi_3 = 0 \,,$$

falls man nämlich zur Axe 1 die geometrische Axe $O\sigma$ erwählt, andererseits zur Axe 2 diejenige nimmt, welche in der Meridianebene (d. i. in der Ebene des Winkels ϑ) liegt. Vgl. die Figur.

Ferner ist die ϑ-Axe diejenige, um welche der Körper sich drehen würde, falls man die Argumente φ und τ constant erhalten wollte. Es ist also diese ϑ-Axe nichts Anderes, als die in O auf der Meridianebene (d. i. auf der Ebene des Winkels ϑ) errichtete Normale. Hieraus folgt:

$$\vartheta_1 = 0 \,, \qquad \vartheta_2 = 0 \,, \qquad \vartheta_3 = 1 \,.$$

Endlich ist die τ-Axe die geometrische Axe des Kreisels, nämlich diejenige, um welche die Drehung des Körpers erfolgen würde, falls man φ und ϑ constant erhalten wollte. Demgemäss ergiebt sich:

$$\tau_1 = 1 \,, \qquad \tau_2 = 0 \,, \qquad \tau_3 = 0 \,.$$

Die Formeln (4.) gewinnen somit die Gestalt:

$$(6.)\qquad \begin{aligned} \Omega_1 &= +\varphi' \cos\vartheta + \tau' , \\ \Omega_2 &= -\varphi' \sin\vartheta , \\ \Omega_3 &= \vartheta' . \end{aligned}$$

Substituirt man aber jetzt die Werthe (5.), (6.) in (3.) und beachtet man dabei, dass $M_2 = M_3$ ist, so ergiebt sich:

$$2T = Ml^2(\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\vartheta) + M_1(\varphi' \cos\vartheta + \tau')^2 + M_2(\varphi'^2 \sin^2\vartheta + \vartheta'^2),$$

d. i.

$$(7.)\quad 2T = (Ml^2 + M_2)(\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\vartheta) + M_1(\varphi' \cos\vartheta + \tau')^2 .$$

Da es sich nur um die Bestimmung der *drei* Unbekannten φ, ϑ, τ als Functionen der Zeit handelt, so kann man eine der *vier* Gleichungen (2.) z. B. die *zweite* als überflüssig fortlassen. Die übrigen drei Gleichungen gewinnen, weil T (7.) von φ', τ', nicht aber von φ, τ selber abhängt, die Gestalt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = 0 , \qquad \text{d. i.} \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \text{Const.} ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \tau'} = 0 , \qquad \text{d. i.} \qquad \frac{\partial T}{\partial \tau'} = \text{Const.} ,$$

$$\text{und:} \qquad T + gMl \cos\vartheta = \text{Const.} ,$$

oder, falls man jetzt für T den Ausdruck (7.) wirklich substituirt, folgende Gestalt:

$$(\alpha.)\qquad (Ml^2 + M_2)\varphi' \sin^2\vartheta + M_1 \cos\vartheta(\varphi' \cos\vartheta + \tau') = \text{Const.},$$

$$(\beta.)\qquad \varphi' \cos\vartheta + \tau' = \text{Const.},$$

$$(\gamma.)\ (Ml^2 + M_2)(\vartheta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\vartheta) + M_1(\varphi' \cos\vartheta + \tau')^2 + 2gMl\cos\vartheta = \text{Const.}$$

Wir wollen nun, was den Anfangszustand, d. i. die Werthe φ_0, ϑ_0, τ_0 und φ_0', ϑ_0', τ_0' betrifft, festsetzen, dass φ_0' *und* ϑ_0' *gleich Null* sind, dass hingegen τ_0' *äusserst gross* ist. Mit anderen Worten: *Wir wollen festsetzen, dass zu Anfang die geometrische Axe des Kreisels in Ruhe, seine Rotationsgeschwindigkeit um diese Axe aber ungemein gross gewesen sein soll.* Alsdann geht z. B. die *rechte Seite* der aus (β.) sich ergebenden Gleichung

$$\varphi' \cos\vartheta + \tau' = \varphi_0' \cos\vartheta_0 + \tau_0'$$

über in τ_0'; so dass man erhält:

$$(8.)\qquad \frac{d\varphi}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\tau}{dt} = \tau_0' .$$

Mit Rücksicht hierauf gewinnen sodann die Gleichungen (α.) und (γ.) folgende Gestalt:

$$(Ml^2 + M_2)\,\varphi'\sin^2\vartheta = M_1\tau'_0(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\,,$$

$$(Ml^2 + M_2)\,(\vartheta'^2 + \varphi'^2\sin^2\vartheta) = 2gMl\,(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\,.$$

Schreibt man die erste dieser beiden Gleichungen von Neuem hin, und schreibt man sodann auch diejenige Gleichung hin, welche aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination von φ' entsteht, indem man dabei jedesmal [mittelst der in (1.) angegebenen Relation: $\xi = l\cos\vartheta$] die Variable ξ an Stelle von ϑ einführt, so erhält man nach elementarer Rechnung folgende beiden Formeln:

$$(9.)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_1\tau'_0 l}{Ml^2 + M_2}\,\frac{\xi_0 - \xi}{l^2 - \xi^2}\,,$$

$$(10.)\qquad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \frac{2Mg}{Ml^2 + M_2}\,(\xi - \xi_0)\,[(\xi^2 - l^2) - 2A\,(\xi - \xi_0)]\,,$$

wo ξ_0 den Anfangswerth von ξ repräsentirt, während $2A$ folgende Constante bezeichnet:

$$(11.)\qquad 2A = \frac{M_1^2\tau_0'^2}{2Mg(Ml^2 + M_2)}\,.$$

Durch die drei Gleichungen (8.), (9.), (10.) *bestimmen sich* τ, φ *und das an Stelle von* ϑ *eingeführte* ξ *als Functionen der Zeit. Und zwar bestimmt sich* ξ *aus* (10.), *sodann* φ *aus* (9.), *und hierauf endlich* τ *aus* (8.).

Bemerkung. — Zu den Gleichungen (10.), (9.), (8.) tritt bei Berechnung der von der Zeit abhängenden Functionen ξ, φ, τ selbstverständlich noch die Anforderung hinzu, dass diese Functionen die vorgeschriebenen Anfangswerthe ξ_0, φ_0, τ_0 besitzen sollen. Den Gleichungen selber, sowie auch dieser Anforderung, wird aber Genüge geleistet, falls man jenen Functionen ξ, φ, τ für *jede beliebige* Zeit t die Werthe beilegt:

$$(A.)\qquad \xi = \xi_0\,,\qquad \varphi = \varphi_0\,,\qquad \tau = \tau_0 + \tau'_0 t\,;$$

wie solches aus dem blossen Anblick der Gleichungen (10.), (9.), (8.) sofort hervorgeht. Nun waren ϑ_0, φ_0 oder was dasselbe ist ξ_0, φ_0 beliebig gegeben. Mit andern Worten: Die Anfangslage der geometrischen Axe des Kreisels war eine *beliebig* gegebene, also z. B. von *beliebiger* Neigung gegen die Horizontalebene. Und die beiden ersten der Gleichungen (A.) sagen also aus, dass die geometrische Axe des Kreisels in dieser beliebig gegebenen Anfangslage *fortdauernd* verharren wird; — was offenbar absurd ist.

Dieses Absurdum kann natürlich nur dadurch entstanden sein, dass in unsere Betrachtungen irgend ein Fehler sich eingeschlichen hat. Und dieser Fehler besteht darin, dass wir von den vier Gleichungen (2.) die zweite „als überflüssig" fortliessen. Zieht man nämlich diese damals fortgelassene Gleichung mit in Betracht, so zeigt sich sofort, dass die Werthe (A.) derselben *nicht* Genüge leisten, dass diese Werthe also keinen Anspruch darauf haben, als die Lösung des hier vorliegenden mechanischen Problems angesehen zu werden.

Um die Dinge weiter aufzuklären, diene folgendes einfache Beispiel. Bewegt sich längs der vertical nach oben gerichteten x-Axe ein materieller Punkt m unter dem Einfluss der Schwere, so gilt für die Coordinate x dieses Punktes die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\,. \tag{U.}$$

Bezeichnet man den Anfangswerth von x mit x_0, und nimmt man an, dass der Punkt zu Anfang in *Ruhe* gewesen ist, so folgt aus dieser Gleichung in bekannter Weise:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2g\,(x_0 - x)\,. \tag{V.}$$

Wollte man nun von diesen beiden Gleichungen (*U.*), (*V.*) die erste „als überflüssig" fortlassen, so würde man zu dem absurden Resultate gelangen, dass x fortdauernd den constanten Werth x_0 beibehält, dass mithin der betrachtete Punkt, trotz der einwirkenden Schwere, fortdauernd in Ruhe bleibt.

Man kann die Gleichung (10.) auch so schreiben:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \frac{2Mg}{Ml^2 + M_2}\,(\xi - \xi_0)\,(\xi - \alpha)\,(\xi - \gamma) = f(\xi)\,, \tag{12.}$$

wo $f(\xi)$ als Abbreviatur dienen soll zur Bezeichnung der rechten Seite, während α und γ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

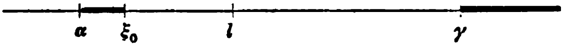
$$(\xi^2 - l^2) - 2A\,(\xi - \xi_0) = 0$$

repräsentiren. Diese Wurzeln sind, weil die Constante A (11.), ebenso wie τ_0', ungemein gross ist, entwickelbar nach fallenden Potenzen von A, und bei Vernachlässigung von $\left(\frac{1}{A}\right)^2$ folgendermassen darstellbar:

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_0 - \frac{l^2 - \xi_0^2}{2A}\,, \\ \gamma &= 2A - \xi_0 + \frac{l^2 - \xi_0^2}{2A}\,. \end{aligned} \tag{13.}$$

Lässt man den trivialen Fall, dass die Anfangslage der geometrischen Axe des Kreisels genau vertical ist, bei Seite, so

wird l (seiner Definition zufolge) stets $> \xi_0$, mithin $l^2 - \xi_0^2$ stets > 0 sein. Aus den mit der ungemein grossen Constanten A behafteten Formeln (13.) folgt somit, dass α *sehr wenig kleiner als* ξ_0, und dass andererseits γ *sehr gross* ist. Trägt man also diese Constanten α, γ, sowie auch die Constanten l, ξ_0 auf irgend einer Axe, welche die ξ-Axe heissen mag, als Abscissen auf, so entsteht folgendes Bild:



Die Constanten α, ξ_0, γ sind aber zugleich die Wurzeln des in (12.) angegebenen Ausdrucks $f(\xi)$. Demgemäss wird diese Function $f(\xi)$, welche für $\xi = -\infty$ negativ ist, in jedem der drei Punkte α, ξ_0, γ ihr Vorzeichen wechseln, der Art, dass sie links von α negativ, zwischen α und ξ_0 *positiv*, zwischen ξ_0 und γ negativ, und sodann rechts von γ wieder *positiv* ist. Von den beiden positiven Intervallen $\alpha\xi_0$ und $\gamma\infty$ [die in der Figur durch besonders *starke* Striche hervorgehoben sind] kommt das letztere nicht weiter in Betracht, weil die Variable ξ, ihrer geometrischen Bedeutung zufolge, stets $\leqq l$ bleibt, in jenes Intervall $\gamma\infty$ also niemals hineingerathen kann.

Während der Bewegung des Kreisels wird nun offenbar $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$, also nach (12.) auch $f(\xi)$ beständig *positiv* sein. Mit andern Worten: Die Variable ξ wird, während der Bewegung des Kreisels, nur solche Werthe annehmen können, für welche $f(\xi)$ *positiv* ist. Und es wird also dieselbe, weil das Intervall $\gamma\infty$ nicht in Betracht kommt, während der in Rede stehenden Bewegung fortdauernd *im Intervall* $\alpha\xi_0$ *bleiben*. Ueberdies wird ein Uebergehen der Variablen ξ vom Wachsen zum Abnehmen, oder umgekehrt vom Abnehmen zum Wachsen nur in solchen Augenblicken möglich sein, in denen $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$ d. i. $f(\xi)$ verschwindet, also nur möglich sein in solchen Augenblicken, in denen die auf das Intervall $\alpha\xi_0$ beschränkte Variable ξ einen der beiden Endpunkte dieses Intervalles erreicht. Wir gelangen somit zu folgendem Resultate:

Während der Bewegung des Kreisels wird sein Schwerpunkt σ beständig auf einer um den festen Punkt O [vgl. die Figur pag. 77) *mit dem Radius l beschriebenen Kugelfläche bleiben, und auf dieser Kugelfläche hin und her laufen zwischen zwei einander äusserst*

nahen Horizontalebenen $\xi = \alpha$ *und* $\xi = \xi_0$. *Auch wird dieser Punkt* σ *vom Steigen zum Sinken und umgekehrt vom Sinken zum Steigen immer nur in solchen Augenblicken übergehen können, in denen er eine dieser beiden Horizontalebenen erreicht. Die beiden Kreise, in denen die Kugelfläche von den in Rede stehenden beiden Horizontalebenen geschnitten wird, mögen kurzweg die beiden Hauptkreise heissen.*

Setzt man, um die Vorstellung zu fixiren voraus, dass die gegebene äusserst grosse Constante τ_0' *positiv* ist, so wird das Azimuth φ des Punktes σ, während seines Steigens sowohl wie auch während seines Sinkens, beständig *im Wachsen* begriffen sein. Denn es sind $\xi_0 - \xi$ und $l^2 - \xi^2$ stets positiv, und es ist daher, mit Rücksicht auf die soeben gemachte Voraussetzung, die rechte Seite der Formel (9.) ebenfalls stets positiv.

Um die noch unbekannte Bahn, auf welcher der Punkt σ zwischen den beiden Hauptkreisen $\xi = \alpha$ und $\xi = \xi_0$ hin und her geht, näher zu untersuchen, bedienen wir uns der beiden aus (12.) und (9.) entspringenden Formeln:

$$(14.)\quad dt = \varepsilon \sqrt{\frac{Ml^2 + M_2}{2Mg}} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_0 - \xi)(\xi - \alpha)(\gamma - \xi)}},$$

$$(15.)\quad d\varphi = \varepsilon\, l \sqrt{2A} \frac{\sqrt{\xi_0 - \xi} \cdot d\xi}{(l^2 - \xi^2)\sqrt{(\xi - \alpha)(\gamma - \xi)}},$$

wo A die in (11.) eingeführte Constante vorstellt, während $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem der Punkt σ im betrachteten Augenblicke im Steigen oder im Sinken sich befindet. Sind (ξ, φ) und $(\xi + d\xi, \varphi + d\varphi)$ die Positionen des Punktes σ auf seiner noch unbekannten Bahn in zwei auf einander folgenden Zeitaugenblicken t und $t + dt$, und denkt man sich auf der Kugelfläche durch (ξ, φ) einen Parallelkreis gezogen (d. i. einen Kreis, der mit all' seinen Punkten in ein und derselben Horizontalebene liegt), so wird das zwischen jenen beiden Positionen (ξ, φ) und $(\xi + d\xi, \varphi + d\varphi)$ gelegene *Bahnelement* gegen diesen Parallelkreis unter einem Winkel ω geneigt sein, für welchen die Formel gilt:

$$(16.)\qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{l}{l^2 - \xi^2} \frac{d\xi}{d\varphi};$$

6*

wie solches, durch einfache geometrische Betrachtungen und mit Rücksicht auf die Relation $\xi = l \cos \vartheta$, sich leicht ergiebt. Hieraus folgt durch Benutzung der Formel (15.) sofort:

$$(17.) \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2A}} \frac{\sqrt{(\xi - \alpha)(\gamma - \xi)}}{\sqrt{\xi_0 - \xi}}.$$

Demgemäss erhält man also für alle Bahnpunkte, die *dasselbe* ξ haben, auch *ein und denselben* Werth von $\operatorname{tg} \omega$, abgesehen vom Factor $\varepsilon = \pm 1$, und gelangt daher zu folgendem Satze:

Die auf der Kugelfläche zwischen den beiden einander äusserst nahen Hauptkreisen $\xi = \alpha$ und $\xi = \xi_0$ hin und hergehende Bahn des Punktes σ besteht aus einzelnen zu einander congruenten, respective symmetrischen Stücken, deren jedes vom einen Hauptkreise zum andern reicht. Und zwar wird jedes solches Bahnstück tangential sein zum untern Hauptkreise $\xi = \alpha$, hingegen orthogonal sein zum obern Hauptkreise $\xi = \xi_0$. Denn aus (17.) ergiebt sich $\omega = 0$ für $\xi = \alpha$, hingegen $\omega = 90^\circ$ für $\xi = \xi_0$. Auch erkennt man aus (17.), dass ω von $\xi = \alpha$ bis $\xi = \xi_0$ in fortdauerndem Wachsen begriffen ist.

Wir betrachten irgend ein solches Bahnstück AB, und stellen uns die Aufgabe, die Zeit T zu berechnen, welche der Punkt σ zur Durchlaufung desselben braucht, und ebenso auch den Unterschied Φ der Azimuthe der beiden Punkte A und B näher zu bestimmen. Liegt, wie wir annehmen wollen, A auf dem *untern*, und B auf dem *obern* Hauptkreise, so wird der Punkt σ bei Durchlaufung dieses Bahnstückes AB in beständigem *Steigen* begriffen sein. In den Formeln (14.), (15.) wird daher, während dieser Bewegung, der Factor ε fortdauernd $= +1$ sein. Demgemäss erhält man aus jenen Formeln:

$$(18.) \qquad T = \sqrt{\frac{Ml^2 + M_2}{2Mg}} \int_{\xi=\alpha}^{\xi=\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_0 - \xi)(\xi - \alpha)(\gamma - \xi)}},$$

$$(19.) \qquad \Phi = l\sqrt{2A} \int_{\xi=\alpha}^{\xi=\xi_0} \frac{\sqrt{\xi_0 - \xi} \cdot d\xi}{(l^2 - \xi^2)\sqrt{(\xi - \alpha)(\gamma - \xi)}}.$$

Zur Berechnung dieser Integrale mag nun an Stelle des von α nach ξ_0 gehenden Integrationsargumentes ξ eine neue Variable w eingeführt werden mittelst der Formeln:

$$(\alpha.)\qquad \xi - \alpha = (\xi_0 - \alpha)\sin^2 w\,,$$

$$(\beta.)\qquad \xi_0 - \xi = (\xi_0 - \alpha)\cos^2 w\,,$$

$$(\gamma.)\qquad d\xi = 2(\xi_0 - \alpha)\sin w\cos w\,dw\,.$$

Setzt man zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(\delta.)\qquad \frac{l^2 - \xi_0^2}{2} = c\,,$$

so ist nach (13.):

$$(\varepsilon.)\qquad \xi_0 - \alpha = \frac{c}{A}\,,\quad \text{und}\quad \gamma = 2A - \xi_0 + \frac{c}{A}\,;$$

wodurch die Formeln (α.), (β.), (γ.) folgende Gestalt erhalten:

$$(\zeta.)\qquad \xi - \alpha = \frac{c\sin^2 w}{A}\,,$$

$$(\eta.)\qquad \xi_0 - \xi = \frac{c\cos^2 w}{A}\,,$$

$$(\vartheta.)\qquad d\xi = \frac{2c\sin w\cos w\,dw}{A}\,.$$

Aus (η.) folgt sofort:

$$\gamma - \xi = \gamma - \left(\xi_0 - \frac{c\cos^2 w}{A}\right),$$

$$l^2 - \xi^2 = l^2 - \left(\xi_0 - \frac{c\cos^2 w}{A}\right)^2.$$

Und diese beiden letzten Formeln sind, mit Rücksicht auf den in (ε.) angegebenen Werth von γ, auch so darstellbar:

$$(\iota.)\qquad \gamma - \xi = 2A\left(1 - \frac{\xi_0}{A} + \frac{c\,(1 + \cos^2 w)}{2A^2}\right),$$

$$(\varkappa.)\qquad l^2 - \xi^2 = (l^2 - \xi_0^2) + \frac{2c\,\xi_0\cos^2 w}{A} - \frac{c^2\cos^4 w}{A^2}\,.$$

Substituirt man aber die Werthe (ζ.), (η.), (ϑ.), (ι.), ($\varkappa$.) in (18.), (19.), indem man dabei die höheren Potenzen des sehr kleinen Bruches $\frac{1}{A}$ vernachlässigt, und beachtet man [vgl. (α.), (β.)], dass die Integration nach der neuen Variablen w von $w = 0$ bis $w = \frac{\pi}{2}$ auszuführen ist, so erhält man:

$$T = \sqrt{\frac{Ml^2 + M_2}{2Mg}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,dw}{\sqrt{2A}},$$

$$\Phi = l\sqrt{2A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2c\cos^2 w \cdot dw}{(l^2 - \xi_0^2)\,A\sqrt{2A}},$$

oder, falls man die Integrationen wirklich ausführt, und für c seine eigentliche Bedeutung (δ.) substituirt:

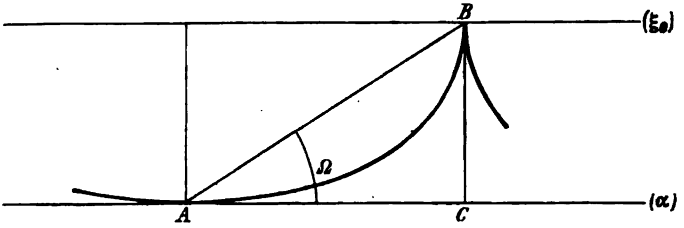
(20.) $$T = \pi\sqrt{\frac{Ml^2 + M_2}{2Mg \cdot 2A}}, \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{\pi l}{4A},$$

oder mit Rücksicht auf (11.):

(21.) $$T = \frac{\pi}{\tau_0'}\,\frac{Ml^2 + M_2}{M_1}, \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{\pi l}{4A}.$$

Diese mit den sehr grossen Nennern τ_0' und A behafteten Formeln (21.) zeigen, dass T und Φ *sehr klein* sind.

Legt man also durch den Punkt B einen Meridian, und bezeichnet man das zwischen den beiden Hauptkreisen $\xi = \xi_0$ und $\xi = \alpha$ gelegene Stück dieses Meridians mit BC, so wird nicht allein BC, sondern ebenso auch AC *äusserst klein* sein. Uebrigens ist das Verhältniss dieser beiden Liniensegmente AC



und CB zu einander leicht angebbar. Bringt man nämlich auf das kleine Dreieck ABC die allgemeine Formel (16.) in Anwendung, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{l}{l^2 - \alpha^2}\,\frac{\xi_0 - \alpha}{\Phi},$$

wo Ω den Winkel BAC bezeichnet. Hieraus folgt, falls man

für Φ den Werth (21.), und für $(\xi_0 - \alpha)$ den aus der *ersten* Formel (13.) entspringenden Werth substituirt:

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{l}{l^2 - \alpha^2} \cdot \frac{l^2 - \xi_0^2}{2A} \cdot \frac{4A}{\pi l} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l^2 - \xi_0^2}{l^2 - \alpha^2},$$

oder, falls man für α den Werth (13.) einsetzt, und nach fallenden Potenzen von A entwickelt:

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{2}{\pi} + \frac{\mathfrak{A}}{A} + \frac{\mathfrak{B}}{A^2} + \cdots,$$

oder, falls man, wie überall bei dieser Untersuchung geschehen ist, die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt:

$$(22.) \qquad \operatorname{tg} \Omega = \frac{2}{\pi}.$$

Demgemäss verhalten sich [vgl. die Figur] die beiden Liniensegmente AC und CB zu einander wie π zu 2.

Zerlegt man also die Zone zwischen den beiden einander äusserst nahen Hauptkreisen durch auf einander folgende Meridiane in einzelne Rechtecke, der Art, dass jedes derselben je eines der vorhin besprochenen Bahnstücke in sich fasst, so wird in jedem solchen Rechteck die horizontale Seite zu der auf ihr senkrechten Seite sich verhalten wie π zu 2.

Es sind mithin die einzelnen Bahnstücke nicht nur ihrer Höhe nach, sondern ebenso auch in horizontaler Erstreckung äusserst klein. Ueberdies ist die Zeit T (21.), binnen welcher ein solches Bahnstück vom Punkte σ durchlaufen wird, äusserst kurz. Demgemäss wird die Bewegung des Punktes σ zu bezeichnen sein als eine zwischen den beiden Hauptkreisen hin und her gehende zitternde Bewegung.

Dabei dürfte bemerkenswerth sein, dass diese Bewegung von Augenblicken der Ruhe unterbrochen ist, die in sehr kurzen, einander gleichen Zeitintervallen auf einander folgen. Ein solcher Augenblick der Ruhe wird nämlich jedesmal eintreten, sobald der Punkt σ den obern Hauptkreis erreicht, um daselbst die Bewegungsrichtung CB [vgl. die Figur] *mit der entgegengesetzten Richtung BC zu vertauschen.*

Es mag mir gestattet sein zu bemerken, dass ich die in diesem Paragraph über den Kreisel mitgetheilten Untersuchungen der Hauptsache nach schon in meiner Vorlesung vom Winter 1883|84 vorgetragen habe. Neu hinzugetreten sind seit jener

Zeit nur die *letzten* einfachen Betrachtungen auf pag. 84, 85, etc., deren Ergebniss mich sehr überraschte. Zu denselben Resultaten ist übrigens auch Hess gelangt in seiner sehr umfangreichen und schätzbaren Arbeit über das Gyroskop vom Jahre 1887 (Mathem. Annal. Bd. 29, pag. 563).

Nachträgliche Bemerkungen.

Die Methode, deren ich mich, Art. I, pag. 176, 177, zur Ableitung des Hamilton'schen Satzes bedient habe, ist im Vergleich mit den früher üblichen indirecten Methoden, als eine *ausserordentlich schöne* zu bezeichnen. Dieselbe dürfte von *Kirchhoff* herrühren. Vgl. Kirchhoff's Vorles. über Math. Physik, 1876, pag. 25—28.

Die sechs Differentialgleichungen Art. I, pag. 166 bilden bekanntlich die Grundlage der von *Laplace* über den Schwerpunkt des Weltsystems und über die invariable Ebene aufgestellten Sätze. Demgemäss habe ich mir erlaubt, diese Gleichungen kurzweg die *Laplace'schen Gleichungen* zu nennen.

Inhaltsübersicht.

Seite

§ 12, 14 und 15. Erläuterungen zu § 11 23
§ 16. Ueber die Bewegung zweier starrer Körper, die einander berühren, und deren Oberflächen vollkommen *glatt* sind 29
§ 17. Betrachtung des Falles, dass die Oberflächen der beiden Körper vollkommen *rauh* sind 32
§ 18. Uebergang zu dem speciellen Falle, dass von den beiden vollkommen rauhen Oberflächen die eine eine Ebene ist 39
§ 19. Betrachtung des allgemeinen Falles, dass über die beiden einander berührenden Oberflächen, hinsichtlich ihrer Glätte oder Rauhheit, keinerlei Voraussetzung gemacht wird 43
§ 20. Der analytische Ausdruck für die lebendige Kraft zweier mit einander in Berührung bleibender Körper, unter der Voraussetzung, dass einer von diesen beiden Körpern absolut festliegt 52
§ 21. *Allgemeine Sätze zur Berechnung der lebendigen Kraft eines starren Körpers* 57
§ 22. Ueber die Bewegung eines starren Körpers unter dem Einfluss der Schwere, insbesondere über das Pendel 66
§ 23. Ueber die Bewegung eines aus zwei gegen einander drehbaren Theilen zusammengesetzten Pendels 71
§ 24. Ueber die Bewegung eines Kreisels, dessen Spitze festgehalten wird 76

SITZUNG VOM 23. APRIL 1888.

W. G. Hankel, *Das elektrodynamische Gesetz ein Punktgesetz.* Mit 5 Figuren.

Es ist bis jetzt das elektrodynamische Gesetz als in seinem Wesen gänzlich verschieden von den Gesetzen der Schwere und der ruhenden Elektricität aufgefasst worden. Man hat bei der Bestimmung der Einwirkung eines Stromelementes auf ein anderes von Anfang an beide Elemente in die Rechnung aufgenommen. Im Folgenden werde ich nun zeigen, dass das elektrodynamische Gesetz in gleicher Weise wie das Gesetz der Schwere und der ruhenden Elektricität als ein sogenanntes Punktgesetz dargestellt werden kann.

Ein materieller Körper ändert den Zustand des ihn umgebenden physikalischen Raumes oder räumlichen Mittels in der Weise, dass ein zweiter an einen bestimmten Ort gebrachter Körper eine Anziehung zum ersteren, in deren Betrag dann der zweite Körper mit seiner Masse als Factor eingeht, erfährt. Bezeichnet m die Masse des ersten Körpers und r den Abstand des betrachteten Punktes, so wird die Aenderung des Zustandes in diesem Punkte durch $\frac{m}{r^2}$ ausgedrückt. In gleicher Weise kann man bei der Wirkung des Elementes ds' eines geschlossenen Stromes auf ein anderes Stromelement ds zunächst die Aenderung in dem Zustande des um ds' liegenden Raumes berechnen, und dann erst das Element ds an den betreffenden Ort legen. Ist ds' die Länge des Elementes, i' die Intensität des in ihm fliessenden Stromes, r der Abstand des betrachteten Punktes von ds' und Θ' der Winkel, welchen r mit dem Element ds' bildet, so tritt in jenem Punkte eine mit $\frac{i' ds' \sin \Theta'}{r^2}$ proportionale Aenderung ein. Wird nun das Element ds, dessen Inten-

sität i ist, und welches mit der durch r und ds' gelegten Ebene einen Winkel ψ bilden möge, in den betreffenden Punkt gebracht, so tritt es mit dem Betrage von $ids \cos \psi$ als Factor zu dem vorstehenden Ausdrucke hinzu. Es bleibt dann nur noch die Richtung zu bestimmen, nach welcher der Antrieb zur Bewegung des Elementes ds erfolgt. Ich werde im Speciellen die physikalischen Vorgänge bei dieser Einwirkung nachweisen und aus denselben die Richtung der auftretenden Kraft herleiten.

Um eine klare Einsicht in die elektrodynamischen Vorgänge zu erleichtern, halte ich es für zweckmässig, von der gewöhnlichen Form des Ampère'schen Gesetzes auszugehen.

§ 1.

Geleitet von dem Bestreben, dem für die Wirkung in die Ferne aufgestellten Grundsatze, dass Wirkung und Gegenwirkung stets einander gleich und nur entgegengesetzt gerichtet sein sollen, zu genügen, gelangt Ampère[1]) in Betreff der Wirkung zweier Stromelemente ds und ds' mit den Stromintensitäten i und i' zu dem bekannten Gesetze

$$-\frac{i\,i'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\right),$$

worin r den Abstand der beiden Elemente, ε den Winkel zwischen den Richtungen von ds und ds', Θ den Winkel zwischen r und ds und schliesslich Θ' den Winkel zwischen r und ds' bedeutet. Die Wirkung erfolgt in der Richtung der Verbindungslinie r, d. h. von ds' nach ds.

Als Ampère nach diesem Gesetze die Componenten der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Element berechnete[2]), erschienen in den Integralen zwei Glieder, von denen bei Ausdehnung der Integration über den geschlossenen Stromlauf das eine wegfiel und also nur das andere übrig blieb.

§ 2.

Im weiteren Verlaufe seiner Abhandlung kommt Ampère nochmals auf dieses Integral zurück[3]) und berechnet aus dem

1) Théorie des phénomènes électrodynamiques. Paris, 1826.
2) A. a. O. S. 41 f.
3) Ebd. S. 135.

nicht wegfallenden Theile die Wirkung zweier Elemente. Er findet für dieselbe den Werth

$$-\frac{i\,i'\,ds\,ds'\sin\Theta'\cos\psi}{2r^2},$$

wo ψ den Winkel bedeutet, welchen das Element ds mit der durch r und das Element ds' gelegten Ebene bildet.

Auf kürzerem Wege erhält man dieses Gesetz, wenn man von dem durch Ampère[1]) aufgestellten Ausdruck

$$\frac{2\,i\,i'}{\sqrt{r}}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\,ds\,ds'$$

ausgeht.

Es wird die Herleitung wesentlich erleichtern, wenn ich zuvor die im Folgenden gebrauchten Bezeichnungen, soweit sie nicht schon zuvor erläutert sind, und eine Reihe von auftretenden Ausdrücken zusammenstelle.

Es seien x, y, z die Coordinaten des Elementes ds ,
x', y', z' die Coordinaten des Elementes ds' ,

also

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

a, b, c die Winkel, welche r mit den drei Coordinatenaxen,
α, β, γ die Winkel, welche das Element ds mit denselben Axen und
α', β', γ' die Winkel, welche das Element ds' mit ihnen bildet.

Ferner wird

$$\frac{dr}{ds} = \cos\Theta, \quad \frac{dr}{ds'} = -\cos\Theta',$$

$$\frac{dr}{dx} = \cos a, \quad \frac{dr}{dy} = \cos b, \quad \frac{dr}{dz} = \cos c,$$

$$r\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'} = -\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right) = -\cos\varepsilon,$$

$$r\frac{d^2r}{dx\,ds'} + \frac{dr}{dx}\cdot\frac{dr}{ds'} = -\frac{dx'}{ds'} = -\cos\alpha', \text{ u. s. w.},$$

1) S. 180.

$$\frac{d\sqrt{r}}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{dr}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\Theta\,,$$

$$\frac{d\sqrt{r}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{dr}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos a\,, \quad \text{u. s. w.}\,,$$

$$\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} = \frac{1}{2r\sqrt{r}}\left(r\frac{d^2 r}{ds\,ds'} - \frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)$$

$$= \frac{1}{2r\sqrt{r}}\left\{-\cos\varepsilon + \frac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\right\}$$

und

$$\frac{d^2\sqrt{r}}{dx\,ds'} = \frac{1}{2r\sqrt{r}}\left(r\frac{d^2 r}{dx\,ds'} - \frac{1}{2}\frac{dr}{dx}\frac{dr}{ds'}\right)$$

$$= \frac{1}{2r\sqrt{r}}\left\{-\cos\alpha' + \frac{3}{2}\cos a\cos\Theta'\right\}.$$

Da die durch das Gesetz $\frac{2ii'}{\sqrt{r}}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}ds\,ds'$ ausgedrückte Kraft in der Richtung von r liegt, so erhält man die Componenten nach den Coordinatenaxen durch Multiplication mit $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$. Es wird also

$$X = \frac{2ii'}{\sqrt{r}}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}ds\,ds'\cos a$$

oder

$$X = 4\,i\,ds\,i'\,ds'\,\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\,.$$

Man hat aber identisch

$$\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} = \frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right) - \frac{d\sqrt{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{dx\,ds'}\,.$$

Addirt man auf beiden Seiten nochmals den Ausdruck $\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$, so wird

$$2\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} = \frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right) + \frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} - \frac{d\sqrt{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{dx\,ds'}\,.$$

Hiernach erhält man

$$X = 2ii'ds\,ds'\left[\frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right)+\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}-\frac{d\sqrt{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{dx\,ds'}\right].$$

Wird über den geschlossenen Kreis, zu welchem das Element ds' gehört, integrirt, so fällt der erste Ausdruck weg und es bleibt dann nur

$$X = 2ii'ds\,ds'\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}-\frac{d\sqrt{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{dx\,ds'}\right),$$

oder nach Einsetzung der oben angegebenen Werthe:

$$X = \frac{ii'ds\,ds'}{2r^2}\left\{\cos a\left(-\cos\varepsilon+\frac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\right)-\right.$$
$$\left.-\cos\Theta\left(-\cos\alpha'+\frac{3}{2}\cos a\cos\Theta'\right)\right\},$$

$$X = \frac{ii'ds\,ds'}{2r^2}\left\{-\cos\varepsilon\cos a+\cos\Theta\cos\alpha'\right\}$$ [1])

und dementsprechend

$$Y = \frac{ii'ds\,ds'}{2r^2}\left\{-\cos\varepsilon\cos b+\cos\Theta\cos\beta'\right\},$$

$$Z = \frac{ii'ds\,ds'}{2r^2}\left\{-\cos\varepsilon\cos c+\cos\Theta\cos\gamma'\right\}.$$

---

1) Die Componente X geht, wie oben gezeigt, direct über in

$$X = 4\,i\,ds\,i'ds'\,\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\quad\text{oder}$$

$$X = 4\,i\,ds\,i'ds'\left[\frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\cdot\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right)-\frac{d\sqrt{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{dx\,ds'}\right].$$

Bei der Integration über den geschlossenen Umlauf, zu welchem das Element ds' gehört, fällt das erste Glied des letzten Ausdruckes weg und es bleibt übrig

$$X' = \frac{ii'ds\,ds'}{r^2}\left(-\frac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\cos a+\cos\Theta\cos\alpha'\right)\quad\text{nebst}$$

$$Y' = \frac{ii'ds\,ds'}{r^2}\left(-\frac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\cos b+\cos\Theta\cos\beta'\right)\quad\text{und}$$

$$Z' = \frac{ii'ds\,ds'}{r^2}\left(-\frac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta'\cos c+\cos\Theta\cos\gamma'\right),$$

wenn zur Unterscheidung die Componenten mit Accenten versehen werden.

Vereinigen wir die ersten und die zweiten Glieder gesondert zu einer Resultirenden, so erhalten wir zwei Kräfte, von denen die eine proportional cos ε in der entgegengesetzten

---

Aus den obigen Gleichungen für X, Y, Z und X', Y', Z' ergeben sich sofort die Potentiale zweier geschlossener Ströme. Da nämlich $\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = -\frac{1}{r^2}\cos a$ und $\frac{d\frac{1}{r}}{ds} = -\frac{1}{r^2}\cos\Theta$, so lassen sich die Gleichungen für die Componenten auch schreiben

$$X = \frac{1}{2}\, i\, i'\, ds\, ds' \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\cos\alpha'\right),$$

$$Y = \frac{1}{2}\, i\, i'\, ds\, ds' \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\cos\varepsilon - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\cos\beta'\right),$$

$$Z = \frac{1}{2}\, i\, i'\, ds\, ds' \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\cos\varepsilon - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\cos\gamma'\right),$$

und ebenso
$$X' = i\, i'\, ds\, ds' \left(\frac{3}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\Theta\cos\Theta' - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\cos\alpha'\right),$$

$$Y' = i\, i'\, ds\, ds' \left(\frac{3}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\cos\Theta\cos\Theta' - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\cos\beta'\right),$$

$$Z' = i\, i'\, ds\, ds' \left(\frac{3}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\cos\Theta\cos\Theta' - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\cos\gamma'\right).$$

Bei der Integration über den geschlossenen Kreis, zu welchem das Element ds gehört, fallen die Glieder $\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\cos\alpha'$, $\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\cos\beta'$, $\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\cos\gamma'$ weg, und es ergiebt sich dann, wenn die Vorzeichen entgegengesetzt genommen werden, für den ersten Fall das Potential

$$P = -\frac{1}{2}\, i\, i' \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

und für den zweiten Fall

$$P' = -\frac{3}{2}\, i\, i' \iint \frac{\cos\Theta\cos\Theta'}{r}\, ds\, ds'.$$

Richtung von r, und die zweite proportional $\cos\Theta$ in der Richtung des Elementes ds' wirkt[1]).

Es ist nun

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \text{ und}$$
$$\cos\Theta = \cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma\,.$$

Die diesen beiden Ausdrücken proportionalen Kräfte sind zu einer Gesammtresultirenden zu vereinigen. Beide liegen in der Ebene (r, ds') und bilden mit einander den Winkel $(180^\circ - \Theta')$. Ihre Resultirende liegt daher ebenfalls in der Ebene (r, ds').

§ 3.

Wenn wir die Resultirende aus den drei Componenten X, Y, Z berechnen wollen, so geschieht dies am einfachsten auf folgendem Wege. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, kann man den Anfang der Coordinaten in das Element ds' und die Ebene XY so legen, dass das Element ds' in dieselbe fällt und die Axe X durch die Mitte des Elementes ds geht.

1) Mein verehrter College, Herr Prof. Neumann, sagt in der Vorrede S. VIII zu seinem Werke über die elektrischen Kräfte I. Thl., 1873: „Diese Voraussetzungen führen, weil in ihnen die von Ampère selber gemachten Voraussetzungen mit enthalten sind, nothwendig zum Ampère'schen Gesetz; andererseits aber führen sie auch zu einer bestimmten Form des noch fehlenden Gesetzes, nämlich zu folgendem Ergebniss:

Die resultirende Form des elektromotorischen Elementargesetzes. — Die elektromotorische Kraft $E\,dt$, welche ein Stromelement $i'ds'$ in irgend einem Punkte m eines gegebenen Conductors während der Zeit dt hervorbringt, ist zerlegbar in zwei Kräfte

$$-A^2 ds' \frac{d(ri'\cos\Theta')}{r^2} \text{ und } +A^2 ds' \frac{i'dr}{r^2}\,,$$

erstere gerechnet in der Richtung $r\,(ds' \longrightarrow m)$, letztere gerechnet in der Richtung i'."

Die Differentiation in diesen Ausdrücken bezieht sich auf die Zeit, von welcher die Lage der Elemente abhängt. Nimmt man i' constant und die Lage von ds' fest, so dass allein das in m befindliche Element ds mit t veränderlich ist, so erhält man für die vorstehenden Ausdrücke die Werthe

$$-\frac{A^2 ds\, i' ds' \cos\varepsilon}{r^2} \text{ und } -\frac{A^2 ds\, i' ds' \cos\Theta}{r^2}\,.$$

Setzt man die Constante $A^2 = \frac{1}{2}\,i$, so sind dies dieselben Ausdrücke, wie sie oben für die *ponderomotorische* Wirkung angegeben wurden, und die durch sie dargestellten Kräfte haben auch dieselbe Richtung wie oben.

Dann wird $a = 0$, $b = c = 90^\circ$; $\beta' = 90^\circ - \alpha'$, $\gamma' = 90^\circ$. Man erhält also

$$X = -\frac{i i' ds\, ds'}{2 r^2} \sin\alpha' \cos\beta$$

oder, da r mit der X-Axe zusammenfällt und also $\alpha' = \Theta'$,

$$X = -\frac{i i' ds\, ds'}{2 r^2} \sin\Theta' \cos\beta \; ,$$

$$Y = \frac{i i' ds\, ds'}{2 r^2} \sin\Theta' \cos\alpha \; ,$$

$$Z = 0 \; .$$

Hieraus folgt für den Werth der Resultirenden, abgesehen vom Vorzeichen:

$$R = \frac{i i' ds\, ds'}{2 r^2} \sin\Theta' \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}$$

$$= \frac{i i' ds\, ds'}{2 r^2} \sin\Theta' \sqrt{1 - \cos^2\gamma}$$

$$= \frac{i i' ds\, ds'}{2 r^2} \sin\Theta' \sin\gamma \; .$$

Es ist aber γ der Winkel zwischen ds und der Z-Axe; bezeichnet ψ den Winkel, welchen ds mit der Ebene XY oder (r, ds') macht, sodass $\psi = 90^\circ - \gamma$, so wird

$$R = \frac{i i' ds\, ds'}{2 r^2} \sin\Theta' \cos\psi \; .$$

Da $\frac{X}{R}\cos\alpha + \frac{Y}{R}\cos\beta = 0$, so steht die Resultirende senkrecht auf dem Element ds, und da sie in der Ebene (r, ds') liegt, auch senkrecht auf der Projection des Elementes ds auf diese Ebene.

§ 4.

Auch für eine beliebige Lage der Elemente ds' und ds lässt sich das vorstehende Gesetz in ähnlicher Weise herleiten.

Es ist in diesem Falle

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' \; ,$$

$$\cos\Theta = \cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma \; ,$$

$$\cos\Theta' = \cos a \cos\alpha' + \cos b \cos\beta' + \cos c \cos\gamma' \; .$$

Setzt man nun in die Gleichungen

$$X = \frac{i\,i'\,ds\,ds'}{2r^2}\{-\cos a \cos\varepsilon + \cos\Theta \cos\alpha'\}\,,$$

$$Y = \frac{i\,i'\,ds\,ds'}{2r^2}\{-\cos b \cos\varepsilon + \cos\Theta \cos\beta'\}\,,$$

$$Z = \frac{i\,i'\,ds\,ds'}{2r^2}\{-\cos c \cos\varepsilon + \cos\Theta \cos\gamma'\}$$

die vorstehenden Werthe ein, so erhält man

$$X = \frac{i\,i'\,ds\,ds'}{2r^2}\{\cos\beta\,(-\cos a \cos\beta' + \cos b \cos\alpha') + \\ + \cos\gamma\,(-\cos a \cos\gamma' + \cos c \cos\alpha')\}\,,$$

$$Y = \frac{i\,i'\,ds\,ds'}{2r^2}\{\cos\gamma\,(-\cos b \cos\gamma' + \cos c \cos\beta') + \\ + \cos\alpha\,(-\cos b \cos\alpha' + \cos a \cos\beta')\}\,.$$

$$Z = \frac{i\,i'\,ds\,ds'}{2r^2}\{\cos\alpha\,(-\cos c \cos\alpha' + \cos a \cos\gamma') + \\ + \cos\beta\,(-\cos c \cos\beta' + \cos b \cos\gamma')\}\,.$$

Schreibt man hier[1])

$$\cos c \cos\beta' - \cos b \cos\gamma' = F\cos\lambda\,,$$
$$\cos a \cos\gamma' - \cos c \cos\alpha' = F\cos\mu\,,$$
$$\cos b \cos\alpha' - \cos a \cos\beta' = F\cos\nu\,,$$

so sind λ, μ, ν die Winkel, welche eine auf der Ebene (r, ds') errichtete Normale mit den drei Axen macht. Werden nämlich die drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ und ebenso mit $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ multiplicirt und addirt, so werden beide Summen $= 0$. Quadrirt man die drei Gleichungen und addirt sie, so findet man den Werth $F^2 = \sin^2\Theta'$.

Durch Einsetzung der Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ und des Werthes $\sin\Theta' = F$ erhält man die drei Componenten:

$$X = \frac{i\,i'\,ds\,ds'\sin\Theta'}{2r^2}(\cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu)\,,$$

$$Y = \frac{i\,i'\,ds\,ds'\sin\Theta'}{2r^2}(\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu)\,,$$

$$Z = \frac{i\,i'\,ds\,ds'\sin\Theta'}{2r^2}(\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda)\,.$$

Werden diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und ebenso mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$ und $\cos\nu$ multiplicirt und addirt, so sind beide Summen $= 0$. Die Resultirende steht also senkrecht auf dem Element ds und auf der auf der Ebene (r, ds')

1) Vergl. Ampère S. 137.

errichteten Normale, folglich auch senkrecht auf der Projection von ds auf die genannte Ebene.

Ist ψ der Winkel zwischen ds und der Ebene (r, ds'), so erhält man ebenso wie in § 3 die Resultirende

$$R = \frac{ii' ds ds' \sin \Theta' \cos \psi}{2r^2}.$$

§ 5.

Anstatt die drei Componenten X, Y, Z zu der Resultirenden zu vereinigen, kann man dieselbe auch durch Zusammensetzung der beiden Kräfte $\cos \varepsilon$ und $\cos \Theta$, welche mit einander den Winkel $(180^0 - \Theta')$ bilden, erhalten. Es wird dann die Resultirende

$$R = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{\cos^2 \varepsilon + \cos^2 \Theta - 2 \cos \varepsilon \cos \Theta \cos \Theta'\}.$$

Es mögen in Fig. 1 die durch O, B, C gelegte Ebene die Ebene (r, ds'); OD, OE, und OF die Richtungen von resp. ds', r und ds bezeichnen. Errichtet man nun auf der Ebene (r, ds') in O die Normale OA, und legt durch OA und ds eine Ebene, so ist dieselbe senkrecht auf (r, ds') und FG misst die Neigung ψ von ds gegen jene Ebene. Die Bogen DF, ED und EF messen resp. die Winkel ε, Θ' und Θ.

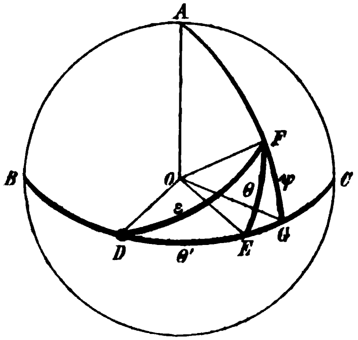


Fig. 1.

Der Quadrant AE steht ebenso wie AG senkrecht auf der Ebene (r, ds'); der Bogen GE misst also den Winkel, welchen die Projection des Elementes ds auf die Ebene (r, ds') mit der Richtung von r macht.

Aus dem bei G rechtwinkligen Dreiecke FGE erhält man

$$\sin FEG : 1 = \sin \psi : \sin \Theta,$$

also

$$\cos FEG = \frac{\sqrt{\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi}}{\sin \Theta}.$$

Aus dem Dreiecke DFE folgt

$$\cos \varepsilon = \cos \Theta \cos \Theta' - \sin \Theta . \sin \Theta' \cos FEG,$$

$$\cos \varepsilon - \cos \Theta \cos \Theta' = - \sin \Theta' \sqrt{\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi},$$

$$\cos^2 \varepsilon - 2 \cos \varepsilon \cos \Theta \cos \Theta' + \cos^2 \Theta \cos^2 \Theta' = \sin^2 \Theta' (\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi).$$

Es wird also

$$R = \frac{i i' ds\, ds'}{2r^2} \sqrt{\{\cos^2\Theta - \cos^2\Theta \cos^2\Theta' + \sin^2\Theta'(\sin^2\Theta - \sin^2\psi)\}}$$
$$= \frac{i i' ds\, ds'}{2r^2} \sin\Theta' \cos\psi\,.$$

In Figur 2 sei EE' die Richtung von r, OD die Richtung von ds', so stellt in dem Parallelogramm $OE'HD$, OE' die Kraft $\cos\varepsilon$ und OD die Kraft $\cos\Theta$, sowie OH die Resultirende dar. Da der Winkel $DOE = \Theta'$, so ist $DOE' = 180^\circ - \Theta'$. Aus dem Dreieck $E'OH$ erhält man $OH : E'H = \sin\Theta' : \sin E'OH$ oder

$$\frac{i i' ds\, ds'}{2r^2} \sin\Theta' \cos\psi : \frac{i i' ds\, ds'}{2r^2} \cos\Theta$$
$$= \sin\Theta' : \sin EOH\,,$$

folglich $\quad \sin EOH = \dfrac{\cos\Theta}{\cos\psi}\,.$

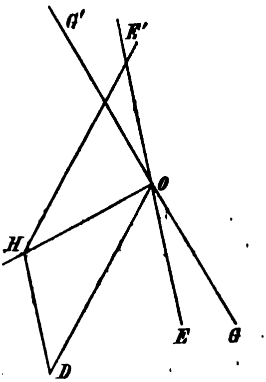


Fig. 2.

Der Bogen EG in Fig. 1 misst den Winkel zwischen OG [der Projection des Elementes ds auf die Ebene (r, ds')] und OE $[r]$. Für denselben ergiebt sich aus dem Dreiecke GFE in Fig. 1 $\cos EOG = \dfrac{\cos\Theta}{\cos\psi}$, also derselbe Werth wie für $\sin E'OH$. Es ist daher $E'OH = 90^\circ + E'OG'$, oder $E'OH - E'OG' = 90^\circ$. Die Resultirende R liegt also, da beide Kräfte $\cos\varepsilon$ und $\cos\Theta$ in der Ebene (r, ds') wirken, ebenfalls in dieser Ebene und steht auf der Projection von ds auf diese Ebene, mithin also auch auf ds selbst senkrecht.

Die Seite des Elementes ds, nach welcher die Resultirende gerichtet ist, lässt sich, ohne die Componenten zu berechnen, durch folgende Regel finden:

Man denke sich in die beiden Elemente zwei menschliche Figuren so gelegt, dass bei jeder derselben der elektrische Strom am Fusse ein- und am Kopfe austritt, und wende beide Figuren so, dass jede derselben mit ihrer rechten Hand nach der anderen hingewandt ist, so wirkt die Resultirende nach der linken Seite der Figur, wenn beide das Gesicht nach derselben Seite gewandt haben, dagegen nach der rechten, wenn die Gesichter beider Figuren nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.

§ 6.

Betrachten wir zunächst die Wirkung eines geschlossenen Stromlaufes in dem Fig. 3 gezeichneten Kreise. Die Ebene dieses Kreisstromes liege in der XY-Ebene und der Anfang des Coordinatensystems sei in O. Es liege ferner das Element ds mit seiner Mitte in der Axe X. Dann wird $c = 90^0$ und $\gamma' = 90^0$.

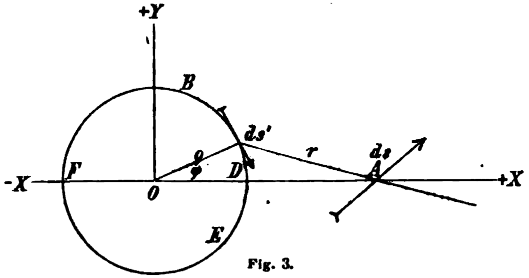


Fig. 3.

In der Fig. 3 gezeichneten Anordnung sind die Winkel a und α' negativ. Man erhält dann

$$X = -\frac{ii'\,ds\,ds'}{2r^2}\sin(\alpha' - a)\cos\beta = +\frac{ii'\,ds\,ds'}{2r^2}\sin\Theta'\cos\beta,$$

$$Y = +\frac{ii'\,ds\,ds'}{2r^2}\sin(\alpha' - a)\cos\alpha = -\frac{ii'\,ds\,ds'}{2r^2}\sin\Theta'\cos\alpha,$$

$$Z = 0\,.$$

Da bei der Integration nach ds' die Grössen $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ constant sind, so handelt es sich nur um das Integral

$$Q = \frac{1}{2}\,i'\int\frac{ds'}{r^2}\sin\Theta'\,.$$

Ist der Halbmesser des Kreises ϱ und φ der Winkel, welchen der nach ds' gezogene Halbmesser mit der Axe X macht, so wird, wenn der Abstand OA des Elementes ds vom Mittelpunkte des Kreises $= c$ gesetzt wird,

$$r^2 = c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\cos\varphi\,, \quad \text{und } \sin\Theta' = \frac{c\cos\varphi - \varrho}{r}\,,$$

folglich
$$Q = \frac{1}{2}\,i'\int\frac{(c\cos\varphi - \varrho)\,\varrho\,d\varphi}{(c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Für die beiden Elemente ds', welche in den von A an den Kreis gezogenen Tangenten liegen, wird der Zähler des vorstehenden Bruches $= 0$; in dem zwischen diesen beiden Elementen dem A zunächst liegenden Theile des Kreises ist derselbe positiv, in dem anderen Theile dagegen negativ.

Setzt man $\cos\varphi = \mu$, so wird

$$Q = -\frac{1}{2} i'\varrho \int \frac{(c\mu - \varrho)\, d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}\, \{c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\mu\}^{\frac{3}{2}}} .$$

In dieser Form treten in dem Integral noch zwei Unstetigkeiten für $\mu = +1$ und $\mu = -1$ auf, da für diese Stellen der Werth des Bruches unendlich wird. Es ist die Integration also von $\mu = +1$ bis $\mu = -1$, und dann wieder von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$ auszuführen; dabei ist aber für die Integration auf der zweiten Hälfte des Kreises die Wurzel $\sqrt{1-\mu^2}$, da dieselbe einen Sinus darstellt, welcher beim Uebergange aus dem zweiten in den dritten Quadranten sein Zeichen wechselt, negativ zu nehmen.

Hiernach wird dann

$$X = + i\,ds \cos\beta \cdot Q ,$$
$$Y = - i\,ds \cos\alpha \cdot Q ,$$
$$Z = 0 ,$$

und die Resultirende

$$R = i\,ds \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta} \cdot Q = i\,ds \cos\psi \cdot Q .$$

Da in dem vorliegenden Falle die Wirkung aller Elemente ds' in derselben Ebene, senkrecht auf ds, theils nach der einen, theils nach der anderen Seite hin erfolgt, so hätte man auch sofort die Resultirende aus der Wirkung aller Elemente ds' berechnen können. Dieselbe wird

$$R = i\,ds \cos\psi \int \frac{i'ds' \sin\Theta'}{2r^2} = i\,ds \cos\psi \cdot Q ,$$

also der zuvor berechnete Werth. Ihre Richtung bestimmt sich nach der früher aufgestellten Regel, wenn man beachtet, dass die zunächst an ds liegenden Elemente wegen ihrer grösseren Nähe die stärkere Wirkung ausüben.

§ 7.

Es ist ein eigenthümlicher Vorgang, dass während anfangs die Beziehungen der Elemente ds' zu dem Element ds namentlich durch das Eintreten des $\cos\varepsilon$ eng verflochten scheinen, sich im Fortgange der Rechnung diese enge Beziehung wieder löst, und die Elemente ds' und das Element ds mit ihren Eigenschaften einfach als Factoren neben einander treten.

Man braucht bei der Berechnung der Wirkung des Kreisstromes auf das Element *ds* zunächst gar nicht auf das letztere Rücksicht zu nehmen, sondern nur den Ort desselben in Betracht zu ziehen. Man berechnet den Werth des Integrals Q; dieser giebt für alle Punkte in der Ebene, welche sich im Abstande c (Fig. 3) vom Mittelpunkte des Kreises befinden, die daselbst durch den Strom hervorgebrachte Veränderung an. Legen wir dann das Element *ds* an den betreffenden Ort, so entwickelt sich aus dem Einflusse jener Veränderung auf den in ihm vorhandenen Strom ein Antrieb zur Bewegung, welcher in der Ebene des Kreises und senkrecht gegen das Element *ds* auftritt. Die Grösse desselben erhält man, wenn man das Integral Q mit $i ds \cos \psi$ multiplicirt. Nach der früher angegebenen Regel bestimmt sich die Seite, nach welcher die Resultirende hingewandt ist.

§ 8.

Es fragt sich nun, welches die physikalischen Veränderungen sind, welche der Kreisstrom in seiner Umgebung hervorbringt, und wie aus dieser Veränderung und den in dem Elemente vorhandenen Strome die zuletzt erwähnte Kraft entspringt.

In den Berichten der math.-phys. Classe der Sächs. Ges. vom Jahre 1865, S. 7—30 und 1866, S. 219—230[1]) habe ich eine Theorie der elektrischen Erscheinungen aufgestellt, in welcher dieselben auf Schwingungen zurückgeführt werden, und gezeigt, wie die verschiedenen Vorgänge der Elektrostatik, der Elektrodynamik und der Induction sich auf diesem Wege erklären lassen. Nach dieser Theorie bestehen die elektrischen Ströme in kreisförmigen Schwingungen des Aethers unter Betheiligung der materiellen Moleküle des Drahtes. Die kreisförmigen Schwingungen stehen senkrecht auf der Axe des Drahtes, und der Umschwung erfolgt je nach der Richtung des Stromes in dem einen oder dem anderen Sinne.

Von den Elementen *ds'* pflanzen sich dann die Schwingungen kugelförmig in den umgebenden Aether fort. Die Tangentialgeschwindigkeit auf den verschiedenen Punkten der Kugeloberfläche hängt ausser von der Stärke des Stromes und

1) Vergl. auch Poggend. Annal. Bd. 126, S. 440 und Bd. 131, S. 607.

der Länge des Radius auch noch von seiner Lage gegen die Axe des Umschwunges ab, sodass dieselbe vom Aequator bis zu den Polen (Enden der Axe) hin mit dem Cosinus der Breite oder dem Sinus der Poldistanz abnimmt.

Bezeichnet i' die als Maass für die Stromstärke dienende Tangentialgeschwindigkeit im Aequator im Abstande 1, so ist die Tangentialgeschwindigkeit im Punkte D (Fig. 4)

$$\frac{i' \sin ABD}{r^2} = \frac{i' \sin \Theta'}{r^2}.$$

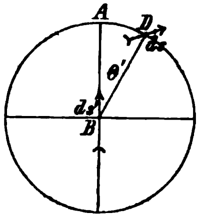


Fig. 4.

Wird nun in den Punkt D das Element ds mit der Stromstärke i gelegt und zwar zunächst so, dass es in die durch ds' und und $BD = r$ gelegte Ebene fällt, so haben auf der einen Seite von ds die von ihm und von ds' ausgehenden Schwingungen dieselbe, auf der anderen aber entgegengesetzte Richtung. Die Geschwindigkeit der das Element ds umgebenden Aethertheilchen wird daher auf der ersten Seite vergrössert, auf der anderen vermindert. Dadurch entsteht, wie ich in der oben angeführten Abhandlung gezeigt habe, eine Kraft, welche in der Ebene (r, ds') liegt, senkrecht auf dem Element ds steht, und nach der Seite hingerichtet ist, auf welcher durch das Zusammentreffen entgegengesetzter Bewegungen die Geschwindigkeit der Aethertheilchen vermindert ist. Die Grösse dieser Kraft ist

$$= \frac{i\,ds\,i'ds'}{r^2} \sin \Theta'.$$

Fällt das Element ds nicht in die Ebene (r, ds'), sondern bildet mit ihr den Winkel ψ, so haben wir die um ds als Axe erfolgenden Schwingungen in zwei zu zerlegen; die Axe des einen bildet die Projection von ds auf die Ebene (r, ds'), die Axe des anderen die auf dieser Ebene errichtete Normale. Die Stärke der um die Projection erfolgenden Schwingungen ist dann $i\,ds \cos \psi$, und durch die Einwirkung des Stromes i' entsteht eine Kraft $\frac{i\,ds \cos \psi \cdot i'ds' \sin \Theta'}{r^2}$, welche in der Ebene (r, ds') liegt, senkrecht auf der Richtung der Projection oder auf dem Element ds steht, und nach der Seite hin gerichtet ist, auf welcher die von ds' und von der Projection ds ausgehenden Schwingungen entgegengesetzte Richtungen haben.

Gegen die um die Normale auf der Ebene (r, ds') erfolgenden Schwingungen verhalten sich die von ds' ausgehenden Schwingungen ringsum gleich, bringen also keine Ungleichheiten in den das Element ds umgebenden Aetherschwingungen hervor, und geben daher auch zum Auftreten einer dieses Element treibenden Kraft keine Veranlassung.

Die von einem Element ds' mit der Stromstärke i' auf ein anderes Element ds mit der Stromstärke i ausgeübte Kraft ist also

$$\frac{i\,ds \cos\psi \cdot i'ds' \sin\Theta'}{r^2}.$$

Da die Kraft stets auf dem Elemente senkrecht steht, so hat die von ds' auf ds ausgeübte Wirkung im Allgemeinen eine andere Richtung, als die von ds auf ds' ausgeübte. Für diese beiden Wirkungen gilt also nicht der Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. Dieses Princip selbst aber wird durch die Vorgänge zwischen den elektrischen Elementen nicht verletzt. Die Wirkungen der Elemente auf einander sind keine directen, sondern erst durch die Schwingungen vermittelt; in Betreff der Wirkungen der Aethertheilchen auf einander behält jenes Princip seine Geltung.

§ 9.

Wenden wir uns jetzt wieder zu der oben in § 6 berechneten Einwirkung eines ebenen Kreisstromes auf ein mit seiner Mitte in der Stromebene liegendes Element ds zurück, so zeigt die Betrachtung der Entwickelung, dass das Integral Q die Resultirende aus den Geschwindigkeiten darstellt, welche von allen Elementen ds' an den Ort von ds übertragen werden. Diese Geschwindigkeiten sind senkrecht gegen die Ebene des Stromes gerichtet; die auf BDE Fig. 3 gelegenen Theile des Kreises bringen nach dem Orte des Elementes ds die Geschwindigkeiten in der einen, die von dem anderen Theile BFE ausgehenden in entgegengesetzter Richtung. Das Integral Q stellt also die Resultirende aus allen diesen Geschwindigkeiten dar, welche nach der von BDE ausgehenden Drehungsrichtung senkrecht auf der Stromebene steht.

§ 10.

Betrachten wir jetzt den allgemeinen in § 4 behandelten Fall der Wirkung eines beliebig gelegenen Elementes ds' auf

ein Element ds, so wird sich auch hier zeigen, dass sich die Beziehungen der beiden Elemente so weit lösen, dass sie mit ihren Eigenschaften nur als Factoren zusammentreten.

Die Gleichungen für die drei Componenten waren

$$X = \frac{ii'ds\,ds'}{2r^2}\{\cos\beta\,(-\cos a\cos\beta' + \cos b\cos\alpha') + \\ + \cos\gamma\,(-\cos a\cos\gamma' + \cos c\cos\alpha')\}\,,$$

$$Y = \frac{ii'ds\,ds'}{2r^2}\{\cos\gamma\,(-\cos b\cos\gamma' + \cos c\cos\beta') + \\ + \cos\alpha\,(-\cos b\cos\alpha' + \cos a\cos\beta')\}\,,$$

$$Z = \frac{ii'ds\,ds'}{2r^2}\{\cos\alpha\,(-\cos c\cos\alpha' + \cos a\cos\gamma') + \\ + \cos\beta\,(-\cos c\cos\beta' + \cos b\cos\gamma')\}\,.$$

Wir setzen nun

$$Q\cos\lambda = +\frac{i'ds'}{2r^2}(\cos c\cos\beta' - \cos b\cos\gamma')\,,$$

$$Q\cos\mu = +\frac{i'ds'}{2r^2}(\cos a\cos\gamma' - \cos c\cos\alpha')\,,$$

$$Q\cos\nu = +\frac{i'ds'}{2r^2}(\cos b\cos\alpha' - \cos a\cos\beta')\,.$$

Die Werthe sind nur abhängig von ds' und der Lage des Ortes, an welchen später das Element ds hingesetzt werden soll. Q bedeutet also eine Resultirende, deren Richtung durch die Winkel λ, μ, ν bestimmt wird, und deren Grösse sich ergiebt $Q = \frac{i'ds'\sin\Theta'}{r^2}$. Dieser Ausdruck ist die von ds' an den betreffenden Ort übertragene Geschwindigkeit, da Q auf der Ebene (r, ds') senkrecht steht. Die obigen Ausdrücke $Q\cos\lambda$, $Q\cos\mu$, $Q\cos\nu$ bedeuten also die Componenten der Geschwindigkeit Q nach den drei Axen.

Legen wir nun das Element ds, welches mit den drei Axen die Winkel α, β, γ bildet, an den betreffenden Ort, so erhalten wir die Componenten

$$X = i\,ds\,Q\,(\cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu)\,,$$
$$Y = i\,ds\,Q\,(\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu)\,,$$
$$Z = i\,ds\,Q\,(\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda)\,.$$

Hieraus folgt, wenn ψ den Winkel zwischen ds und der Ebene (r, ds') bedeutet, die Resultirende

$$R = ids \cos\psi \cdot Q = \frac{ids \cos\psi \cdot i'ds' \sin\Theta'}{2r^2} .$$

Diese Resultirende liegt in der Ebene (r, ds') und steht senkrecht auf ds oder seiner Projection auf die Ebene (r, ds'). Dies ist aber genau die Resultirende, welche entsteht, wenn das Element ids an den Ort gelegt wird, wo die resultirende Geschwindigkeit Q war. Es entsteht durch das Zusammentreffen der Schwingungen eine Kraft $ids \cos\psi \frac{i'ds' \sin\Theta'}{2r^2}$, welche das Element ds in der auf Q senkrechten Ebene, in der auf ds senkrechten Richtung, nach der Seite hin treibt, wo die von ds' und ds ausgehenden Schwingungen einander entgegengesetzt sind.

§ 11.

Genau ebenso lässt sich die Aufgabe behandeln, die Wirkung eines beliebigen geschlossenen Stromes auf ein Element ds zu bestimmen. Auch hier lassen sich wieder in den Componenten X, Y, Z die auf ds und auf ds' bezüglichen Grössen trennen.

Setzen wir

$$Q_1 = \frac{1}{2}\int \frac{i'ds'}{r^2} (\cos c \cos\beta' - \cos b \cos\gamma') = Q \cos\lambda ,$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\int \frac{i'ds'}{r^2} (\cos a \cos\gamma' - \cos c \cos\alpha') = Q \cos\mu ,$$

$$Q_3 = \frac{1}{2}\int \frac{i'ds'}{r^2} (\cos b \cos\alpha' - \cos a \cos\beta') = Q \cos\nu ,$$

so ist Q die Resultirende, welche mit den drei Axen die Winkel λ, μ, ν macht. Dieselbe stellt die Resultirende der von allen Elementen ds' an den Ort von ds übertragenen Geschwindigkeiten dar, und Q_1, Q_2, Q_3 sind die drei Componenten dieser Resultirenden.

Bilden wir nun die Componenten X, Y, Z, so erhalten wir

$$X = ids\, Q (\cos\beta \cos\nu - \cos\gamma \cos\mu) ,$$

$$Y = ids\, Q (\cos\gamma \cos\lambda - \cos\alpha \cos\nu) ,$$

$$Z = ids\, Q (\cos\alpha \cos\mu - \cos\beta \cos\lambda) .$$

Bezeichnet ψ den Winkel, welchen das Element ds mit einer auf Q senkrechten Ebene P macht, so wird die Resultirende

$$R = i\,ds \cos\psi \cdot Q ,$$

und zwar liegt dieselbe in der Ebene P und steht senkrecht auf der Projection von ds auf P und ebenso auf ds selbst.

Dies ist aber wieder genau der Vorgang, wie ihn die Schwingungstheorie fordert. Q ist die Resultirende aus den von sämmtlichen Elementen ds' an den Ort des Elementes ds übertragenen Schwingungen. Legen wir nun das Element $i\,ds$ an den betreffenden Ort, so haben wir dasselbe auf eine gegen Q senkrechte Ebene P zu projiciren[1]). In dieser Ebene entsteht dann durch das Zusammentreffen der von dem geschlossenen Strome und dem Elemente ds ausgehenden Schwingungen eine Kraft $i\,ds \cos\psi \cdot Q$, welche auf ds und seiner Projection auf die Ebene P senkrecht steht und nach der Seite gerichtet ist, wo die von dem geschlossenen Strome und von ds ausgehenden Schwingungen entgegengesetzte Richtungen besitzen.

§ 12.

Zum Schluss will ich noch den Fall behandeln, wo ein ebener kreisförmiger Strom auf ein Element, welches in seiner Axe in einem gegebenen Abstande liegt, einwirkt.

---

1) Die oben mit P bezeichnete Ebene hat schon Grassmann in seiner Abhandlung „Zur Elektrodynamik" (Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 83) bemerkt. Er sagt daselbst S. 63:

Wenn ein beliebiger geschlossener Strom im Raume gegeben ist, so giebt es zu jedem Punkte A eine bestimmte Ebene, die man durch A gehend annehmen und die Wirkungsebene des Stromes in Bezug auf den Punkt A nennen kann, und welche die Eigenschaft hat, dass jedes von A ausgehende Stromelement (b) erstens, wenn es auf dieser Ebene senkrecht steht, keine Einwirkung durch den Strom erfährt, zweitens, wenn es schräg darauf steht, dieselbe Wirkung erleidet, wie seine (senkrechte) Projection (b_1) auf diese Ebene erleiden würde, drittens, dass die Kraft, die es erfährt, in dieser Ebene liegt und auf der Projection (b_1) des Stromelementes und also auch auf diesem selbst senkrecht steht, und viertens, dass wenn g die Kraft ist, welche jenes von A ausgehende Stromelement b in irgend einer Lage erfährt, und sich die Projection (b_1) des Stromelementes auf die Wirkungsebene um irgend einen Winkel in dieser Ebene dreht, dann auch die Kraft g ohne ihren Werth zu verändern sich um denselben Winkel dreht.

Wollte man diese Wirkung berechnen, indem man von der Formel $-\dfrac{ii'ds\,ds'\sin\Theta'\cos\psi}{2r^2}$ ausgeht, so würde, obwohl $\sin\Theta' = 1$, selbst bei der Annahme, dass ds mit der Axe X parallel liegt, doch die Rechnung sehr umständlich werden, da die von jedem einzelnen Elemente ds' auf ds ausgeübte Kraft von Element zu Element ihre Grösse und Richtung ändert, wobei sie doch immer senkrecht gegen ds bleibt.

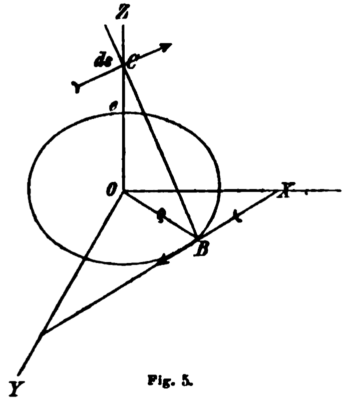


Fig. 5.

Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn man zuerst die Componenten X, Y, Z berechnet. Ziehen wir zuerst von allen Punkten des Kreises (Fig. 5) vom Halbmesser ϱ Linien nach dem Orte C des Elementes ds, so bilden dieselben einen Kegel. Es sei e der Abstand OC, und c der Winkel, welchen eine Seite des Kegels mit der Axe macht, so ist der Winkel, welchen r bei allen Elementen ds' mit der Z-Axe bildet, $= c$. Ist der Winkel zwischen OB und X gleich φ, so ist der Winkel $\alpha' = 90^\circ + \varphi$, $\beta' = \varphi$, $\gamma' = 90^\circ$, es wird also

$$\cos\alpha' = -\sin\varphi,\ \cos\beta' = \cos\varphi,\ \cos\gamma' = 0\ .$$

Weiter ergiebt sich

$$\cos a = \sin c\cos\varphi,\ \cos b = \sin c\sin\varphi\ .$$

Das Integral Q_1 wird dann $+\dfrac{i'\varrho\cos c}{2r^2}\displaystyle\int\cos\varphi\,d\varphi$,

$$Q_2 \quad " \quad +\frac{i'\varrho\cos c}{2r^2}\int\sin\varphi\,d\varphi\ ,$$

$$Q_3 \quad " \quad +\frac{i'\varrho\sin c}{2r^2}\int d\varphi\ .$$

Die beiden ersten Integrale geben zwischen 0 und 2π genommen den Werth $= 0$, Q_3 wird $= +\dfrac{i'\pi\varrho\sin c}{r^2}$. Die Resultirende $Q = Q_3$ liegt in der Axe Z.

Wird nun das Element an den Ort C gelegt, und sind die von den drei Axen gebildeten Winkel α, β, γ, so werden die drei Componenten

$$X = -\frac{i\,ds\,i'\pi\varrho \sin c \cos\beta}{r^2},$$

$$Y = -\frac{i\,ds\,i'\pi\varrho \sin c \cos\alpha}{r^2},$$

$$Z = 0,$$

also
$$R = \frac{i\,ds\,i'\pi\varrho \sin c \cos\psi}{r^2}.$$

Gehen wir von der Theorie der Schwingungen aus, so lässt sich das vorstehende Resultat fast aus der blossen Anschauung entnehmen.

Alle von den Elementen ds' an den Ort von ds übertragenen Geschwindigkeiten von der Grösse $\frac{i'ds'}{r^2}$ stehen senkrecht auf der durch C und ds' gelegten Ebene und sind einander gleich. Sie bilden mit der Axe Z einen Winkel $= 90^0 - c$. Zerlegen wir jede Geschwindigkeit $\frac{i'ds'}{r^2}$ in eine nach Z gerichtete und in eine mit der Ebene XY parallele Componente, so heben sich die letzteren Componenten auf und es bleiben nur die nach Z hin gerichteten übrig, deren Summe mit Hinzufügung des Factors $\frac{1}{2}$ $= \frac{i'\pi\varrho \sin c}{r^2}$ ist. Wird nun das Element ds an den Ort C gelegt, so entsteht eine in der auf Z senkrechten Ebene liegende und auf ds senkrecht stehende Kraft $\frac{i\,ds \cos\psi \cdot i'\pi\varrho \sin c}{r^2}$, und zwar gerichtet nach der Seite von ds, auf welcher die von dem kreisförmigen Strome und die von ds ausgehenden Schwingungen entgegengesetzt gerichtet sind.

Die vorstehenden Erörterungen dürften es wohl rechtfertigen, wenn ich der Ansicht Ausdruck gebe, dass die von mir aufgestellte Theorie den wirklichen Vorgängen entspricht. Die Rechnung stellt in allen Beziehungen vollständig und genau die aus den Schwingungen sich ergebenden Vorgänge dar.

SITZUNG VOM 14. MAI 1888.

E. Drechsel, *Ueber Elektrolyse des Phenols mit Wechselströmen.*

Vor etwa vier Jahren habe ich in einer Abhandlung über »Elektrolysen und Elektrosynthesen«[1]) mitgetheilt, dass bei der Elektrolyse einer wässrigen Lösung von Phenol, schwefelsaurer und doppeltkohlensaurer Magnesia mit Wechselströmen ausser der erwarteten Phenolätherschwefelsäure auch eine Anzahl anderer Producte entsteht, von denen ich diejenigen, welche nach dem Abdestilliren des unangegriffenen Phenols in der wässrigen Lösung zurückgeblieben waren, ebenfalls untersucht hatte. Schon damals war es mir aber aufgefallen, dass das abdestillirte Phenol einen eigenthümlichen, nicht unangenehmen Geruch besass, welcher auf die Anwesenheit eines anderen Körpers hinzudeuten schien; ich habe deshalb später dieses Phenol näher untersucht und will die gewonnenen Resultate im Folgenden kurz mittheilen.

Das erwähnte Destillationsproduct war eine wässrige Flüssigkeit, in welcher ölige, etwas röthlich gefärbte Tropfen herumschwammen; durch Zusatz von Natronlauge wurden dieselben grossentheils, aber nicht völlig in Lösung gebracht, worauf der eigenthümliche aromatische Geruch stärker hervortrat. Nun wurde das Ganze mit kleinen Mengen Aether ausgeschüttelt, die ätherische Lösung mit Chlorcalcium entwässert, filtrirt und fractionirt. Bis 100° ging hauptsächlich Aether über, von 100—174° nur wenig, von 174—180° die grösste Menge (II), von 180—190° der Rest (III), im Kölbchen blieben nur ein paar braune Tropfen. II und III besassen einen etwas unangenehmen Geruch, der aber auf Zusatz von etwas Natronlauge verschwand und einem angenehmen,

1) Journ. f. prakt. Chem. (2) 29, 229.

pfefferminzähnlichen Platz machte; beide Fractionen schienen noch etwas Phenol zu enthalten, wenigstens färbte sich ihre wässrige Lösung mit Eisenchlorid schwach violett. Beide wurden daher vereinigt, in einem Scheidetrichter in wenig conc. Natronlauge gelöst und durch Zusatz von Wasser theilweise wieder als Oel abgeschieden; die von diesem getrennte wässrige Flüssigkeit wurde (unter Zusatz eines Stückchens Zink um das Stossen zu vermeiden) abdestillirt bis keine Oeltropfen mehr übergingen, dann wurde das Destillat zu dem durch Wasser abgeschiedenen Oel gegeben und im Scheidetrichter unter Zusatz von etwas Aether, welcher die Klärung wesentlich förderte, absitzen gelassen. Die ätherische Lösung wurde sodann durch Chlorcalcium entwässert und destillirt; nachdem der Aether entwichen, ging die übrige Flüssigkeit zwischen 153° und 178° über. Die wässrige Lösung derselben gab mit Millon's Reagens schöne Roth-Purpurfärbung, mit Bromwasser einen Niederschlag, aber mit Eisenchlorid keine Färbung. Durch fractionirte Destillation konnte die geringe Menge Flüssigkeit, welche nach den angeführten Reactionen noch etwas Phenol zu enthalten schien, nicht zerlegt werden; eine Analyse derselben, welche Herr Dr. L. Reese auszuführen die Güte hatte, ergab folgende Werthe:

0·3210 g Substanz lieferten 0,8421 g CO_2 = 71,54 % C, und
0,3063 g H_2O = 10,60 % H.

Für einen Körper $C_6H_{10}O$ berechnet sich der Gehalt an Kohlenstoff zu 73,5 %, an Wasserstoff zu 10,2 % — Werthe, denen sich die durch die Analyse gefundenen so weit nähern, dass die Annahme, ein Körper $C_6H_{10}O$ sei der Hauptbestandtheil der vorliegenden Flüssigkeit, viel Wahrscheinlichkeit hat. Beiläufig möge noch erwähnt werden, dass ein Wassergehalt von 2 % den Kohlenstoffgehalt auf 72 % herabdrücken, den Wasserstoffgehalt aber nicht verändern würde, wonach die Anwesenheit einer kleinen Menge einer wasserstoffreicheren Verbindung, vielleicht $C_6H_{12}O$, vorauszusetzen ist.

Um eine etwas grössere Menge Substanz zur Verfügung zu bekommen, habe ich im vergangenen Herbst eine neue Menge Phenol bei Gegenwart von schwefelsaurer und doppeltkohlensaurer Magnesia in wässriger Lösung der Elektrolyse mit Wechselströmen unterworfen und habe aus der resultirenden Lösung ebenfalls eine kleine Menge der aromatisch riechenden Flüssig-

keit in ähnlicher Weise wie oben angegeben abscheiden können, allein auch jetzt führte die fractionirte Destillation zu keinem Resultate, insofern als die Flüssigkeit keinen constanten Siedepunkt zeigte und stets die oben angeführten, die Anwesenheit von Phenol andeutenden Reactionen gab. Da auch einige andere Trennungsversuche vergeblich waren, und ich vermuthete, dass hier ein ketonähnlicher Körper $C_6H_{10}O$ vorliegen müsse, so versuchte ich die Einwirkung von Phenylhydrazin, um vielleicht auf diese Weise zu einer krystallisirenden Verbindung zu gelangen. Ich versetzte daher das Oel mit einem Ueberschusse von Phenylhydrazin, wobei Trübung und Erwärmung eintrat, und erhitzte einige Zeit im siedenden Wasserbade; dann fügte ich Eisessig hinzu und füllte die Lösung durch Eiswasser, wodurch ein in weissen Nadeln krystallisirender Körper ausgeschieden wurde. Nach dem Auswaschen mit Wasser und Abpressen zwischen Papier brachte ich denselben über Schwefelsäure unter vermindertem Druck; leider zeigte sich aber der Körper sehr leicht zersetzlich, so dass er bald eine braune Färbung an der Oberfläche annahm. Deshalb unterwarf ich ihn nun, in der Hoffnung das ursprüngliche Oel wieder zu erhalten, mit überschüssiger verdünnter Schwefelsäure der Destillation, allein mit den Wasserdämpfen gingen anfangs nur ein paar Tropfen eines nach Pfefferminze riechenden Oeles über, später geringe Mengen blättriger Krystalle nebst einer gelb gefärbten, schön grün fluorescirenden wässrigen Lösung. Die Hauptmenge der Substanz schwamm in grossen schwarzen Tropfen in der verdünnten Säure im Destillirkolben umher, und erstarrte beim Erkalten krystallinisch. Zunächst versuchte ich dieselbe durch Umkrystallisiren aus Alkohol zu reinigen; sie schoss beim Erkalten der heissen Lösung in kleinen rhombischen Täfelchen an, welche indessen sich im Lichte an der Oberfläche noch schwach bräunten. Bei der Analyse der über Schwefelsäure getrockneten Substanz erhielt Herr Dr. Beese folgende Werthe (I):

(1.) 0,2471 g Substanz gaben: 0,7680 g $CO_2 = 84,77\%\ C$ und
0,1695 g $H_2O = 7,62\%\ H$.

(2.) 0,2323 g Substanz gaben: 15,3 $CC.N$ bei 756,4 mm Druck
und $5,5^{\circ} = 8,00\%\ N$.

Da die Bräunung der Substanz im Lichte und an der Luft darauf hinzudeuten schien, dass dieselbe noch nicht ganz rein

sei, so dampfte ich die alkoholischen Mutterlaugen ein und reinigte die Substanz durch mehrmalige Sublimation im luftverdünnten Raume bei 140—150°, nachdem ich mich durch besondere Versuche überzeugt hatte, dass das Sublimat aus Alkohol in genau denselben Formen unter dem Mikroskope auskrystallisirte, wie die nicht sublimirte Substanz. Die ursprünglich beabsichtigte Destillation mit Wasserdämpfen erwies sich als unthunlich, da die Substanz mit diesen zu wenig flüchtig war; das übergegangene Wasser hatte gelbe Farbe und schön grüne Fluorescenz. Zur Sublimation im luftverdünnten Raume diente mir mit bestem Erfolge ein kleines Fractionirkölbchen, an dessen Ableitungsröhre ein Glashahn angeschmolzen war; in das weite Rohr war mittelst eines Korkes ein nicht zu dünnwandiges Substanzröhrchen eingesetzt, welches bis in die Mitte der Kugel reichte und beständig von einem kalten Wasserstrom durchflossen wurde. Nachdem die Substanz in die Kugel gebracht war, wurde dieses Kühlrohr eingesetzt, die Luft mit einer Strahlpumpe ausgepumpt, der Hahn geschlossen und nun die Kugel in ein Paraffinbad versenkt, welches auf 140—150° erhitzt wurde; im Laufe einiger Stunden setzte sich dann das Sublimat als eine dicke, schön krystallinische Schicht an das Kühlrohr an, und konnte nach dem Erkalten mit diesem herausgenommen werden. Das Sublimat bestand aus weissen Blättern, denen kleine gelbliche Oeltröpfchen aufsassen; die Menge der letzteren schien zu wachsen, als die Luft nicht möglichst vollständig ausgepumpt worden war, auch machte sich dann beim Oeffnen des Apparates ein deutlicher indolartiger Geruch bemerklich. Zur völligen Reinigung wurde das Sublimat aus heissem ca. 50% Alkohol umkrystallisirt, abgesaugt und mit ca. 30% Alkohol gewaschen, bis es rein weiss erschien. Jetzt bildete es prächtige Blättchen, die in heissem Wasser nur äusserst wenig, in Alkohol leicht löslich waren und bei 108° schmolzen; bei der Analyse derselben erhielt Herr Dr. Siegfried folgende Zahlen (II):

(1.) 0,1582 g Substanz lieferten 0,4895 g $CO_2 = 84{,}38\%\ C$, und
0,1086 g $H_2O = 7{,}63\%\ H$.

(2.) 0,2370 g Substanz lieferten 18,3 $CC.$ N bei 746 mm Druck und
16° $= 8{,}82\%\ N$.

Die Werthe führen ebenso wie die oben mitgetheilten zu der Formel: $C_{12}H_{13}N$, für welche sich berechnen:

		Ber.	I.	II.
C_{12} :	144 ...	84,21 ...	84,77 ...	84,38
H_{13} :	13 ...	7,60 ...	7,62 ...	7,63
N :	14 ...	8,19 ...	8,00 ...	8.82
	171	100,00	100,39	100,83

In Analyse II stimmen, wie man sieht, Kohlenstoff- und Wasserstoffgehalt sehr gut mit den berechneten Werthen überein; die offenbar mit einem Fehler behaftete Stickstoffzahl habe ich nur angeführt um zu zeigen, dass die Substanz sauerstofffrei ist. Erwähnen will ich noch, dass die zur Analyse I dienende, nicht sublimirte Substanz in conc. Schwefelsäure gelöst mit etwas Salpetersäure versetzt eine schön dunkelgrüne Färbung annahm, welche beim Stehen allmählich in Gelb überging; die möglichst reine Substanz gab jedoch diese Reaction nur äusserst schwach, so dass sie vermuthlich nur einer Spur eines verunreinigenden Körpers zuzuschreiben ist.

Die Verbindung $C_{12}H_{13}N$ hat demnach dieselbe Zusammensetzung wie das Hydrocarbazol von Gräbe und Glaser, doch scheint sie mit diesem nur isomer zu sein, da dessen Schmelzpunkt bei 120° liegt. Gegen die Identität mit Hydrocarbazol spricht auch die Bildungsweise der Substanz, wenigstens wenn das Hydrocarbazol als ein Derivat des Diphenyls anzusehen ist.

Wenn es nun auch nicht gelungen ist, die Verbindung $C_6H_{10}O$, deren Vorhandensein in dem untersuchten Phenol vermuthet wurde, selbst in reinem Zustande abzuscheiden, so wird doch deren Anwesenheit durch die Bildung des Körpers $C_{12}H_{13}N$ bewiesen. Denn in Folge ihres unzweifelhaft ketonartigen Charakters reagirte die Verbindung $C_6H_{10}O$ mit Phenylhydrazin unter Wasserabspaltung nach der Gleichung:

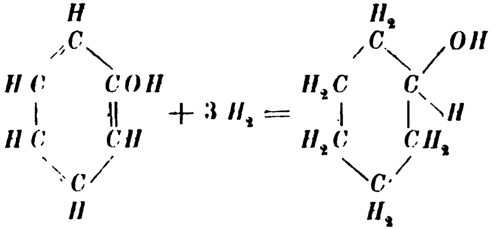
$$C_6H_{10}O + C_6H_5.N_2H_3 = C_{12}H_{16}N_2 + H_2O ,$$

und das Hydrazid $C_{12}H_{16}N_2$ gab bei der Behandlung mit Säure einfach Ammoniak ab:

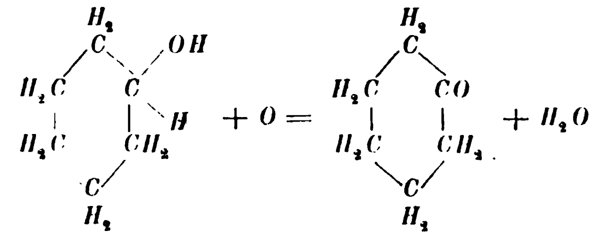
$$C_{12}H_{16}N_2 = C_{12}H_{13}N + NH_3 .$$

Auf diese Weise erklärt sich die Entstehung des Körpers $C_{12}H_{13}N$ sehr einfach und ungezwungen, denn die vorausgesetzten Reactionen sind auch in anderen ähnlichen Fällen nachgewiesen worden. Die Verbindung $C_6H_{10}O$ ist mit Mesityloxyd isomer; ich schlage für dieselbe den Namen *Hydrophenoketon* vor, und für die Verbindung $C_{12}H_{13}N$ den Namen *Hydrophenanilid*.

Die Bildung des Hydrophenoketons bei der Elektrolyse des Phenols mit Wechselströmen ermöglicht nun auch die Erklärung der Entstehung der fetten Säuren aus dem Phenol bei demselben Processe. Wie ich in der angeführten Abhandlung gezeigt habe, bilden dieselben eine Reihe mit abnehmendem Kohlenstoffgehalte, so dass ich schon damals vermuthete, sie möchten sämmtlich von Säuren mit C_6 (Capronsäure und Adipinsäure), welche unmittelbar aus dem Phenol hervorgingen, abstammen. Die Vermuthung fand eine kräftige Stütze in den Resultaten, welche mir später die Untersuchung der Elektrolyse der Capronsäure mit Wechselströmen [1]) gab, allein die Entstehung der Capronsäure selbst aus dem Phenol blieb noch unaufgeklärt, insofern als die Bildung eines Zwischenproductes sehr wahrscheinlich, aber noch nicht nachgewiesen war. Jetzt ist diese Lücke ausgefüllt, denn das Hydrophenoketon ist ohne Zweifel dieses gesuchte Zwischenproduct. Dasselbe entsteht aus dem Phenol auf ähnliche Weise, wie das Hexachlorbenzol aus Benzol, indem durch Anlagerung von Wasserstoff alle doppelten Bindungen gelöst werden:



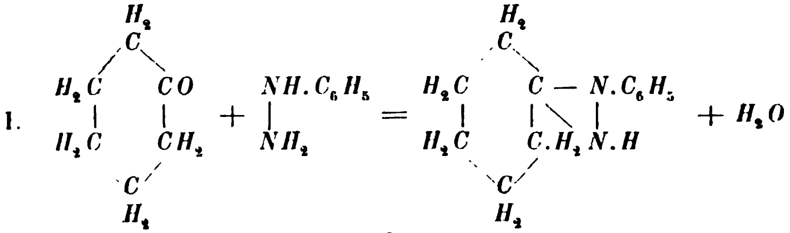
das Isocarbinol $C_6H_{12}O$ wird aber sogleich durch Oxydation in das Keton verwandelt:



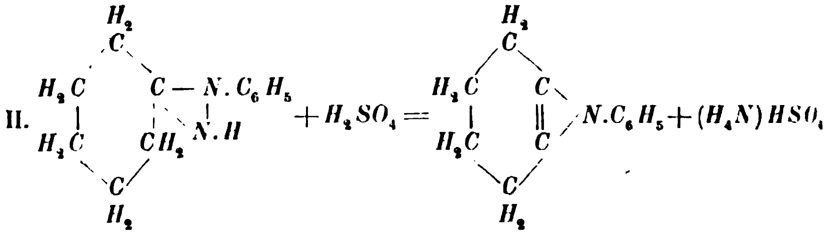
Hexahydrophenol Hydrophenoketon

1) Ber. d. kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Cl., Sitz. v. 2. Mai 1886.

Die Ueberführung dieses letzteren in Hydrophenanilid ergiebt sich dann leicht aus folgenden Gleichungen:

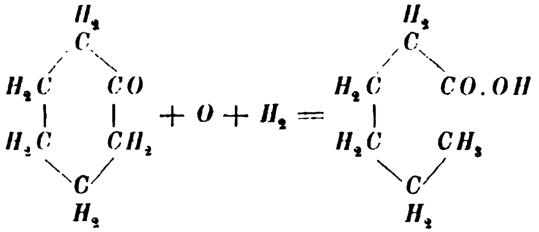


Hydrophenoketon Phenylhydrazin



Hydrophenanilid

Die Entstehung der Capronsäure aus dem Hydrophenoketon ist leicht verständlich, denn es bedarf zu diesem Zwecke nur einer Zuführung von $O + H_2$, wodurch der Ring gesprengt wird:



Hydrophenoketon Normalcapronsäure

Zu den wenigen bekannten Beispielen von Umwandlung einer aromatischen Verbindung in eine fette haben die vorliegenden Untersuchungen ein neues hinzugefügt; in der Elektrolyse mit Wechselströmen haben wir ein Mittel gefunden, um das Phenol in Säuren der Ameisen- und der Oxalsäurereihe überzuführen. Wie ein Blick auf die oben entwickelten Formeln und Gleichungen lehrt, wird dieses Resultat durch Zusammen-

wirken von Oxydations- und Reductionsprocessen, bez. Anlagerung und Wegnahme von Wasserstoff- und Sauerstoffatomen erreicht, und die lange Reihe von Producten, welche bei dieser Art der Elektrolyse aus dem Phenol entstehen, lässt deutlich erkennen, dass in der geeigneten Verbindung von Oxydation und Reduction ein Weg gegeben ist, welcher, vom Phenol ausgehend, zu immer einfacheren, d. h. kohlenstoffärmeren Verbindungen führt und bei Kohlensäure und Wasser endet. Schon früher habe ich darauf hingewiesen[1]), dass die Verbrennung der Nahrungs- und Gewebsbestandtheile im Thierkörper jedenfalls auf demselben Wege erfolgt, denn einestheils sind intermediäre Stoffwechselproducte bekannt, welche zu Nahrungsstoffen in ähnlicher Beziehung stehen, wie die Glieder der in diesen Versuchen erhaltenen Reihen fetter Säuren unter einander (man vergleiche z. B. Dextrose $C_6H_{12}O_6$ und Glykuronsäure $C_6H_{10}O_7$ mit Capronsäure $C_6H_{12}O_2$ und Adipinsäure $C_6H_{10}O_4$, oder Buttersäure $C_4H_8O_2$ und Bernsteinsäure $C_4H_6O_4$), und anderntheils wird auf diese Weise die Verbrennung complicirterer Moleküle zu Kohlensäure und Wasser so einfach und ruhig wie nur irgend möglich bewirkt. Wasserstoff und Kohlenstoff werden ein Atom nach dem andern herausgenommen, ohne dass ein plötzlicher totaler Zerfall einträte; ein Molekül Buttersäure z. B. wird nicht durch gleichzeitige Aufnahme von 10 Atomen Sauerstoff plötzlich zu Kohlensäure und Wasser verbrannt, sondern dasselbe geht nach einander in Oxybuttersäure, Bernsteinsäure, Milchsäure, Malonsäure, Glykolsäure, Oxalsäure und Kohlensäure unter stetiger Abspaltung von Wasser und Kohlensäure über.

Aus den Versuchen mit Phenol lässt sich ferner entnehmen, dass dasselbe im Organismus behufs vollständiger Verbrennung erst in Körper der fetten Reihe übergeführt werden muss: kann der sogenannte Benzolring nicht gesprengt werden, so tritt die aromatische Verbindung als solche, bez. mit einer anderen gepaart, im Harn aus — findet aber die Sprengung statt, so fallen die gebildeten Fettkörper der vollständigen Verbrennung anheim wie sonst. Merkwürdig erscheint in dieser Beziehung auch die bekannte Thatsache, dass in manchen Fällen der aromatische Paarling den mit ihm verbundenen Fettkörper vor weiterer Zerstörung schützen kann, wie z. B. die Benzoësäure des Glykokoll.

1) Ber. d. kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Cl., Sitz. v. 2. Mai 1886.

Wenngleich nun der angegebene Weg zur Verbrennung theoretisch auf alle organischen Substanzen anwendbar erscheint, so deuten doch gewisse Thatsachen darauf hin, dass dies für den thierischen Organismus nicht ohne Weiteres gilt, dass vielmehr in diesem behufs der Verbrennung verschiedener Substanzen verschiedene Bedingungen erfüllt sein müssen. Das bekannteste Beispiel für die Richtigkeit dieser Behauptung bietet der Diabetes; der Organismus des Kranken vermag noch sehr wohl Eiweiss, Fett, organische Säuren, Benzol zu oxydiren, nicht aber, oder wenigstens nicht in genügendem Maasse Zucker. Nencki und Sieber[1]) suchen den Grund dieser Erscheinung in dem Umstande, dass der Zucker, um verbrannt werden zu können, im Organismus erst in Säuren übergeführt werden müsse und dass die Fähigkeit hierzu dem Diabetiker abgehe; allein abgesehen davon, dass dieser oft auch Säuren (β-Oxybuttersäure) nicht mehr zu verbrennen vermag, sagt auch diese Annahme nichts Anderes aus, als dass behufs vollständiger Verbrennung verschiedener organischer Substanzen im Thierkörper verschiedene Bedingungen erfüllt sein müssen. Man kann deshalb aber auch nicht eine allgemeine Methode aufstellen, um das Oxydationsvermögen des Organismus überhaupt zu messen; Nencki und Sieber[2]) schlagen zu diesem Zwecke die Eingabe von Benzol und Bestimmung des im Harne ausgeschiedenen Phenols vor, allein ein derartiger Versuch kann über nichts weiter Aufschluss geben, als über die Fähigkeit des Organismus *Benzol* zu oxydiren.

Schliesslich will ich noch auf zwei Punkte hinweisen, welche geeignet sind die Aehnlichkeit der Processe in meinen Versuchen mit denen im Organismus noch deutlicher zu zeigen. Erstens hat sich bei allen Versuchen über Synthesen durch überlebende Organe (Schmiedeberg und Bunge; Kochs) als nothwendig herausgestellt, arterielles Blut zur Durchleitung zu benutzen, woraus man schliessen darf, dass ein Oxydationsprocess für das Zustandekommen der Synthese nothwendig ist; in voller Uebereinstimmung steht damit meine Synthese der Phenolätherschwefelsäure, denn auch für diese ist eine Oxydation mit nachfolgender Reduction erforderlich:

I. $C_6H_5.OH + HO.SO_2.OH + O = C_6H_5.O.O.SO_2.OH + H_2O$,
II. $C_6H_5.O.O.SO_2.OH + H_2 = C_6H_5.O.SO_2.OH + H_2O$,

1) Journ. f. prakt. Chem. (2) 26, 1.
2) Pflüger's Archiv, 31, 319.

wobei die Vereinigung des Phenols mit der Schwefelsäure das Werk des Sauerstoffs ist. Zweitens wird im Organismus aus Phenol zwar Brenzcatechin und Hydrochinon durch Oxydation gebildet, nicht aber Resorcin, und dem entspricht vollständig das Resultat meiner Versuche: Brenzcatechin und Hydrochinon konnten in der elektrolysirten Phenollösung leicht nachgewiesen werden, Resorcin dagegen nicht, trotz besonders darauf gerichteter Bemühungen. Dass eine so weit gehende Aehnlichkeit zwischen dem Versuche und den Vorgängen im lebenden Organismus lediglich auf Zufall beruhe, ist nicht wahrscheinlich, wohl aber die Annahme, dass in der That ersterer das treue Abbild der letzteren darstellt.

Leipzig, im Mai 1888.

SITZUNG VOM 14. MAI 1888.

C. Neumann, *Ueber die Stetigkeit mehrdeutiger Functionen.* [1])

In meinem Werke über die Riemann'sche Theorie [2]) habe ich im sechsten Capitel eine neue und einfache Methode mitgetheilt zur Untersuchung der Stetigkeit mehrdeutiger Functionen. Es mag mir gestattet sein, den eigentlichen Grundgedanken dieser Methode, welcher in jener Publication wohl nicht hinreichend deutlich hervortritt, hier durch ein einfaches Beispiel zu erläutern.

Die Function $f(z)$ sei auf der z-Ebene innerhalb eines gegebenen Gebietes $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig; und Gleiches gelte innerhalb $\mathfrak{A}$ auch von $f'(z)$. Alsdann wird bekanntlich $f(z)$ selber, und ebenso auch $f(z) - c_1$ innerhalb $\mathfrak{A}$ immer nur in *einzelnen* Punkten verschwinden können. Dabei soll c_1 eine gegebene Constante vorstellen.

Einer von diesen einzelnen Punkten, in denen $f(z) - c_1$ innerhalb $\mathfrak{A}$ verschwindet, mag z_1 heissen. Es soll untersucht werden, wie z_1 sich ändert, falls man c_1 sich ändern lässt.

Man construire innerhalb $\mathfrak{A}$ die Kreisfläche (z_1, ε), d. h. eine Kreisfläche, deren Centrum in z_1 liegt, und deren Radius $= \varepsilon$ ist. Dabei soll ε einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad vorstellen. Jedenfalls aber soll ε so klein sein, dass *in Erstreckung* der Fläche (z_1, ε) die Function $f(z) - c_1$ nur allein in z_1 verschwindet. Alsdann wird also z. B. am *Rande* dieser Fläche $f(z) - c_1$ durchweg $\neq 0$, mithin mod $[f(z) - c_1]$ durchweg > 0 sein. Folglich wird eine positive Constante 2ϱ angebbar sein, der Art, dass für alle Punkte z dieses Randes die Formel stattfindet:

$$(1.) \qquad \text{mod}\,[f(z) - c_1] > 2\varrho\,; \quad \text{am Rande von } (z_1, \varepsilon)\,.$$

1) Dieser Aufsatz wurde zum Druck eingereicht während der Sitzung.

2) C. Neumann: Vorlesungen über die Riemann'sche Theorie der Abel'schen Integrale. II. Aufl. Leipzig 1884.

Es sei nun c irgend eine *neue* Constante. Alsdann folgt aus der identischen Gleichung

$$f(z) - c = [f(z) - c_1] + [c_1 - c]$$

sofort:

$$\text{mod}\,[f(z) - c] \geqq \text{mod}\,[f(z) - c_1] - \text{mod}\,[c_1 - c]\,.$$

Bringt man diese Formel in Anwendung auf den Rand der Fläche (z_1, ε), so ergiebt sich mit Rücksicht auf (1.):

(2.) $\text{mod}[f(z) - c] > 2\varrho - \text{mod}[c_1 - c]$; am Rande von (z_1, ε).

Unterwirft man jetzt jene neue Constante c der Bedingung:

(3.) $$\text{mod}\,[c - c_1] < \varrho\,,$$

so erhält man aus (2.):

(4.) $\text{mod}\,[f(z) - c] > \varrho$; am Rande von (z_1, ε).

Mit andern Worten: Unterwirft man c der Bedingung (3.), lässt man also diese Constante c auf der c-Ebene innerhalb des Kreises (c_1, ϱ) beliebig variiren, so wird dabei der Nenner des über die Peripherie von (z_1, ε) erstreckten Integrals

(5.) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{(z_1,\,\varepsilon)} \frac{df(z)}{f(z) - c}$$

niemals 0 werden können. Folglich wird dieses Integral während jener Variation nur in *stetiger* Weise sich ändern können, und daher, weil es stetiger Aenderungen unfähig ist, *constant* bleiben. Dass nämlich dieses Integral stetiger Aenderungen unfähig ist, ergiebt sich aus einem bekannten Cauchy'schen Theorem, demzufolge der Werth des Integrals die Anzahl der elementaren Nullpunkte der Function $f(z) - c$ innerhalb der Fläche (z_1, ε) repräsentirt; so dass also der Werth des Integrals immer nur eine *ganze Zahl* sein kann.

Mit Rücksicht auf dieses Cauchy'sche Theorem ist übrigens der soeben über die Constanz des Integrales (5.) ausgesprochene Satz offenbar auch so ausdrückbar: Lässt man c innerhalb des Kreises (c_1, ϱ) beliebig variiren, so wird dabei die Anzahl der innerhalb (z_1, ε) vorhandenen elementaren Nullpunkte der Function $f(z) - c$ *constant* bleiben. Es werden mithin, während dieser Variation, diejenigen Nullpunkte, welche zu Anfang innerhalb des Kreises (z_1, ε) vorhanden waren, innerhalb dieses Kreises *verbleiben*, und auch keine neuen zu denselben hinzutreten.

Bezeichnet man also die innerhalb des Kreises (z_1, ε) vorhandenen elementaren Nullpunkte von $f(z) - c$ mit $z', z'', \ldots z^{(n)}$, so werden, so lange c innerhalb (c_1, ϱ) bleibt, die Moduln der Grössen

$$z' - z_1, \quad z'' - z_1, \ldots z^{(n)} - z_1$$

durchweg $< \varepsilon$ bleiben. Folglich sind $z', z'', \ldots z^{(n)}$ *stetige* Functionen von c. Ueberdies erkennt man leicht, dass $z', z'', \ldots z^{(n)}$ für $c = c_1$ in z_1 übergehen, und gelangt daher zu folgendem Satz:

Es seien $f(z)$ und $f'(z)$ auf der z-Ebene innerhalb eines gegebenen Gebietes $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig. Ferner sei z_1 ein gegebener Punkt innerhalb $\mathfrak{A}$, und $f(z_1) = c_1$. Betrachtet man alsdann die Wurzeln z der Gleichung $f(z) = c$, so werden diese Wurzeln Functionen von c sein. Und zwar werden diejenigen dieser Wurzeln, welche für $c = c_1$ den Werth z_1 besitzen, Functionen von c sein, die (auf der c-Ebene) im Punkte c_1 stetig sind.

Uebrigens ist die hier in Kürze angedeutete Methode von mir in dem genannten Werke nicht nur auf Gleichungen von der Form $f(z) = c$, sondern auch auf Gleichungen von der allgemeinern Form $f(z, c) = 0$ angewendet worden.

— — —

Ich benutze diese Gelegenheit, um noch einige Bemerkungen hinzuzufügen über die drei letzten Capitel jenes Werkes. — Bei meinem dortigen Beweise der Riemann'schen Existenztheoreme spielt diejenige combinatorische Methode, welche ich daselbst als die der *gürtelförmigen Verschmelzung* bezeichnet habe, eine hervorragende Rolle. Auch ist mir noch sehr wohl in Erinnerung, wie viel Mühe und Zeit ich damals aufwenden musste, um diese Methode zu finden, und die Correctheit derselben strenge zu beweisen. Um so mehr sehe ich mich verpflichtet, zu bemerken, dass diese Methode (wie ich vor Kurzem durch eine Mittheilung von H. A. Schwarz erfahren habe) schon *vor* mir von H. A. Schwarz gefunden und publicirt worden ist, in seiner Abhandlung von 1870, in den Berichten der Berliner Akademie. Auch würde ich, wenn ich im Jahre 1884, bei Herausgabe meines Werkes, auf diese Schwarz'sche Abhandlung aufmerksam geworden wäre, sicherlich nicht unterlassen haben, in jenem Werke zu bemerken, dass die Beweise der in Rede stehenden Existenztheoreme schon in dieser Schwarz'schen Abhandlung, wenn auch zum Theil in ganz anderer Art, gegeben, oder wenigstens angedeutet sind.

Indem ich in dieser Beziehung die Priorität des Herrn SCHWARZ bereitwilligst anerkenne, möchte ich gleichzeitig meinerseits die Priorität, Herrn SCHWARZ gegenüber, nach einer andern Richtung in Anspruch nehmen. Bereits im Jahre 1861 habe ich gewisse allgemeine Probleme der von mir aufgestellten Theorie des Logarithmischen Potentials für die *Ellipse* und auch für eine gewisse Classe *allgemeinerer Curven* gelöst, und zwar Probleme, welche diejenigen der conformen Abbildung als speciellen Fall in sich enthalten. Auch habe ich die Hauptresultate meiner damaligen Untersuchungen in meiner Abhandlung über die Gleichung $\Delta\Phi = 0$, im Jahre 1861 publicirt (CRELLE's Journal, Bd. 59); während die Untersuchungen von SCHWARZ über die conforme Abbildung der *Ellipse* erst im Jahre 1868, 69 veröffentlicht worden sind. (Annali di Matematica, Tomo III, pag. 166.)

Dass jene von mir behandelten allgemeinen Probleme des Logarithmischen Potentials die Aufgaben der conformen Abbildung als *speciellen Fall* in sich enthalten, darauf habe ich damals, im Jahre 1861, allerdings nicht aufmerksam gemacht, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil mir zu jener Zeit die RIEMANN-schen Abhandlungen, und überhaupt auch der Begriff der conformen Abbildung noch völlig unbekannt waren.

Uebrigens lege ich weniger Gewicht darauf, das Problem der conformen Abbildung speciell für die *Ellipse* gelöst zu haben, als vielmehr auf die Vortheile, welche aus meiner damaligen Untersuchung von 1861 für die Lösung der Probleme der conformen Abbildung *im Allgemeinen* sich ergeben.

Richard Schumann, *Ueber den Gang der Pendeluhr F. Dencker XII.*

I.

Die nachstehende Untersuchung enthält eine Discussion des Ganges, welchen die im Titel genannte und seit 1882 als Hauptuhr der Leipziger Sternwarte dienende Uhr in den Jahren 1883 bis 1887 gezeigt hat. Eine genauere Mittheilung hierüber dürfte um so mehr von Interesse sein, als es sich um die erste aus der Dencker'schen Werkstatt hervorgegangene Uhr handelt, deren Verhalten einer schärferen Prüfung unterzogen worden ist. Ich gebe zunächst eine Zusammenstellung der für das Verständniss des Folgenden erforderlichen Daten auf Grund des Materials, welches mir für die vorliegende Untersuchung von Herrn Prof. Bruns zur Verfügung gestellt wurde.

Die Uhr (aufgestellt 1882 Juni 19) hängt an der Nordseite eines isolirten Backsteinpfeilers in einem Verschlage, welcher von dem Corridor unter der Ostkuppel der Sternwarte abgetrennt wurde. Die Uhr ist dadurch gegen raschen Temperaturwechsel einigermassen geschützt; dagegen macht der Aufstellungsraum den jährlichen Gang der mittleren Tagestemperatur vollständig mit, wenn man berücksichtigt, dass die Nebenräume im Winter geheizt werden müssen. Leider liess sich kein hinsichtlich der Wärmeschwankungen geeigneter Raum für die Aufstellung ausfindig machen, wenn man nicht die Uhr der Gefahr des Rostens aussetzen wollte. Die Befestigung ist die bisher auch bei guten Uhren vorwiegend übliche, d. h. das Stück für die Pendelaufhängung und die Console für das Werk sitzen an der Rückwand des Holzgehäuses, und die Rückwand des Gehäuses ist an der Mauer befestigt.

Die Hemmung der Uhr ist der Graham'sche Anker in der Kessels'schen Form; auch in anderen Einzelheiten schliesst sich die Construction dem von Kessels gegebenen Modell an. Das Pendel besitzt eine Stahl-Zink-Compensation, bei deren Herstellung der Auswahl des Materials ganz besondere Sorgfalt gewidmet worden war. Die Stahlstangen sind durch langdauernde Erhitzung und langsames Abkühlen von jeder Spannung befreit worden, ebenso ist das Zink einem, allerdings ziemlich umständlichen Raffinirungsprocess unterworfen worden, der diesem Material einen feinen und gleichmässigen Bruch neben relativ grosser Festigkeit und Zähigkeit gegeben hat. Die Compensation ist nicht corrigirbar, ausser etwa durch Kürzung aller Stangen; dieselben mussten deshalb vorher auf einem von dem Verfertiger der Uhr besonders für diesen Zweck gebauten kleinen Comparator auf ihre Ausdehnung untersucht werden. Dass dies mit der hinreichenden Schärfe geschehen ist, dürfte aus der Kleinheit des übrig gebliebenen Compensationsfehlers hervorgehen, der von derselben Ordnung ist, wie bei anderen anerkannt guten Uhren.

Nach einem Jahre ungestörten Ganges wurde die Uhr 1883 Juni 29 angehalten, um auf Wunsch des Verfertigers etwas neues Oel auf das Steigrad und in das Gabelstiftloch zu geben. Zugleich wurde das Zuggewicht verstärkt, vorläufig durch Auflegen von Gewichten, weil der Schwingungsbogen bei niedriger Temperatur mehr, als gut schien, sich seiner unteren Grenze näherte. Ausserdem wurde der Einfluss bestimmter Gewichtseinlagen in den Schrottrichter am Pendel ermittelt und darauf hin der Gang nach Möglichkeit auf Null gebracht. Die in der Periode 1883 August 11 bis 1887 Juli 20 notirten Eingriffe, nämlich:

1884 Juli 27: Ersetzung des Zuggewichts und der Zulage durch ein einziges gleich schweres Gewicht,

1885 Mai: Anbringung von Einsatzkästen in den Fenstern der Uhrkammer zum besseren Schutze gegen Temperaturschwankungen,

1885 November bis 1886 Februar 20: bauliche Aenderungen in und unter der Heliometerkuppel, welche über der Uhrkammer liegt,

haben, nach Schwingungsbogen und Gang zu urtheilen, keinen merklichen Einfluss ausgeübt.

Eine rapide Abnahme des Schwingungsbogens war die Veranlassung, dass die Uhr, deren Reinigung schon einige Monate

früher hatte vorgenommen werden sollen, angehalten wurde. Die Revision ergab, ausser der nicht weiter auffälligen Verdickung des Oels, dass der vordere Zapfen der Ankerwelle zuletzt in roth gewordenem Oel gelaufen war und dass seine Politur etwas gelitten hatte.

Da der Uhr absichtlich kein elektrischer Contact beigegeben wurde, so ist bei den durchweg chronographisch ausgeführten Zeitbestimmungen die Vergleichung von D. XII mit der Registriruhr stets durch eine genügende Anzahl von Signalen bei Beginn und bei Schluss der Zeitbestimmung bewirkt worden.

Bis 1884 September 20 geschahen die Zeitbestimmungen an einem gebrochenen Passageninstrumente im Verticale des Polarsterns; an jenem Tage trat ausser einem Wechsel des Beobachters auch ein solcher des Instrumentes und des Meridians ein, indem von da ab ausschliesslich der Meridiankreis verwendet wurde. Mit zwei Ausnahmen fanden bei jedem Beobachterwechsel Anschlussbeobachtungen statt, um die Uhrgänge rein zu erhalten. Die sich ergebenden Reductionen waren übrigens sehr klein.

II.

Dreimonatliche vergleichende Ablesungen an zwei Thermometern ergaben, dass die oberen Luftschichten im Uhrgehäuse eine höhere Temperatur haben als die unteren; nach Monat und Tageszeit geordnet und im Sinne oberes minus unteres Thermometer genommen, ergeben sich die folgenden Unterschiede:

		18^h	2^h	10^h
1882	Juli	+ 0°28	+ 0°50	+ 0°37
	August	+ 0.18	+ 0.30	+ 0.22
	September	+ 0.21	+ 0.42	+ 0.26

Nach Wagner (Bulletin der St.-Petersburger Akademie 1864, Juni) ist der Einfluss einer Temperaturschichtung im Betrage von einigen Zehntel Graden auf den Gang unwesentlich bei Quecksilbercompensation; für ein Rostpendel ist der Einfluss selbstverständlich erheblich geringer.

Weiterhin sind die Temperaturen nur noch am oberen Thermometer notirt worden und zwar im Anschluss an die Ablesungstermine der meteorologischen Station, zweimal täglich, 8^h und 20^h.

Da die Unterschiede solcher aus einer beschränkten Anzahl von Ablesungen erhaltenen Tagesmittel von den wahren nicht rein zufälliger Art sind, sondern im Verlauf des Jahres eine gewisse, mit der täglichen Periode zusammenhängende Gesetzmässigkeit besitzen, so ist es nöthig, einen Ueberschlag zu machen, wie für unseren Fall Gang und Stand dabei entstellt werden können.

Entnimmt man nämlich den von Bruhns veröffentlichten meteorologischen Jahrbüchern von 1871-75 Monatsmittel ($=M_{24}$), erhalten aus stündlichen Aufzeichnungen des Registrirthermometers und -barometers, berechnet dazu die aus nur zweimaligen, nämlich 8^h und 20^h, folgenden Monatsmittel ($=M_2$), so findet man bei der Temperatur für $M_{24}-M_2$ die Werthe:

	1872	3	4	5	Mittel
Januar	+ 0°47	+ 0°48	+ 0°56	+ 0°49	+ 0°50
Februar	+ 0.77	+ 0.45	+ 0.77	+ 0.68	+ 0.67
März	+ 0.62	+ 0.88	+ 0.58	+ 0.40	+ 0.62
April	+ 0.42	+ 0.59	+ 0.45	+ 0.13	+ 0.40
Mai	+ 0.17	+ 0.15	— 0.06	0.00	+ 0.06
Juni	— 0.32	— 0.06	— 0.14	— 0.15	— 0.17
Juli	— 0.20	+ 0.03	+ 0.07	— 0.01	— 0.03
August	+ 0.46	+ 0.52	+ 0.39	+ 0.50	+ 0.47
September	+ 0.80	+ 0.78	+ 1.06	+ 1.04	+ 0.91
October	+ 0.94	+ 0.98	+ 1.44	+ 0.47	+ 0.96
November	+ 0.53	+ 0.71	+ 0.58	+ 0.56	+ 0.59
December	+ 0.49	+ 0.49	+ 0.32	+ 0.42	+ 0.43

Dieselbe Operation, für Luftdruck ausgeführt, lieferte nur Unterschiede von einigen Hundertel Millimetern, also durchaus unerhebliche Grössen.

Das Verhältniss der täglichen äusseren Temperaturperiode zu jener im Uhrgehäuse ist etwa 1 : 0,6, wie sich aus einer Reihe von Simultanbeobachtungen ergiebt, welche während dreier Monate speciell zu diesem Zwecke mit drei täglichen Ablesungen angestellt worden waren. In der Absicht, der Fehlerhaftigkeit der gegebenen Temperaturen summarisch entgegenzuwirken, benutzte ich diese Zahl und die durch Mittelbilden aus allen $M_{24}-M_2$ resultirende Reihe zur Berechnung einer Interpolationsformel, nach welcher dann die gegebenen Temperaturen umgeändert wurden. Die mit beiderlei Temperaturen durchgeführte Aus-

gleichung der Gänge zeigte, dass die beiden Constanten des Ganges um 0ˢ005, die beiden Temperaturcoëfficienten nur um $^1/_{40}$ ihres Werthes voneinander abwichen, während die übrigen Coëfficienten ungeändert blieben; bei der hier erreichbaren Genauigkeit kommen derartige Unterschiede nicht in Betracht. Es ist aber möglich, dass in den Gang- oder Standfehlern einer guten Uhr eine Abhängigkeit von der Jahreszeit hervortritt, erzeugt durch Anwendung solcher fehlerhafter Temperaturen; nach Obigem könnten die Abweichungen in Gang 0ˢ01, in Stand 0ˢ5 erreichen.

III.

Gang und Schwingungsbogen sind im Folgenden als lineare Functionen von Luftdruck und Temperatur vorausgesetzt worden. Die in den Gängen bei starken Druckschwankungen übrig bleibenden Widersprüche zwischen Beobachtung und Rechnung lassen allerdings vermuthen, dass hierbei jene Form der Darstellung keine ganz erschöpfende ist; es war jedoch, wie der Versuch ergab, nicht möglich, diese Differenzen durch ein in Bezug auf den Luftdruck quadratisches Glied wesentlich zu vermindern.

Eine graphische Darstellung des Schwingungsbogens, des Ganges und der Uhrcorrectionen zeigte deutlich, dass es nothwendig sei, erstens, mit der Zeit eingetretene Veränderungen zu berücksichtigen, was theils durch lineare, theils durch quadratische Glieder geschehen ist; zweitens, die Beobachtungen des letzten Monats von der Rechnung auszuschliessen, da dieselben in ersichtlicher Weise starke Unregelmässigkeiten aufweisen.

Man findet nun weiterhin für die beobachteten Grössen G Gleichungen angesetzt von der Form:

$$G = G_0 + b\cdot(t - t_0) + c\cdot(t - t_0)^2 + d\cdot(T - T_0) + e\cdot(B - B_0):$$

darin bedeuten: t die Zeit, T die Temperatur (in Celsiusgraden), B den Barometerstand, t_0, T_0, B_0 gewisse zweckmässig zu wählende Ausgangswerthe, G_0 den unbekannten mittleren Gang oder Schwingungsbogen, b, c, d, e die gesuchten Coëfficienten. Die Finalgleichungen für diese sind theils durch die einfache Methode der Umkehr der Vorzeichen und Summation, theils durch die Cauchy'sche Methode gewonnen worden; in letzterem Falle unter

Benutzung der von Villarceau (Connaissance des temps 1852) als nothwendig und hinreichend angeführten Controlen.

Man begiebt sich dabei allerdings des Vortheils einer exacten Fehlerermittelung; ein Ersatz hierfür liegt jedoch darin, dass ich die definitiven Coëfficienten zwar durch Zusammenfassung des gesammten Beobachtungsmaterials ermittle, ausserdem aber auch die für einzelne (meist einjährige) Zeitabschnitte giltigen Coëfficientensysteme berechne.

IV.

An Dencker XII sind beide Enden des Schwingungsbogens täglich einmal (20^h) abgelesen worden; die im Uhrbuche angegebenen und für die Zeitbestimmungsintervalle giltigen halben Schwingungsbogen zeigen einen engen Zusammenhang mit der Temperatur. Um die so complicirte Einwirkung derselben auch hinsichtlich des Schwingungsbogens genauer kennen zu lernen, habe ich diesen einer Ausgleichung unterzogen.

Das Intervall der Ablesescala beträgt genau 10′ und es werden Zehntel desselben geschätzt; parallaktische Ablesefehler sind durch die Art des Ablesens vermieden. Um den Einfluss der Beobachtungsfehler zu verringern, wird man den Schwingungsbogen über bestimmte Zeiträume zu Mittelwerthen zusammenfassen und zwar, wegen der Regelmässigkeit der Ablesung, über gleichlange Zeiträume. Bei der Wahl der Dauer eines solchen hat man es in der Hand, zugleich eine wöchentliche Periode zu eliminiren.

Beim tiefsten Stande des Zuggewichtes schneidet nämlich dessen untere Grenzfläche ungefähr mit der Mitte der Pendellinse ab; die kürzeste Entfernung zwischen Linse und Gewicht beträgt dann 2—3 cm und unter der Voraussetzung, dass das letztere dann in den Bereich der »mitschwingenden Luftmassen« gelangt sei, lässt sich vermuthen, dass hierdurch eine störende Wirkung ausgeübt werde. Diese Vermuthung dürfte übrigens schon alt sein.

Zu einem hierauf sich beziehenden Versuche waren schon früher auf Veranlassung des Herrn Prof. Bruns die halben Schwingungsbogen eines Halbjahres zu Mitteln vereinigt und gefunden worden:

☉	☾	♂	♃	♀	♄
2° 22.′4	22.′5	22.′7	23.′4	23.′4	22.′6

;

der Tag des Aufziehens (☿ 20^h) wurde weggelassen.

Diese Reihe erstreckt sich nur über eine halbe Temperaturperiode (Januar — Juni); es liegt nahe, das gesammte, fast vierjährige Beobachtungsmaterial zu einem umfassenderen Versuche zu verwenden; auch scheint es, um einen wenigstens angenäherten mittleren Fehler angeben zu können, zweckmässig, für jede einzelne Woche diese Periode aufzusuchen.

Man erhält nun, ausgehend von der letzten Ablesung vor dem Aufziehen, die folgenden, nach Jahren und Wochentagen geordneten Unterschiede:

	1883	1884	1885	1886	1883—86
♂—♂	0″	0″	0″	0″	0″
☿—♂	+ 15	+ 4	+ 12	+ 9	+ 10
♃—♂	+ 23	+ 14	+ 27	+ 21	+ 21
♀—♂	+ 20	+ 6	+ 40	+ 56	+ 30
♄—♂	+ 15	+ 8	+ 29	+ 34	+ 21
☉—♂	+ 21	+ 8	+ 25	+ 32	+ 21
☾—♂	+ 11	+ 10	+ 12	+ 36	+ 17
♂—♂	0	0	0	0	0

Als mittlerer Fehler einer Zahl der letzten Reihe, deren jede das Mittel aus 402 Beobachtungen ist, ergiebt sich der Werth: $\pm 5''$ und zwar ohne Rücksicht auf die Veränderungen des Schwingungsbogens durch Temperatur und Luftdruck.

In den Publications of the Washburn Observatory II, im Artikel: The sidereal time clock (Hohwü), findet man, als Resultat directer Beobachtung, die Bemerkung über den Schwingungsbogen: it appears to decrease as the driving weight falls.

Aus Uebereinstimmung und Sinn der Vorzeichen obiger Unterschiede ersieht man, dass auch der Schwingungsbogen von Dencker XII beim tiefsten Stande des Zuggewichtes am kleinsten ist; nebenbei, aus dem Gange der Zahlen, dass er mindestens einen Tag braucht, um in die neue Gleichgewichtslage zu kommen; es ist dies wohl vereinbar mit Beobachtungen des Herrn Professor Foerster (Astronomische Nachrichten 2182—4: Untersuchungen über Pendeluhren; III).

Mit Rücksicht auf das Vorhergehende sind bei der Untersuchung der Abhängigkeit des Schwingungsbogens von Luftdruck und Temperatur sogleich 7tägige Mittelwerthe eingeführt worden; es ergeben sich für diese 202 Gleichungen von der Form:

$$\text{Beob. Schw.-B.} = a + b\,(t - t_0) + c\,(t - t_0)^2 + d\,(T - 10^\circ) + e\,(B - 750^{\text{mm}}).$$

Hierin bedeuten: a den mittleren Schwingungsbogen, b, c, d, e der Reihe nach: den Coëfficienten der Zeit t, des Quadrates der Zeit, der Temperatur T, des Barometerstandes B; t_0 steht für 1885 Juli 24,5; t gilt für die Mitte jeder Woche, die Zeiteinheit ist für b: 3,5, für c: 350 Tage. Die in der 1. Reihe der folgenden Tabelle enthaltenen Epochen beziehen sich auf den Anfang jeder Woche; die 7. Reihe giebt gleich die Grössen: $14\,(Sb - 2^\circ)$, worin man für Sb den halben Schwingungsbogen zu setzen hat.

Um a und c von einander zu trennen, ist für das erstere substituirt worden: $a - 1{,}4\,c$; die Wahl der Zahl 1,4 geschah aus Zweckmässigkeitsgründen.

1883 Aug. 14	1 a	− 203 b	+ 2.7 c	+ 10.0 d	+ 3.7 e	= 700	+ 1.3
21	1	− 201	+ 2.6	+ 12.6	+ 3.4	706	+ 0.9
28	1	− 199	+ 2.6	+ 11.4	+ 5.1	710	+ 2.4
Sept. 4	1	− 197	+ 2.5	+ 9.0	− 4.3	708	− 0.2
11	1	− 195	+ 2.4	+ 9.4	+ 1.0	709	+ 0.2
18	1	− 193	+ 2.3	+ 7.6	+ 4.8	703	− 0.9
25	1	− 191	+ 2.2	+ 6.2	− 0.6	697	− 1.6
Oct. 2	1	− 189	+ 2.2	+ 2.8	− 6.0	681	− 3.7
9	1	− 187	+ 2.1	+ 3.8	+ 1.4	666	− 1.3
16	1	− 185	+ 2.0	+ 4.2	+ 4.4	688	− 2.5
23	1	− 183	+ 1.9	+ 2.8	− 1.1	670	− 2.3
30	1	− 181	+ 1.9	+ 1.4	+ 5.0	660	− 2.9
Nov. 6	1	− 179	+ 1.8	+ 2.0	+ 3.5	679	− 3 6
13	1	− 177	+ 1.7	− 1.8	− 6.6	624	− 2.9
20	1	− 175	+ 1.7	− 1.3	+ 1.6	632	− 3.0
27	1	− 173	+ 1.6	− 1.8	− 1.2	624	− 2.9
Dec. 4	1	− 171	+ 1.5	− 6.1	+ 4.4	579	− 3.2
11	1	− 169	+ 1.5	− 4.1	+ 2.8	568	− 0.8
18	1	− 167	+ 1.4	− 4.4	− 7.0	561	− 0.5
25	1	− 165	+ 1.3	− 4.3	+ 2.8	553	+ 0.2
1884 Jan. 1	1	− 163	+ 1.3	− 5.6	+ 12 4	543	− 0.2
8	1	− 161	+ 1.2	− 3.3	+ 4.7	560	+ 0.5
15	1	− 159	+ 1.1	− 3.1	+ 4.0	559	+ 0.8
22	1	− 157	+ 1.1	− 2 8	+ 13.0	561	+ 0.8
29	1	− 155	+ 1.0	− 1.0	− 8.4	571	+ 1.6
Febr. 5	1	− 153	+ 0.9	− 1.1	+ 3.0	561	+ 2.3
12	1	− 151	+ 0.9	− 1.9	+ 4.2	561	+ 1.6
19	1	− 149	+ 0.8	− 0.6	+ 10.0	583	+ 1.1
26	1	− 147	+ 0.8	− 3.2	− 1.5	556	+ 0.9
März 4	1	− 145	+ 0.7	− 2.5	+ 3.0	563	+ 1 1
11	1	− 143	+ 0.6	+ 2.3	− 0.7	591	+ 3.1

1884 März 18	1 *a*	— 141 *b*	+ 0.6 *c*	+ 3.2 *d*	+ 6.0 *e*	= 610	+ 3.9
25	1	— 139	+ 0.5	— 1.1	+ 0.4	564	+ 2.1
Apr. 1	1	— 137	+ 0.5	+ 4.2	+ 0.9	625	+ 2.2
8	1	— 135	+ 0.4	+ 1.3	— 2.6	614	+ 0.5
15	1	— 133	+ 0.4	— 0.9	— 1.9	608	— 0.9
22	1	— 131	+ 0.3	— 1.0	— 2.9	601	— 0.5
29	1	— 129	+ 0.3	+ 2.7	— 2.9	634	+ 0.2
Mai 6	1	— 127	+ 0.2	+ 5.4	— 9.0	638	+ 2.3
13	1	— 125	+ 0.1	+ 9.3	+ 5.2	676	+ 2.6
20	1	— 123	+ 0.1	+ 8.7	+ 0.0	696	+ 0.8
27	1	— 121	+ 0.1	+ 6.8	+ 7.8	695	— 0.8
Juni 3	1	— 119	+ 0.0	+ 6.7	— 0.1	698	— 1.0
10	1	— 117	+ 0.0	+ 7.3	— 5.3	698	— 0.6
17	1	— 115	— 0.1	+ 4.9	+ 2.8	688	— 1.7
24	1	— 113	— 0.2	+ 7.7	+ 7.9	694	+ 0.1
Juli 1	1	— 111	— 0.2	+ 12.8	+ 4.5	707	+ 3.4
8	1	— 109	— 0.2	+ 12.8	+ 2.6	720	+ 2.5
15	1	— 107	— 0.3	+ 12.6	+ 1.0	734	+ 1.4
22	1	— 105	— 0.3	+ 9.8	+ 1.0	716	+ 0.3
29	1	— 103	— 0.3	+ 9.8	+ 0.8	713	+ 0.4
Aug. 5	1	— 101	— 0.4	+ 12.4	+ 4.3	727	+ 1.3
12	1	— 99	— 0.4	+ 12.4	+ 4.9	738	+ 0.4
19	1	— 97	— 0.4	+ 12.4	+ 2.6	723	+ 1.5
26	1	— 95	— 0.4	+ 9.0	+ 3.4	717	— 0.9
Sept. 2	1	— 93	— 0.5	+ 9.2	— 0.9	719	— 1.0
9	1	— 91	— 0.5	+ 8.5	— 3.5	705	— 0.6
16	1	— 89	— 0.6	+ 10.2	+ 9.4	721	— 0.4
23	1	— 87	— 0.6	+ 7.5	+ 5.5	704	— 1.4
30	1	— 85	— 0.6	+ 6.5	+ 6.6	695	— 1.6
Oct. 7	1	— 83	— 0.7	+ 3.0	+ 4.2	684	— 3.6
14	1	— 81	— 0.7	+ 1.9	— 6.2	661	— 3.0
21	1	— 79	— 0.7	+ 0.9	+ 4.4	646	— 2.7
28	1	— 77	— 0.8	+ 0.3	+ 0.5	628	— 2.0
Nov. 4	1	— 75	— 0.8	+ 1.7	+ 6.8	625	— 0.6
11	1	— 73	— 0.8	— 1.6	+ 10.1	590	— 0.9
18	1	— 71	— 0.9	— 6.0	+ 11.1	561	— 2.4
25	1	— 69	— 0.9	— 6.1	+ 0.5	541	— 1.1
Dec. 2	1	— 67	— 0.9	— 4.1	— 1.7	547	+ 0.1
9	1	— 65	— 0.9	— 1.3	— 2.8	576	+ 0.4
16	1	— 63	— 1.0	— 3.7	— 0.4	566	— 0.9
23	1	— 61	— 1.0	— 5.8	— 6.8	544	— 1.1
30	1	— 59	— 1.0	— 7.7	+ 1.7	537	— 2.2
1885 Jan. 6	1	— 57	— 1.1	— 7.0	+ 0.1	525	— 0.8
13	1	— 55	— 1.1	— 5.9	— 4.3	544	— 1.2
20	1	— 53	— 1.1	— 11.5	— 3.8	457	+ 0.4
27	1	— 51	— 1.1	— 5.9	+ 8.8	511	+ 1.1
Febr. 3	1	— 49	— 1.1	— 2.4	— 4.2	546	+ 1.6
10	1	— 47	— 1.2	— 3.4	— 2.7	544	+ 0.8

1885 Febr. 17	1 *a*	− 45 *b*	− 1.2 *c*	− 2.4 *d*	+ 0.5 *e*	= 558	+ 0.6
24	1	− 43	− 1.2	− 0.8	− 0.4	568	+ 1.3
März 3	1	− 41	− 1.2	− 2.1	+ 3.3	567	+ 0.2
10	1	− 39	− 1.2	− 1.7	− 5.8	552	+ 1.6
17	1	− 37	− 1.3	− 1.2	+ 9.5	569	+ 0.8
24	1	− 35	− 1.3	− 2.2	− 3.2	550	+ 1.4
31	1	− 33	− 1.3	+ 2.2	+ 3.7	584	+ 2.4
Apr. 7	1	− 31	− 1.3	+ 0.5	− 3.2	605	− 0.7
14	1	− 29	− 1.3	+ 3.8	− 8.9	614	+ 1.6
21	1	− 27	− 1.3	+ 7.9	+ 2.5	656	+ 2.0
28	1	− 25	− 1.3	+ 7.6	− 3.4	670	+ 0.7
Mai 5	1	− 23	− 1.3	+ 3.0	− 9.3	633	− 0.5
12	1	− 21	− 1.3	+ 1.7	− 2.9	623	− 0.9
19	1	− 19	− 1.4	+ 3.4	− 3.5	637	− 0.5
26	1	− 17	− 1.4	+ 7.1	− 0.6	655	+ 1.3
Juni 2	1	− 15	− 1.4	+ 8.7	+ 3.1	671	+ 1.4
9	1	− 13	− 1.4	+ 10.2	+ 2.2	688	+ 1.4
16	1	− 11	− 1.4	+ 8.5	+ 4.3	689	+ 0.1
23	1	− 9	− 1.4	+ 10.6	− 1.5	700	+ 0.8
30	1	− 7	− 1.4	+ 10.4	+ 0.9	699	+ 0.7
Juli 7	1	− 5	− 1.4	+ 12.4	+ 3.6	699	+ 2.0
14	1	− 3	− 1.4	+ 12.0	+ 4.0	700	+ 1.9
21	1	− 1	− 1.4	+ 9.6	+ 2.4	697	+ 0.1
28	1	+ 1	− 1.4	+ 8.6	+ 6.3	700	− 0.7
Aug. 4	1	+ 3	− 1.4	+ 10.2	+ 1.5	700	+ 0.4
11	1	+ 5	− 1.4	+ 10.2	− 0.3	700	+ 0.4
18	1	+ 7	− 1.4	+ 6.2	+ 3.2	688	− 1.9
25	1	+ 9	− 1.4	+ 6.8	− 3.9	686	− 1.3
Sept. 1	1	+ 11	− 1.4	+ 7.2	− 0.5	688	− 0.1
7	1	+ 13	− 1.4	+ 6.5	− 1.6	688	− 1.8
14	1	+ 15	− 1.4	+ 10.0	− 1.1	696	+ 0.4
21	1	+ 17	− 1.4	+ 6.2	+ 4.5	684	− 1.8
28	1	+ 19	− 1.4	+ 3.7	− 1.0	665	− 3.1
Oct. 5	1	+ 21	− 1.3	+ 2.6	− 0.6	666	− 3.4
12	1	+ 23	− 1.3	+ 3.1	− 10.0	666	− 3.1
19	1	+ 25	− 1.3	+ 1.4	+ 1.7	659	− 3.9
26	1	+ 27	− 1.3	− 0.3	− 6.9	624	− 2.8
Nov. 2	1	+ 29	− 1.3	− 0.6	− 3.0	609	− 2.0
9	1	+ 31	− 1.3	− 2.9	+ 7.1	606	− 3.6
16	1	+ 33	− 1.3	− 4.3	+ 6.3	586	− 3.4
23	1	+ 35	− 1.3	− 2.3	− 0.5	579	− 1.4
30	1	+ 37	− 1.3	− 1.3	− 4.6	595	− 1.6
Dec. 7	1	+ 39	− 1.2	− 6.0	− 1.0	540	− 1.6
14	1	+ 41	− 1.2	− 3.7	+ 5.8	529	+ 1.1
21	1	+ 43	− 1.2	− 4.1	+ 11.5	550	− 0.9
28	1	+ 45	− 1.2	− 3.8	+ 7.6	546	− 0.4
1886 Jan. 4	1	+ 47	− 1.2	− 5.4	− 1.2	517	+ 0.4
11	1	+ 49	− 1.2	− 6.9	− 3.2	476	+ 2.1

1886 Jan. 18	1 *a*	+ 51 *b*	— 1.1 *c*	— 8.0 *d*	— 6.8 *e*	= 479	+ 0.9
25	1	+ 53	— 1.1	— 7.2	— 8.4	468	+ 2.3
Febr. 1	1	+ 55	— 1.1	— 8.0	— 5.4	473	+ 1.2
8	1	+ 57	— 1.1	— 9.7	+ 5.8	465	+ 0.4
15	1	+ 59	— 1.1	— 9.1	+ 6.5	488	— 0.9
22	1	+ 61	— 1.0	— 8.1	+ 6.0	467	+ 1.4
März 1	1	+ 63	— 1.0	— 9.4	+ 5.6	436	+ 2.6
8	1	+ 65	— 1.0	— 10.1	— 5.0	420	+ 3.1
15	1	+ 67	— 0.9	— 8.0	+ 7.6	479	+ 0.5
22	1	+ 69	— 0.9	— 1.6	+ 3.8	543	+ 3.1
29	1	+ 71	— 0.9	+ 2.0	+ 5.4	540	+ 4.0
April 5	1	+ 73	— 0.9	+ 0.3	+ 5.0	545	+ 2.1
12	1	+ 75	— 0.8	— 1.0	— 3.0	525	+ 2.6
19	1	+ 77	— 0.8	+ 2.4	+ 0.7	539	+ 4.2
26	1	+ 79	— 0.8	+ 2.0	+ 2.0	519	+ 5.2
Mai 3	1	+ 81	— 0.7	+ 0.9	+ 2.5	506	+ 5.2
10	1	+ 83	— 0.7	+ 3.1	+ 4.2	572	+ 2.2
17	1	+ 85	— 0.7	+ 9.3	+ 5.5	634	+ 2.8
24	1	+ 87	— 0.6	+ 8.5	+ 2.8	636	+ 1.8
31	1	+ 89	— 0.6	+ 8.6	— 0.3	662	— 0.1
Juni 7	1	+ 91	— 0.6	+ 8.9	— 1.0	661	+ 0.1
14	1	+ 93	— 0.5	+ 5.7	+ 7.7	634	— 0.5
21	1	+ 95	— 0.5	+ 6.3	— 4.7	641	— 0.5
28	1	+ 97	— 0.4	+ 8.1	+ 1.0	663	— 0.6
Juli 5	1	+ 99	— 0.4	+ 8.1	+ 5.0	660	— 0.5
12	1	+ 101	— 0.4	+ 7.5	+ 0.7	664	— 1.3
19	1	+ 103	— 0.3	+ 11.5	— 0.6	691	+ 0.4
26	1	+ 105	— 0.3	+ 8.6	— 2.0	662	— 0.4
Aug. 2	1	+ 107	— 0.3	+ 7.4	— 0.8	655	— 0.9
9	1	+ 109	— 0.2	+ 9.7	+ 0.1	675	— 0.4
16	1	+ 111	— 0.2	+ 10.7	— 0.1	687	— 0.2
23	1	+ 113	— 0.1	+ 12.4	+ 2.3	691	+ 0.7
30	1	+ 115	— 0.1	+ 14.1	+ 2.8	697	+ 1.7
Sept. 6	1	+ 117	+ 0.0	+ 13.1	+ 4.3	698	+ 0.7
13	1	+ 119	+ 0.0	+ 9.3	+ 3.3	679	— 1.4
20	1	+ 121	+ 0.1	+ 4.2	+ 5.4	640	— 3.1
27	1	+ 123	+ 0.1	+ 6.7	+ 0.6	663	— 2.6
Oct. 4	1	+ 125	+ 0.2	+ 6.4	+ 4.2	672	— 3.6
11	1	+ 127	+ 0.2	+ 4.5	+ 1.0	649	— 3.7
18	1	+ 129	+ 0.3	+ 1.9	— 10.0	616	— 3.6
25	1	+ 131	+ 0.3	— 0.7	+ 4.5	575	— 3.1
Nov. 1	1	+ 133	+ 0.4	+ 0.4	+ 2.9	581	— 2.6
8	1	+ 135	+ 0.4	— 0.3	— 2.3	591	— 4.3
15	1	+ 137	+ 0.5	— 1.3	— 7.2	568	— 3.3
22	1	+ 139	+ 0.5	— 2.7	+ 2.2	550	— 3.4
29	1	+ 141	+ 0.6	— 4.4	+ 8.1	538	— 4.1
Dec. 6	1	+ 143	+ 0.6	— 3.6	— 2.6	529	— 2.8
13	1	+ 145	+ 0.7	— 3.6	— 13.6	535	— 3.3

1886 Dec. 20	1 a	$+147\,b$	$+0.8\,c$	$-8.0\,d$	$-6.5\,e$	$=438$	-0.2
27	1	$+149$	$+0.8$	-8.2	$+5.7$	423	$+0.6$
1887 Jan. 3	1	$+151$	$+0.9$	-9.9	$+3.2$	422	-0.9
10	1	$+153$	$+0.9$	-10.4	-9.6	400	$+0.4$
17	1	$+155$	$+1.0$	-9.4	-1.2	364	$+3.6$
24	1	$+157$	$+1.1$	-5.8	$+11.1$	422	$+2.4$
31	1	$+159$	$+1.1$	-4.1	$+12.3$	441	$+2.6$
Febr. 7	1	$+161$	$+1.2$	-5.8	$+12.2$	424	$+2.1$
14	1	$+163$	$+1.3$	-6.1	$+13.2$	425	$+1.7$
21	1	$+165$	$+1.3$	-3.6	$+7.6$	431	$+3.4$
28	1	$+167$	$+1.4$	-1.6	$+12.1$	447	$+3.9$
März 7	1	$+169$	$+1.5$	-3.0	$+10.0$	446	$+2.6$
14	1	$+171$	$+1.5$	-6.4	$+0.9$	423	$+1.4$
21	1	$+173$	$+1.6$	-2.8	$+2.0$	453	$+2.8$
28	1	$+175$	$+1.7$	-2.4	-4.6	451	$+2.6$
April 4	1	$+177$	$+1.7$	$+0.9$	-2.7	505	$+1.6$
11	1	$+179$	$+1.8$	$+0.7$	$+0.4$	475	$+3.6$
18	1	$+181$	$+1.9$	$+2.4$	$+5.7$	518	$+1.9$
25	1	$+183$	$+1.9$	$+4.0$	-2.8	548	$+1.1$
Mai 2	1	$+185$	$+2.0$	$+4.1$	-3.1	535	$+2.0$
9	1	$+187$	$+2.1$	$+2.2$	$+0.2$	524	$+1.0$
16	1	$+189$	$+2.2$	$+2.9$	$+1.6$	546	$+0.0$
23	1	$+191$	$+2.2$	$+2.3$	-2.7	538	$+0.0$
30	1	$+193$	$+2.3$	$+5.6$	$+0.8$	560	$+1.2$
Juni 6	1	$+195$	$+2.4$	$+7.3$	-2.7	566	$+2.1$
13	1	$+197$	$+2.5$	$+8.2$	$+4.4$	558	$+3.4$
20	1	$+199$	$+2.6$	$+8.3$	$+6.1$	541	$+4.5$

Nach bekannter Methode erhält man die fünf Finalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&+202\,a - 404\,b + 5.3\,c + 398.6\,d + 245.4\,e = +121121\\
&+\ 32\,a - 1002\,b + 11.9\,c + 1119.8\,d - 3.2\,e = +\ 31611\\
&-\ 2\,a + 20404\,b - 5.3\,c - 186.0\,d + 2.6\,e = -\ 7923\\
&-\ 30\,a - 308\,b + 210.1\,c - 241.6\,d - 6.6\,e = -\ 21929\\
&+\ 40\,a - 702\,b + 28.3\,c + 247.8\,d + 839.2\,e = +\ 25081,
\end{aligned}
$$

welche befriedigt werden durch die Werthe:

$$a = +\ 577.7,\ b = -\ 0.2281,\ c = -\ 8.895,\ d = +\ 11.61,$$
$$e = -\ 0{,}964.$$

Vermittelst dieser Werthe für b und c sind die Zeitglieder aus den für die einzelnen Jahre giltigen Finalgleichungssystemen eliminirt worden. Die ersten vier Reihen der folgenden Tafel ent-

halten die Werthe der Coëfficienten für die einzelnen Jahre, die letzte giebt die definitiven, alle ausgedrückt in Bogenmaass; die Zeilen enthalten der Reihe nach: die mittleren Schwingungsbogen und die Veränderungen für 1° Temperatur-, resp. 1 mm Luftdruckerhöhung.

Gleichung:	1—51	52—102	103—153	153—202	1—202
	2° 11!7	2° 11!0	2° 11!6	2° 10!9	2° 11!3
	+ 19"5	+ 19"7	+ 17"2	+ 52"5	+ 19"7
	— 6"0	+ 1"1	— 7"5	— 1"0	— 1"1

Nach Herrn Professor FOERSTER's Untersuchungen (A. N. 2183) ist für ein Quecksilberpendel bei einem Schwingungsbogen von 164′ eine Verkleinerung von 2″—3″ für 1 mm Luftdruckerhöhung zu erwarten. Es ist nicht wahrscheinlich, dass der Schwingungsbogen eines Rostpendels eine so viel grössere Veränderung erfährt, wie obiger Coëfficient angiebt; bei seiner Unsicherheit kann man sich mit der Andeutung eines Luftdruckeinflusses begnügen.

Die übrig bleibenden Fehler (in Bogenminuten) im Sinne: Soll minus Ist, berechnet mit den Coëfficienten der einzelnen Jahre und zwar ohne Rücksicht auf die Barometerglieder, findet man in der letzten Reihe jeder Rubrik. Man bemerkt an ihnen einen Zusammenhang mit dem Sinken und Steigen der Temperatur: dies gilt nicht nur für die grössere jährliche Periode, sondern auch für die Schwankungen von kürzerer Dauer.

Einen merklichen Theil dieses Zusammenhanges, dem Sinne nach ein Zurückbleiben, könnte man erklären, wenn es erlaubt wäre, die Trägheit, mit welcher der Schwingungsbogen Luftdruckänderungen befolgt, auch für die Befolgung von Temperaturänderungen anzunehmen; zu einer vollständigen Erklärung dieser Erscheinung dürfte vielleicht auch das Verhalten des Zinkes der Compensation heranzuziehen sein. Die Annahme, dass die Temperatur mehrere Tage Nachwirkungen auf die Uhr ausübe, habe ich durch Rechnung verfolgt, und allerdings eine verbesserte Darstellung von Schwingungsbogen und Gang erreicht; von einer Wiedergabe dieser Untersuchung sehe ich indessen ab, da sie nur den Charakter eines Versuches trug.

Aus der Uebereinstimmung der Werthe des mittleren Schwingungsbogens für die vier einzelnen Jahre ersieht man, dass

die Zeit genügend berücksichtigt ist; die gesammte während der 46 Monate eingetretene Verminderung beträgt: 6.′6.

Der mittlere Fehler der Darstellung des Schwingungsbogens ist: ± 2.′1; vollführt man diese durch eine einzige Formel, so erhält man denselben Werth. Hieraus geht hervor, dass die Ursachen, welche mit der Zeit den Schwingungsbogen geändert haben, als: Elasticitätsänderung der Pendelfeder, Verdickung des Oeles, stetig gewirkt haben müssen.

V.

Die während der vier Jahre beobachteten Gänge sind in einer einzigen Ausgleichung zusammengefasst worden und lieferten 223 Gleichungen von der Form:

$$\text{Beob. G.} = a + b\,.\,(t - t_0) + d\,.\,(T - 10^\circ) + e\,.\,(B - 750^{\text{mm}}).$$

Darin bedeuten: a den mittleren Gang, b, d, e der Reihe nach: den Coëfficienten der Zeit t, der Temperatur T und des Barometerstandes B.

Man kann diese 223 Gleichungen aus dem folgenden Tableau, welches, um für das Spätere Wiederholungen zu vermeiden, hier ausführlicher angesetzt ist, ablesen. Die 1. Reihe desselben enthält die Termine der Zeitbestimmungen, die 2. die Uhrcorrectionen, die 3. die Gänge, die 4. die mittleren Temperaturen, die 5. die mittleren Barometerstände.

Die Zeit $(t - t_0)$ zählt von 1885 Juli 25.0 an, die Zeiteinheit ist: 100 Tage. Die Lücken in den Reihen der Gänge, Temperaturen und Barometerstände sind durch mehrfachen Beobachterwechsel entstanden.

1883

				mm		
223.45	−120.26				−0.13	
		−0.216	+9.4	−3.3		+0.07
231.40	118.53				−0.05	
		−192	−11.9	+6.4		+4
236.29	117.57				−0.34	
		−321	+12.2	+2.0		+12
242.49	115.61				−0.23	
		−368	+10.9	−4.5		+12
249.37	113.08				+0.02	
		−230	+8.3	+3.4		−11
255.50	111.67				+0.23	
		−185	+9.6	+4.9		+6
262.48	110.38				+0.08	
		−259	+7.1	−2.3		+9
268.30	108.87				+0.27	
		−222	+6.6	−5.8		+3
273.49	107.72				+0.20	
		−197	+3.5	−3.3		+8
280.43	106.35				+0.55	
		+23	+3.1	+6.1		−3
286.46	106.49				+0.16	
		−104	+5.0	+0.9		+1
291.55	105.96				+0.01	
		−127	+3.1	−0.6		+5
296.42	105.34				+0.12	
		+8	+2.3	+6.2		0
308.40	105.43				−0.18	
		−88	+1.4	−6.9		−3
315.38	104.82				−0.43	
		−12	−1.6	+0.4		+2
325.19	104.70				−0.12	
		+84	−0.9	−0.6		−10
332.23	105.29				−0.72	
		+3	−2.2	0.0		+1
339.21	105.31				−0.50	
		+41	−5.2	−2.3		0
352.18	105.84				+0.18	
		+75	−4.4	+1.9		0
358.28	106.30				+0.38	
		+207	−3.3	+11.8		−4
363.27	107.33				+0.37	

1884

		+193	−6.4	+12.5		+3
2.25	108.10				+0.56	
		+161	−5.1	+3.4		−6
8.40	109.09				+0.44	
		+182	−3.1	+9.2		−5
20.46	111.28				+0.21	
		+98	−3.1	−0.6		−7
25.27	111.75				+0.07	
		+19	−1.5	−2.7		−5
34.24	111.93				−0.06	

		1884				
				mm		
34.24	+ 111.93				— 0ˢ.06	
		+ 0ˢ.132	— 1°.6	+ 8.4		— 0ˢ.03
39.23	112.59				— 0.07	
		+ 102	— 0.4	+ 4.2		— 6
44.22	113.10				— 0.25	
		+ 146	— 2.3	+ 10.2		— 1
49.22	113.83				— 0.17	
		+ 57	— 2.0	+ 1.1		— 1
64.20	114.68				+ 0.08	
		+ 46	— 1.8	— 0.6		— 3
73.28	115.10				+ 0.18	
		+ 96	+ 3.7	+ 8.0		— 8
78.37	115.59				— 0.18	
		— 17	+ 3.1	— 0.1		— 4
84.36	115.49				— 0.33	
		+ 10	— 1.5	+ 1.7		+ 3
90.35	115.55				+ 0.10	
		— 4	+ 3.0	— 2.4		— 8
95.34	115.53				— 0.16	
		— 19	+ 2.0	— 2.2		— 4
109.30	115.27				— 0.03	
		— 12	— 2.0	— 4.0		0
117.30	115.17				+ 0.21	
		+ 57	+ 1.7	— 1.7		— 11
122.38	115.46				— 0.14	
		— 63	+ 2.5	— 5.0		— 3
128.37	115.08				— 0.12	
		+ 24	+ 5.9	+ 6.3		— 5
133.35	115.20				— 0.35	
		— 219	+ 9.1	+ 1.4		+ 9
138.34	114.11				+ 0.06	
		— 147	+ 9.2	+ 5.4		+ 6
144.41	113.22				+ 0.36	
		— 68	+ 8.2	+ 4.1		— 2
149.40	112.88				+ 0.27	
		— 70	+ 6.7	— 0.1		— 4
154.39	112.53				+ 0.05	
		— 164	+ 7.1	— 6.2		— 2
160.47	111.53				+ 0.19	
		— 55	+ 6.9	+ 1.6		— 4
169.41	111.04				+ 0.00	
		— 56	+ 4.8	— 0.1		— 2
176.43	110.65				+ 0.09	
		— 17	+ 7.9	+ 4.5		— 6
182.41	110.55				— 0.18	
		— 225	+ 12.6	+ 2.9		+ 6
190.51	108.73				+ 0.17	
		— 193	+ 12.7	+ 0.7		0
196.53	107.57				+ 0.12	
		— 206	+ 13.3	+ 1.2		+ 1
202.35	106.37				+ 0.09	

	1884					
202.35	+ 106°.37			mm	+ 0°.09	
		− 0°.152	+ 10°.1	+ 0.1		0°.00
207.34	105.61				+ 0.15	
		− 105	+ 9.2	+ 3 2		0
213.33	104.98				+ 0.22	
		− 67	+ 10.3	+ 4.4		− 4
218.55	104.63				− 0.21	
		− 133	+ 12.4	+ 4.9		0
224.55	103.83				− 0.06	
		− 188	+ 13.0	+ 2.6		+ 2
229.52	102.90				− 0.01	
		− 133	+ 12.1	+ 2.6		− 2
235.51	102.10				− 0.15	
		− 133	+ 10.8	+ 1.8		− 1
241.30	101.33				− 0.13	
		− 158	+ 9.6	− 3.3		− 2
250.36	99.90				− 0.07	
		− 88	+ 6.8	+ 5.4		0
255.34	99.71				+ 0.13	
		+ 26	+ 9.9	+ 9.2		− 7
260.32	99.84				− 0.15	
		− 35	+ 10.6	+ 7.4		− 4
264.31	99.70				− 0.25	
264.57	99.20				− 1.06	
		− 51	+ 8.8	+ 4.2		− 3
269.49	98.95				− 0.73	
		+ 18	+ 6.8	+ 5.9		− 5
273.37	99.02				− 0.39	
		− 41	+ 6.6	+ 4.1		− 1
281.19	98.70				+ 0.35	
		− 115	+ 3.5	− 8.0		− 1
286.34	98.11				+ 0.32	
		+ 66	+ 1.4	+ 1.6		− 6
292.35	98.51				+ 0.32	
		+ 113	+ 2.4	+ 7.2		− 6
297.30	99.07				+ 0.50	
		+ 29	+ 0.2	− 3.1		− 5
303.57	99.25				+ 0.24	
		+ 171	+ 0.7	+ 8.2		− 7
310.23	100.39				+ 0.32	
		+ 196	+ 1.9	+ 11.5		− 8
316.10	101.54				+ 0.42	
		+ 171	− 2.3	+ 9.5		− 1
324.28	102.94				+ 0.90	
		+ 38	− 5.9	− 1.8		+ 6
328.20	103.09				+ 1.07	
		+ 165	− 6.4	− 0.9		− 5
337.18	104.57				+ 0.42	
		+ 108	− 3.3	− 2.4		− 6
345.02	105.42				− 0.19	

		1884				
345.02	+ 105°42			mm	− 0°19	
		+ 0°072	− 1°4	− 0.6		− 0°04
351.50	105.85				− 0.38	
		+ 11	− 5.0	− 3.5		+ 6
364.96	106.00				− 0.20	
		1885				
		+ 189	− 6.7	+ 7.2		+ 2
7.30	107.58				+ 0.10	
		+ 83	− 6.7	− 7.3		− 3
14.88	108.21				− 0.70	
		+ 212	− 5.8	+ 7.5		− 1
19.27	109.14				− 0.72	
		+ 271	− 11.4	+ 7.9		+ 2
27.25	111.30				− 0.62	
		+ 89	− 5.8	− 4.3		− 2
33 23	111.83				− 1.09	
		− 90	− 2.5	− 6.5		+ 8
37.22	111.47				− 1.00	
		− 8	− 2.9	+ 3.2		+ 12
43.27	111.42				− 0.35	
		− 6	− 2.9	− 4.0		+ 4
48.35	111.39				− 0.46	
		− 67	− 1.3	− 4.0		+ 7
52.47	111.11				− 0.32	
		+ 84	− 1.9	+ 4.2		+ 2
62.32	111.94				− 0.07	
		− 112	− 2.2	− 7.9		+ 9
67.31	111.38				− 0.02	
		+ 108	− 1.6	+ 6.4		+ 2
72.32	111.92				+ 0.14	
		+ 91	− 1.6	+ 8.1		+ 5
76.27	112.28				+ 0.47	
		− 80	− 0.8	− 5.7		+ 6
81.30	111.88				+ 0 45	
		+ 58	− 2.1	+ 3.7		+ 5
90.30	112.40				+ 0.75	
		− 140	+ 2.4	− 4.9		+ 8
97.46	111.40				+ 1.00	
		− 144	+ 0.5	− 8.9		+ 7
103.51	110.53				+ 0.66	
		− 31	+ 2.5	− 0.5		+ 2
108.30	110.38				+ 0.94	
		− 61	+ 6.6	+ 2.2		+ 1
114.31	110.01				+ 1.07	
		− 124	+ 8.5	− 5.3		− 4
118.33	109.48				+ 0.86	
		− 180	+ 7.7	− 7.0		+ 2
124.37	108.39				+ 0.71	
		− 130	+ 3.2	− 4.0		+ 7
131.45	107.47				+ 0.87	
134.45	107.52				+ 0.82	

	1885					
				mm		
131.45	+ 107°52				+ 0°82	
		+ 0°006	+ 1°5	— 3.0		— 0°03
136.38	107.55				+ 0.42	
		+ 25	+ 2.4	— 3.2		— 6
142.50	107.70				— 0.25	
		+ 39	+ 4.3	+ 2.4		— 4
147.40	107.89				— 0.54	
		— 10	+ 7.5	+ 4.0		— 4
154.35	107.82				— 0 60	
154.35	107.64				— 0.42	
		— 50	+ 9.3	+ 1.2		— 5
159.45	107.38				— 0.65	
		— 97	+ 10.6	+ 4.8		+ 2
163.35	107.01				— 0.47	
		— 81	+ 9.9	+ 1.7		— 2
168.51	106.59				— 0.53	
		— 123	+ 8.2	— 2.4		+ 1
173.31	106.00				— 0.66	
		— 96	+ 9.8	+ 2.9		+ 1
179.53	105.40				— 0.53	
		— 114	+ 10.9	+ 1.9		0
187.41	104.50				— 0.47	
		— 104	+ 11.6	+ 5.3		+ 2
192.40	103.98				— 0.25	
		— 177	+ 12 8	+ 2.6		+ 4
198.38	102.91				+ 0.13	
		— 119	+ 11.4	+ 5.1		+ 4
204.44	102.19				+ 0.48	
		— 98	+ 9.0	+ 4.6		+ 5
208.40	101.80				+ 0.67	
		— 97	+ 8.7	+ 1.6		+ 2
216.41	101.01				+ 0.68	
		— 103	+ 10.2	0.0		— 1
222.32	100.40				+ 0.50	
		— 66	+ 11.0	+ 3.2		— 3
227.35	100.07				+ 0.31	
		— 106	+ 7.4	— 1.5		+ 2
233.32	99.44				+ 0.11	
		— 104	+ 5.7	— 2.0		+ 4
238.32	98.92				— 0.02	
		— 60	+ 6.0	— 0.8		. 0
244.31	98.56				— 0.04	
		— 69	+ 7.4	— 2.6		— 3
252.28	98.01				— 1.16	
		— 78	+ 5.9	— 0.9		+ 2
257.40	97.61				— 1.23	
		— 68	+ 9.7	+ 3.9		+ 1
265.24	97.08				— 1.36	
		— 110	+ 5.8	— 1.7		+ 5
272.26	96.31				+ 0.95	

		1885				
				mm		
272.26	+ $96^{s}.31$				+ $0^{s}.95$	
		+ $0^{s}.009$	+ $8^{\circ}.6$	— 0.8		— $0^{s}.02$
279.20	96.37				+ 1.12	
		— 83	+ 3.0	— 10.6		— 3
286.20	95.79				+ 1.37	
		+ 70	+ 3.1	+ 1.5		— 5
293.23	96.28				+ 1.30	
		— 53	+ 1.2	— 6.5		+ 2
299.23	95.96				+ 1.66	
		+ 1	0.0	— 4.8		0
306.30	95.97				+ 1.95	
		+ 224	— 0.6	+ 7.4		— 8
314.24	97.75				+ 1.52	
		+ 146	— 2.2	+ 8.3		— 2
319.52	98.52				+ 1.53	
		+ 269	— 2.8	+ 8.3		— 8
324.50	99.86				+ 1.22	
		+ 145	— 3.9	— 6.9		— 10
331.48	100.87				+ 0.76	
		+ 187	— 0.6	— 1.1		— 13
336.46	101.80				+ 0.26	
		+ 120	— 1.6	— 3.3		— 7
341.46	102.40				+ 0.05	
		+ 303	— 5.5	+ 6.8		— 8
350.33	105.09				— 0.58	
350.33	105.31				— 0.80	
		+ 291	— 3.5	+ 9.8		— 7
360.26	108.20				— 1.45	
360.26						
		1886				
5.27	109.74				— 1.57	
		+ 118	— 5.8	— 2.8		+ 1
12.23	110.56				— 1.37	
		+ 60	— 6.9	— 6.5		+ 4
18.23	110.92				— 1.01	
		+ 2	— 7.3	— 9.6		+ 7
24.37	110.94				— 0.45	
		+ 182	— 8.1	— 2.4		— 1
30.35	112.02				— 0.45	
		+ 142	— 6.8	— 6.9		— 4
36.32	112.87				— 0.63	
		+ 404	— 9.3	+ 10.6		— 7
44.27	116.12				— 1.32	
		+ 400	— 9.6	+ 4.4		— 13
51.30	118.93				— 2.26	
		+ 375	— 8.1	+ 7.6		— 9
56.28	120.80				— 2.74	
		+ 288	— 8.0	+ 5.9		— 3
60.27	121.95				— 2.82	

		1886				
60.27	+ 121.95				— $2^{s}82$	
		+ $0^{s}040$	— 9°6	mm — 11.7		+ $0^{s}05$
65.32	122 15				— 2.50	
		+ 263	— 9.1	+ 10.6		+ 7
69.24	123.24				— 2.35	
		+ 270	— 9.9	+ 4.8		+ 1
77.27	125.41				— 2 31	
		+ 327	— 7.3	+ 5.1		— 8
82.46	127.11				— 2.78	
		+ 129	— 1.5	+ 5.0		+ 2
88.25	127.86				— 2.59	
		+ 74	+ 2.0	+ 5.2		+ 2
95.27	128.38				— 2.34	
		— 86	+ 1.2	— 4.2		+ 9
101.31	127.83				— 1.61	
		+ 28	— 1.8	+ 2.4		+ 10
107.30	128.00				— 0.99	
		— 50	+ 1.4	— 2.8		+ 8
111.30	127.80				— 0.59	
		— 99	+ 2.9	+ 2.9		+ 16
117.33	127.20				+ 0.45	
		— 187	+ 3.3	— 1.3		+ 19
121.31	126.46				+ 1.29	
		+ 35	— 0.6	+ 10 1		+ 16
126.44	126.64				+ 2.10	
		+ 75	+ 1.9	+ 0.1		— 3
131.38	127.01				+ 2.04	
		+ 19	+ 3.0	— 3.9		— 3
138.36	127.14				+ 1.93	
		— 18	+ 9.8	+ 2.4		— 4
145.44	127.01				+ 1.89	
		— 85	+ 8.6	— 0.5		+ 2
151.43	126.52				+ 2.11	
		— 82	+ 9.0	+ 0.9		+ 3
156.41	126.10				+ 2.40	
		— 59	+ 8.1	— 3.3		— 3
162.45	125.74				+ 2.40	
		— 91	+ 7.7	— 2.4		+ 2
169.47	125.10				+ 2.72	
		— 42	+ 5.3	— 5.0		— 2
175.49	124.85				+ 2.72	
175.49	125.05				+ 2.52	
		+ 98	+ 7.1	+ 3.4		— 9
181.39	125.63				+ 2.06	
		+ 132	+ 8.2	+ 5.5		— 12
186.38	126.29				+ 1.51	
		+ 6	+ 8.9	— 0.2		— 7
191.48	126.32				+ 1.26	
191.48	126.18				+ 1.40	

	1886			mm		
191.48	+ 126ˢ.18				+ 1ˢ.40	
		+ 0ˢ.051	+ 6°.4	+ 0.1		— 0ˢ.07
196.39	126.43				+ 1.14	
		+ 63	+ 9.6	+ 0.3		— 13
205.52	127.01				+ 0.11	
		— 90	+ 10.2	— 1.5		— 1
210.40	126.57				+ 0.20	
		— 37	+ 8.1	0.0		— 1
216.41	126.35				+ 0.25	
		+ 40	+ 7.3	+ 2.3		— 5
221.37	126.55				+ 0.08	
		— 45	+ 10.3	— 1.5		— 5
226.35	126.33				— 0.05	
		— 12	+ 9.4	+ 2.5		— 3
231.34	126.27				— 0.09	
		— 42	+ 11.8	+ 1.0		— 5
238.32	125.98				— 0.30	
		— 90	+ 12.4	+ 5.2		+ 4
243.30	125.53				— 0.05	
		— 88	+ 14.2	+ 4.2		— 1
248.30	125.09				+ 0.02	
		— 127	+ 13.6	+ 2.9		+ 3
252.29	124.58				+ 0.22	
		— 84	+ 12.9	+ 3.7		+ 1
257.27	124.16				+ 0.34	
		— 7	+ 9.6	+ 9.3		+ 4
261.29	124.13				+ 0.55	
		— 12	+ 6.3	— 3.0		— 3
266.27	124.07				+ 0.42	
		+ 80	+ 3.6	+ 3.7		— 1
271.28	124.48				+ 0.38	
		+ 137	+ 6.6	+ 3.2		— 12
276.26	125.16				— 0.27	
		+ 58	+ 7.3	+ 2.8		— 5
282.29	125.51				— 0.51	
		— 58	+ 3.6	— 7.6		+ 1
291.32	124.99				— 0.32	
		+ 48	+ 2.6	— 0.1		0
296.30	125.23				— 0.31	
		+ 198	+ 0.2	+ 10.3		+ 1
300.29	126.02				— 0.37	
		+ 264	— 0.7	+ 10.5		— 4
305.32	127.35				— 0.70	
		+ 131	— 0.3	— 4.5		— 8
313.39	128.41				— 1.40	
		+ 19	— 0.5	— 6.9		+ 1
320.37	128.54				— 1.35	
		+ 171	— 1.5	+ 4.8		0
327.37	129.74				— 1.49	
		+ 226	— 2.6	+ 8.6		0
333.40	131.10				— 1.60	
		+ 89	— 4.3	— 3.7		+ 4
341.47	131.82				— 1.40	

		1886				
341.47	+ 131°82				− 1°40	
341.47	132.00			mm	− 1.58	
		+ 0°010	− 3°5	− 15.1		− 0°02
346.45	132.05				− 1.73	
		+ 120	− 1.9	− 8.8		− 9
351.44	132.66				− 2.20	
		+ 42	− 6.2	− 4.1		+ 11
358.31	132.95				− 1.59	
		+ 150	− 8.0	− 3.5		+ 4
363.45	133.72				− 1.53	
363.45						
		1887				
4.27	134.31				− 0.71	
		+ 176	− 9.9	− 1.0		+ 7
16.23	136.59				− 0.39	
		+ 279	− 10.1	+ 10.5		+ 10
24.23	138.82				− 0.03	
		+ 262	− 6.1	+ 13.6		+ 9
29.20	140.12				+ 0.19	
		+ 326	− 5.1	+ 7.5		− 6
34.35	141.80				− 0.34	
		+ 280	− 4.3	+ 16.1		+ 7
41.46	143.79				− 0.18	
		+ 290	− 5.9	+ 11.8		+ 4
46.35	145.24				− 0.24	
		+ 225	− 6.0	+ 7.1		+ 6
55.44	147.30				− 0.16	
		+ 285	− 2.6	+ 14.5		+ 2
60.35	148.70				− 0.24	
		+ 145	− 1.7	+ 9.5		+ 9
67.43	149.73				+ 0.12	
		+ 77	− 2.9	− 0.4		+ 7
73.40	150.19				+ 0.11	
		+ 188	− 6.3	+ 2.1		+ 4
80.37	151.50				+ 0.45	
		+ 72	− 3.0	− 2.9		+ 5
90.33	152.22				+ 0.68	
		− 7	− 1.0	− 6.7		+ 6
96.39	152.18				+ 0.90	
		+ 127	+ 0.6	+ 3.1		+ 1
102.37	152.94				+ 0.76	
		+ 124	+ 0.7	+ 4.1		+ 2
111.39	154.06				+ 0.71	
		+ 59	+ 3.7	− 2.4		− 3
117.45	154.42				+ 0.39	
		+ 52	+ 3.7	− 0.9		− 1
123.41	154.72				+ 0.28	
		+ 43	+ 4.1	+ 1.2		+ 2
130.45	155.03				+ 0.15	

	1887					
130.45	$+ 155^{\mathrm{s}}03$			mm	$+ 0^{\mathrm{s}}15$	
		$+ 0^{\mathrm{s}}050$	$+ 2^{\circ}4$	0.0		$+ 0^{\mathrm{s}}03$
139.42	155.48				+ 0.15	
		+ 48	+ 2.2	− 1.2		+ 2
148.39	155.91				− 0.10	
		+ 93	+ 4.1	+ 0.8		− 3
153.42	156.38				− 0.23	
		− 13	+ 6.3	+ 0.9		+ 4
159.40	156.30				− 0.13	
		+ 60	+ 7.2	+ 4.7		− 1
164.39	156.60				− 0.39	
169.44	157.00				− 0.58	
		− 72	+ 7.9	+ 3.2		+ 10
175.30	156.42				+ 0.05	
		− 35	+ 8.4	+ 3.8		+ 6
180.44	156.24				+ 0.20	
		+ 1	+ 8.0	+ 6.9		+ 10
185.27	156.29				+ 0.36	
		− 271	+ 9.4	+ 0.8		+ 25
192.46	154.34				+ 2.00	
		− 185	+ 10.9	+ 2.8		+ 16
197.39	153.43				+ 2.68	

Nach der Cauchy'schen Methode erhält man die Eliminationsgleichungen:

$$\begin{aligned} 223\,a - 4.454\,b + 531.6\,d + 304.2\,e &= + 4^{\mathrm{s}}794 \\ + 768.0\,b - 261.9\,d - 12.1\,e &= + 12^{\mathrm{s}}270 \\ + 1197.4\,d - 21.8\,e &= - 19^{\mathrm{s}}402 \\ + 957.4\,e &= + 10^{\mathrm{s}}540 \end{aligned}$$

und daraus die gesuchten Unbekannten:

$$a = + 0^{\mathrm{s}}04484,\; b = + 0^{\mathrm{s}}01069,\; d = - 0^{\mathrm{s}}01600,$$
$$e = + 0^{\mathrm{s}}01101;$$

also ist die Gangformel:

$$(1.)\quad \begin{aligned} G = + 0^{\mathrm{s}}045 &+ 0^{\mathrm{s}}0107\,.\,(t - \text{Juli } 25.00,\ 1885) \\ &- 0^{\mathrm{s}}0160\,.\,(T - 10^{\circ}) \\ &+ 0^{\mathrm{s}}0110\,.\,(B - 750^{\mathrm{mm}}). \end{aligned}$$

Die 6. Reihe des Tableaus enthält die hiernach übrig bleibenden Gänge; die Quadratsumme derselben ist $0^{\mathrm{s}}76$, also der mittlere Gangfehler: $\pm\ 0^{\mathrm{s}}059$.

Die von Juli 1882 bis Juni 1883 beobachteten Gänge sind

bereits von anderer Seite ausgeglichen worden; die dabei gefundene Formel:

(2.) Ber. G = Beob. $G + 0^s.0214 \cdot (T - 10^\circ) - 0^s.0105 \cdot (B - 750^{mm})$

diente zur vorläufigen Reduction für die folgenden Jahre; diese Reduction lieferte als Quadratsumme der übrig bleibenden Gänge: $1^s.95$, die Quadratsumme der gegebenen Gänge beträgt nur $4^s.50$; demnach haben das Zeitglied und der Temperaturcoëfficient der Formel (1.) die Darstellung wesentlich gebessert.

Trennt man nun die Eliminationsgleichungen für Temperatur und Luftdruck nach Jahren, so erhält man für die letzteren der Reihe nach:

I.	II.	III.	IV.
$d = -0.0199$,	$d = -0.0139$,	$d = -0.0160$,	$d = -0.0124$,
$e = +0.0102$,	$e = +0.0121$,	$e = +0.0120$,	$e = +0.0096$.

Die Abweichungen der Barometercoëfficienten sind nach der Unsicherheit der Rechnung erlaubt; die Verschiedenheit der vier Temperaturcoëfficienten indessen ist etwas grösser; sie kann es nur wünschenswerth machen, diese noch auf einem anderen Wege zu erhalten.

VI.

In dem Aufsatze: »Beobachtungen des Ganges einer Kessels-schen Pendeluhr und Bemerkungen darüber« zeigt Bessel, wie Uhrcorrectionen (vermittelst eines aus den Gängen gewonnenen Coëfficienten) vom Temperatureinfluss zu befreien sind; Wagner a. a. O. eliminirt aus ebensolchen die Einwirkung des Luftdrucks mit einem angenommenen Coëfficienten. Für unseren Fall liegt es wohl nahe, die Uhrcorrectionen zu einer Neubestimmung heranzuziehen, die letztere aber, um den Temperaturcoëfficienten auf Veränderlichkeit mit der Zeit zu prüfen, innerhalb einzelner zweckmässig gewählter Abschnitte vorzunehmen. Ein solcher. die 62 Zeitbestimmungen der ersten 14 Monate umfassend, ist dargeboten durch die 1884 September 23 eingetretene Aenderung im Modus der Beobachtung; der 2. reicht von October 1884 bis October 1885 und enthält 58 Zeitbestimmungen; der 3., den weiter zu theilen nicht rathsam ist, begreift die übrigen 20 Monate mit 94 Zeitbestimmungen; 16 verstreut liegende Zeitbestimmungen eines anderen Beobachters, nämlich:

1885:	$131^d.45$ — $154^d.35$,	
	350.33 — 360.26,	
1886:	175.49 — 191.48,	
	341.47 — 363.45,	
1887:	169.44 — 197.39,	

sind von der Ausgleichung ausgeschlossen, bei der Reduction der Uhrcorrectionen aber mit berücksichtigt worden.

Alle zum Ansatz der Bedingungsgleichungen nöthigen Vorschriften ergeben sich aus dem Umstande, dass Uhrcorrection und Uhrgang sich zu einander verhalten wie Function und Ableitung; es besteht für jede Uhrcorrection eine Gleichung von der Form:

$$U = U_0 + a \cdot (t - t_0) + b'.(t - t_0)^2 + d \cdot \int_{t_0}^{t} T \cdot dt + e \cdot \int_{t_0}^{t} B \cdot dt.$$

U_0 ist die Uhrcorrection zur Zeit t_0, a, d, e sind identisch mit den gleichlautenden Grössen der Gangformel; b' ist gleich $\frac{b}{2}$.

Der Auflösungsmethode wegen sind bei der Bildung dieser Temperatur- und Luftdrucksummen gewisse Vorsichtsmassregeln zu beachten. Um nämlich günstige Eliminationsgleichungen zu erhalten, empfiehlt es sich, Temperaturen und Barometerstände auf genaue, für den betreffenden Abschnitt giltige Mittelwerthe zu beziehen, da sonst die erwähnten Summen, anstatt nur zu schwanken, auch mit der Zeit wachsen würden; es betrüge dies, wie man sich vorstellen kann, für jeden Tag etwa die Differenz von jenem Mittelwerthe; wegen der jährlichen Temperaturperiode ist es gut, t_0 in die Zeit eines Maximums oder eines Minimums der Temperatur zu legen, weil anders die $\int_{t_0}^{t} T dt$ zum grösseren Theile zugleich mit der Zeit das Vorzeichen umkehren. Demgemäss sind Temperaturen und Barometerstände bezogen worden auf $+13^\circ.0$ resp. 751.4 mm im 1. Abschnitte, auf $+11^\circ.3$ resp. 751.1 mm im 2. und 3. Die Auswerthung der Integrale geschah durch Multiplication der mittleren Temperatur, des mittleren Luftdruckes jedes Intervalles mit der genauen Zwischenzeit und Summation der Producte von t_0 an.

Die beiden Zeitcoëfficienten endlich verlangen, dass man, soweit dies noch möglich ist, t_0 in die Mitte des Abschnittes verlegt.

Die Gleichungen des 2. und 3. Abschnittes liessen sich nicht, wie die des 1., nach der einfacheren Methode auflösen; sie erforderten, um Temperatur und Luftdruck voneinander trennen zu können, die Anwendung der Cauchy'schen Methode.

Aus den drei Systemen:

$$
(U.)\left\{
\begin{aligned}
62\,U_0 + 28.63\,a + 107.61\,b' + 7301\,d - 4399\,e &= + 6796^{s}35,\\
+ 66.60\,a + 53.60\,b' - 7739\,d + 1290\,e &= - 21^{s}29,\\
+ 31.50\,a + 81.60\,b' + 4157\,d - 177\,e &= - 80^{s}47,\\
- 24.50\,a + 36.40\,b' + 15865\,d - 1823\,e &= - 183^{s}87,\\
+ 28.60\,a + 8.40\,b' - 4855\,d + 2964\,e &= + 19^{s}67,\\[1ex]
58\,U_0 - 39039\,d + 18009\,e + 0.00\,a + 69.21\,b' &= + 6100^{s}02,\\
+ 16715\,d - 33\,e + 4.75\,a + 51.54\,b' &= - 255^{s}81,\\
+ 5119\,e - 50.99\,a - 0.65\,b' &= + 31^{s}36,\\
+ 35.37\,a - 11.62\,b' &= + 54^{s}92,\\
+ 13.10\,b' &= - 17^{s}60,\\[1ex]
94\,U_0 + 13986\,d + 5376\,e + 15.41\,a + 300.87\,b' &= + 11953^{s}26.\\
+ 31619\,d - 4890\,e - 42.72\,a - 29.55\,b' &= - 825^{s}72,\\
+ 8253\,e + 99.55\,a + 149.30\,b' &= + 850^{s}37,\\
+ 106.72\,a - 32.01\,b' &= + 834^{s}72,\\
+ 205.05\,b' &= - 10^{s}58,
\end{aligned}
\right.
$$

erhält man:

U_0	a	b'	d	e
$+111^s67$,	-4.6707,	$+1.9670$,	-0.02219,	$+0.00977$
$+94^s21$,	$+1.1114$,	-1.3435,	-0.01084,	$+0.01703$
$+127^s57$,	$+7.8602$,	-0.0514,	-0.01410,	$+0.00980$.

Mit diesen Werthen der Unbekannten sind die beobachteten Uhrcorrectionen U reducirt worden nach der Formel:

$$U_0 + a.(t-t_0) + b'.(t-t_0)^2 + d.(T-T_0) + e.(B-B_0) - U = F;$$

die übrig bleibenden Fehler F findet man in der 7. Reihe des Tableaus.

Obige drei Temperaturcoëfficienten zeigen ein ähnliches Verhalten wie die vier aus den Gängen gefundenen. Die Annahme, dass die Einwirkung der Temperatur auf den Gang von Dencker XII sich geändert habe, liesse sich stützen durch die Thatsache, dass das anfangs frische Oel sich im Laufe der vier Jahre verdickt hat; man könnte auch das Zink im Pendel verdächtigen. Indessen kommt zu der Schwierigkeit, einer derartigen zeitlichen Veränderung Rechnung zu tragen, noch die, bei alledem die bemerkenswerthe Uebereinstimmung der Temperaturcoëfficienten des Schwingungsbogens zu erklären. Man kann wohl besser den Temperaturcoëfficienten des Ganges als mit grösserer Unsicherheit behaftet ansehen; es ergeben sich dann die für die Uhrcorrectionen endgiltigen Werthe des Temperatur- und des Barometercoëfficienten am geeignetsten, indem man in den einzelnen Systemen (U.) die Zeitglieder, aus der 4. Gleichung des 1. Systems noch das Temperaturglied eliminirt und die entsprechenden Gleichungen zu einander addirt; man erhält aus:

$$+64199\,d - 6746\,e = -1044^s94$$
$$+16336\,e = +196^s52$$

für die beiden Unbekannten die Werthe:

$$d = -0^s01615, \qquad e = +0^s01203.$$

VII.

Die beiden endgiltigen Temperaturcoëfficienten stimmen genügend überein; von den Barometercoëfficienten liegen die drei aus den Uhrcorrectionen gefundenen weiter auseinander, als die vier aus den Gängen der einzelnen Jahre gefundenen; die letzteren schliessen aber den Mittelwerth der ersteren ein und man kann ohne weiteres

$$e = +0^s0110$$

als definitiven Barometercoëfficienten für das Rostpendel von Dencker XII ansehen.

Ein vollständiges Zusammenfallen der beiden Coëfficientensysteme ist, trotzdem dieselben aus den gleichen Beobachtungen berechnet sind, nicht erforderlich, da man, um eine Ganggleichung aus den einschliessenden Uhrstandgleichungen zu erhalten, nach Subtraction der letzteren voneinander, noch mit der Zwischenzeit zu dividiren hat; dies kommt aber einer Multiplication mit willkürlichen Gewichten gleich, und findet auch dann noch Uebereinstimmung statt, so ist damit Unabhängigkeit der Coëfficienten von diesen Gewichten bewiesen.

Die beiden Uhrcorrectionscoëfficienten zeigen grössere Unsicherheit, als die des Ganges; der Grund dafür liegt in der hier vorgenommenen Behandlung der Uhrcorrectionen; systematische Unterschiede dürften nur unerheblicher Art sein.

Der Gang von Dencker XII ist nicht ganz derselbe geblieben mit der Zeit; die Gangformel giebt, da sie den ganzen Zeitraum umfasst, diese Veränderung am besten; nach ihr betrug der mittlere Gang:

im August	1883:	$-$ 0^{s}030
im Juli	1885:	$+$ 0^{s}045
im Juni	1887:	$+$ 0^{s}120.

VIII.

Eine Vergleichung der übrig bleibenden Gang- und Standfehler kann man dadurch herbeiführen, dass man aus letzteren, genau als wären sie gegebene Uhrcorrectionen, tägliche Gänge ableitet.

Die Uebereinstimmung beider Gangreihen im 1. und 2., also den kürzeren der Abschnitte, in welche die Reihe der Uhrstände getheilt wurde, ist gestört durch die unvermeidliche Unsicherheit der Zeitglieder; sie ist nahe vollständig im 3., längsten Abschnitte (1885 272^{d}26 — 1887 164^{d}39).

Die mittlere Gangunsicherheit beträgt nach der Ausgleichung der Gänge selbst: $\pm$ 0.059, nach den Uhrstandresten: $\pm$ 0^{s}052; die unbedeutende Verbesserung rührt lediglich davon her, dass die eben erwähnten drei Abschnitte völlig getrennt voneinander ausgeglichen wurden; es ist dabei unter Anderem einer etwas grösseren Veränderung des mittleren Ganges während der ersten beiden Monate Rechnung getragen worden.

Wie Kaiser (A. N. 1502) bei Hohwü 17 vergebens nach einem Zusammenhange hervorstechender Abweichungen in Schwingungsbogen und Gang gesucht hat, so vermochte ich auch bei Dencker XII einen solchen nicht klarzulegen; es ist nur bemerkenswerth. dass die Zeiten der stärksten Abweichungen, in Gang 1886 April 21 — Maí 6 ($111^d.30$ — $126^d.44$), in Schwingungsbogen April 26 — Mai 10, einander theilweise decken.

Die Gangreste überschreiten nur in 16 von 228 Zeitbestimmungsintervallen das 1. Zehntel der Zeitsecunde, erreichen aber nicht das zweite; ihre Vertheilung nach Grösse und Vorzeichen ist nicht die zufälliger Fehler, man findet vielfach ausgesprochene Regelmässigkeit im Gange der Fehler; dieselbe gewinnt aber keine solche Ausdehnung, dass daraus Standreste von grösserem Betrage als 3^s entstünden.

Die Kleinheit dieser Fehlergrenzen berechtigt, nach den bis jetzt bekannt gewordenen Bearbeitungen anderer, in den gleichen Verhältnissen befindlicher Uhren zu urtheilen, zu dem Ausspruche, dass die Uhr Dencker XII zu den besten ihrer Art gehört.

W. Scheibner, *Die complexe Multiplication der Thetafunctionen.*

1) Im dritten Bande des Crelle'schen Journals haben Abel (S. 181) und Jacobi (S. 195) fast gleichzeitig (nach des Herausgebers bezüglicher Notiz S. 160 am 12. Februar und S. 192 am 2. April 1828) die Bemerkung gemacht, dass für gewisse Werthe des Moduls die elliptische Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{f\overset{4}{y}}} = m\,\frac{dx}{\sqrt{f\overset{4}{x}}}$$

algebraisch integrabel wird, auch wenn der Multiplicator m einen complexen Werth von der Form $a + b\sqrt{-D}$ hat. Zugleich gibt Abel die Anwendung seiner Formeln auf die früher von Gauss (disquis. arithm. Art. 335) angekündigte Lemniscatentheilung, worüber Gauss' Werke Bd. III, S. 403 fl. und die Arbeiten von Eisenstein zu vergleichen sind. In Jacobi's Nachlass bezieht sich der Bd. I seiner Werke S. 491—96 publicirte, nach Weierstrass' Vermuthung unmittelbar nach Vollendung der *Fundamenta* entstandene, Aufsatz auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. In neuerer Zeit ist namentlich von Kronecker und Hermite eine umfassende Theorie entwickelt worden, welche den Mathematikern vielfach Stoff zu einschlagenden Untersuchungen gegeben hat (als neueste grössere Arbeit erwähnen wir die Abhandlung von Sylow im Jahrgang 1887 des Liouville'schen Journals, S. 109—254).

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie die complexe Multiplication der elliptischen Thetafunctionen sich sehr einfach ableiten lässt, wenn man zwei quadratische Gleichungen mit einander verbindet, welche der nämlichen Irrationalität entsprechen.

Wie schon JACOBI in seinen Königsberger Vorlesungen her- 2)
vorgehoben hat, bestimmt die doppelte Functionalgleichung

$$fu = \delta f(u + \pi) = \varepsilon q e^{2ui} f(u + h\pi),$$

wo $\delta^2 = \varepsilon^2 = 1$ und $q = e^{h\pi i}$, die vier coordinirten Thetafunctionen $\Theta^{\varepsilon}_{\delta}(u, q)$ bis auf einen von u unabhängigen Factor. In der Theorie der Transformation werden Thetafunctionen in Beziehung gesetzt, deren Argumente $q = e^{h\pi i}$, $q' = e^{h'\pi i}$ durch die Gleichungen

$$h' = \frac{k' + l'h}{k + lh} \quad \text{oder} \quad h = \frac{-k' + kh'}{l' - lh'}$$

verbunden sind, wo die Coefficienten ganze Zahlen bedeuten. Die complexe Multiplication tritt ein, wenn $h = h'$ oder die quadratische Gleichung

$$lh^2 + (k - l')h - k' = 0$$

erfüllt ist. Da der imaginäre Theil von h positiv sein muss, damit q einen absoluten Werth $\bar{q} < 1$ erhalte, so ist vor Allem die Bedingung

$$4(kl' - lk') - (k + l')^2 = D > 0$$

*) erforderlich, und man bekommt

$$h = \frac{l' - k}{2l} + i\sqrt{\frac{D}{4l^2}}\,.$$

Bestimmt man nun m durch die quadratische Gleichung

$$m^2 - 2am + N = 0\,, \quad N = a^2 + b^2 D\,,$$

in welcher a und b ganze reelle positive oder negative Zahlen bezeichnen, so nehmen die beiden conjugirten Wurzeln die doppelte complexe Form an

$$m = a + bi\sqrt{D} = \alpha + \beta h$$
$$m' = a - bi\sqrt{D} = \alpha' - \beta h$$
$$\alpha = a + b(k - l')\,, \quad \alpha' = a - b(k - l')\,, \quad \beta = 2bl\,,$$
$$lN = l\alpha^2 - (k - l')\,\alpha\beta - k'\beta^2 = l\alpha'^2 + (k - l')\,\alpha'\beta - k'\beta^2\,.$$

---

*) Man sieht, dass $D \equiv 0$ oder $\equiv -1 \bmod 4$ sein muss.

Für negative Werthe von l würden m und m' mit einander zu vertauschen sein: übrigens steht Nichts im Wege, das Vorzeichen von l positiv anzunehmen, da offenbar die Vorzeichen der vier Zahlen $k\,l\,k'\,l'$ gleichzeitig umgekehrt werden dürfen. Wir wollen ferner der Kürze halber voraussetzen, dass α' und β relative Primzahlen seien, wodurch die Norm $N = mm'$ ungerade wird.

3) Betrachten wir jetzt die Function

$$fu = e^{-\frac{2blu^2 i}{m\pi}} \prod_{-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \Theta_\delta^\varepsilon \left(\frac{u+p\pi}{m}, q\right),$$

so genügt dieselbe zunächst der Bedingung $fu = \delta f(u+\pi)$. Denn

$$\frac{f(u+\pi)}{fu} = e^{-\frac{2bl}{m}(2u+\pi)i}\, \Theta\left(\frac{u+\frac{N+1}{2}\pi}{m}\right) : \Theta\left(\frac{u-\frac{N-1}{2}\pi}{m}\right),$$

wo

$$\frac{u+\frac{N+1}{2}\pi}{m} = \frac{u-\frac{N-1}{2}\pi}{m} + m'\pi\,.$$

Da nun für $\delta u = (k+lh)\pi$

$$\Theta_\delta^\varepsilon(u) = \delta^k \varepsilon^l q^{ll} e^{2lui}\, \Theta_\delta^\varepsilon(u+\delta u)\,,$$

so erhält der Quotient der beiden Thetafunctionen den Werth

$$\delta^{\alpha'} \varepsilon^\beta q^{-\beta^2} e^{\frac{2\beta}{m}\left(u-\frac{N-1}{2}\pi\right)i} = \delta e^{-\beta(m'+\beta h)\pi i}\, e^{\frac{\beta}{m}(2u+\pi)i}$$

$$= \delta e^{\frac{2bl}{m}(2u+\pi)i}\,,$$

weil β gerade, also α' ungerade und $m'+\beta h = \alpha'$ wird.

In analoger Weise ergeben sich die Werthe der Quotienten

$$\frac{f(u+m\pi)}{fu} = e^{-2bl(2u+m\pi)i}\,\delta^N = \delta e^{-\beta(2u+\beta h\pi)i}$$

$$\frac{f(u+mh\pi)}{fu} = e^{-2bl(2u+mh\pi)hi}\,\varepsilon^N q^{-N} e^{-2N\frac{u}{m}i}$$

$$= \varepsilon e^{-(m'+\beta h)(2u+mh\pi)i} = \varepsilon e^{-\alpha'(2u+\alpha' h\pi)i}\,,$$

weil

$$mh = (\alpha + \beta h)h = \{\alpha' + 2b(k - l') + 2blh\}\, h = \alpha' h + 2bk' .$$

Man hat aber

$$f(u + m\pi) = f(u + \alpha\pi + \beta h\pi) = \delta^{\alpha} f(u + \beta h\pi)$$

$$f(u + mh\pi) = f(u + 2bk'\pi + \alpha' h\pi) = f(u + \alpha' h\pi) ,$$

folglich

$$fu = q^{\beta^2} e^{2\beta ui} f(u + \beta h\pi) = \varepsilon q^{\alpha'^2} e^{2\alpha' ui} f(u + \alpha' h\pi) .$$

Bestimmt man nun, da α' und β ohne gemeinschaftlichen Theiler vorausgesetzt worden, zwei ganze Zahlen μ und μ' so, dass $\mu\alpha' + \mu'\beta = 1$, so folgt nicht allein, dass

$$fu = q^{\mu'^2\beta^2} e^{2\mu'\beta ui} f(u + \mu'\beta h\pi) = \varepsilon^{\mu} q^{\mu^2\alpha'^2} e^{2\mu\alpha' ui} f(u + \mu\alpha' h\pi) ,$$

sondern auch

$$fu = \varepsilon^{\mu} q^{(\mu\alpha' + \mu'\beta)^2} e^{2(\mu\alpha' + \mu'\beta)ui} f\{u + (\mu\alpha' + \mu'\beta)h\pi\}$$

$$= \varepsilon q e^{2ui} f(u + h\pi) .$$

Damit ist das Stattfinden der für $\Theta^{\varepsilon}_{\delta} u$ gültigen Functional- 4)
gleichung erwiesen und man erhält

$$C^{\varepsilon}_{\delta} \Theta^{\varepsilon}_{\delta}(u, q) = e^{-\frac{2blu^2 i}{m\pi}} \prod_{-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \Theta^{\varepsilon}_{\delta}\left(\frac{u + p\pi}{m}, q\right)$$

oder

$$C^{\varepsilon}_{\delta} \Theta^{\varepsilon}_{\delta}(mu, q) = e^{-\frac{2blmu^2 i}{\pi}} \prod \Theta^{\varepsilon}_{\delta}\left(u + \frac{p\pi}{m}, q\right)$$

$$= e^{-\frac{2blmu^2 i}{\pi}} \Theta^{\varepsilon}_{\delta} u \prod_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \Theta^{\varepsilon}_{\delta}\left(u + \frac{p\pi}{m}\right) \Theta^{\varepsilon}_{\delta}\left(u - \frac{p\pi}{m}\right),$$

wo die Constante C^{ε}_{δ} für $u = 0$ durch

$$C^{\varepsilon}_{\delta} = \frac{\prod \Theta\left(\frac{p\pi}{m}, q\right)}{\Theta(0, q)} = \prod_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\{\Theta^{\varepsilon}_{\delta}\left(\frac{p\pi}{m}\right)\right\}^2$$

ausgedrückt werden kann. Für $\delta = \varepsilon - 1$ ergibt sich

$$C_{-1}^{-1} = \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{m} \prod_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{m}\right).$$

5) Macht man die Voraussetzung, dass in dem Ausdrucke

$$k'N = k'\alpha^2 - (k - l')\alpha\beta' - l\beta'^2, \quad \alpha \text{ und } \beta' = 2bk'$$

keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen, so lässt sich eine ganz ähnliche Rechnung für die Function

$$fu = e^{-\frac{2blu^2i}{m\pi}} \prod_{-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \Theta_\delta^\varepsilon\left(\frac{u + ph\pi}{m}, q\right)$$

durchführen. Man findet zunächst

$$\frac{f(u+h\pi)}{fu} = e^{-\frac{\beta h}{m}(2u+h\pi)i}\,\Theta\left(\frac{u + \frac{N+1}{2}h\pi}{m}\right) : \Theta\left(\frac{u - \frac{N-1}{2}h\pi}{m}\right),$$

wo die Argumente der beiden Thetafunctionen sich um

$$m'h\pi = (\alpha h - \beta')\pi$$

unterscheiden. Mithin wird ihr Verhältniss

$$= \varepsilon^\alpha q^{-\alpha^2} e^{-\frac{2\alpha i}{m}\left(u - \frac{N-1}{2}h\pi\right)} = \varepsilon e^{\alpha(m'h-\alpha h)\pi i}\, e^{-\frac{\alpha}{m}(2u+h\pi)i}$$

$$= \varepsilon e^{-\frac{\alpha}{m}(2u+h\pi)i}$$

und

$$\frac{f(u+h\pi)}{fu} = \varepsilon e^{-(2u+h\pi)i} \quad \text{oder} \quad fu = \varepsilon q e^{2ui} f(u + h\pi).$$

Ferner erhält man eben so wie oben

$$\frac{f(u + m\pi)}{fu} = \delta e^{-\beta(2u+h\pi)i}$$

$$\frac{f(u + mh\pi)}{fu} = \varepsilon e^{-\alpha'(2m+\alpha'h\pi)i}.$$

Da nun

$$f(u+m\pi) = f(u+\alpha\pi+\beta h\pi) = \varepsilon^{\beta} q^{-\beta^2} e^{-2\beta ui} f(u+\alpha\pi)$$
$$= e^{-\beta(2u+\beta h\pi)i} f(u+\alpha\pi),$$
$$f(u+mh\pi) = f(u+\beta'\pi+\alpha' h\pi) = \varepsilon^{\alpha'} q^{-\alpha'^2} e^{-2\alpha' ui} f(u+\beta'\pi)$$
$$= \varepsilon e^{-\alpha'(2u+\alpha' h\pi)i} f(u+\beta'\pi),$$

so folgt

$$f(u+\alpha\pi) = \delta f u \quad \text{und} \quad f(u+\beta'\pi) = fu\ .$$

Macht man jetzt wieder $\mu\alpha + \mu'\beta' = 1$, da α und β' relative Primzahlen sein sollen, so wird

$$fu = \delta^{\mu} f\{u + (\mu\alpha + \mu'\beta')\pi\} = \delta f(u+\pi)\ .$$

Man schliesst daraus, dass 6)

$$C'\Theta u = e^{-\frac{2blu^2 i}{m\pi}} \prod_{-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \Theta\left(\frac{u+ph\pi}{m}\right)$$

oder

$$C'\Theta_{\delta}^{\varepsilon}(mu, q) = e^{-\frac{2blmu^2 i}{\pi}} \prod \Theta_{\delta}^{\varepsilon}\left(u + \frac{ph\pi}{m}, q\right)$$

$$= e^{-\frac{2blmu^2 i}{\pi}} \Theta_{\delta}^{\varepsilon} u \prod_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \Theta_{\delta}^{\varepsilon}\left(u+\frac{ph\pi}{m}\right)\Theta_{\delta}^{\varepsilon}\left(u-\frac{ph\pi}{m}\right)$$

nebst

$$C' = \prod_{1}^{\frac{N-1}{2}} \left\{\Theta_{\delta}^{\varepsilon}\left(\frac{ph\pi}{m}\right)\right\}^2$$

mit Ausnahme des Falles $\delta = \varepsilon = -1$, wo wiederum

$$C' = \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{m} \prod \vartheta_1^2\left(\frac{ph\pi}{m}\right)\ .$$

Von Interesse sind die beiden speciellen Fälle, in denen 7) $k - l'$, oder a verschwinden, weil alsdann resp. h und m rein imaginär werden. Wenn $l' = k$, so ergibt sich

$$h = \frac{i\sqrt{D}}{2l}, \quad D = -4lk', \quad \text{also} \quad l > 0,\ k' < 0,$$

$$kl' - lk' = k^2 + \tfrac{1}{4}D, \quad q = e^{-\pi\sqrt{-\frac{k'}{l}}}, \quad m = a + 2bi\sqrt{-lk'},$$

und a relativ prim zu $2bl$ resp. $2bk'$.

Der Fall $a = 0$ dagegen gibt

$$\alpha' = -b(k-l'), \quad \beta = 2bl, \quad \alpha = b(k-l'), \quad \beta' = 2bk',$$

folglich $b = \pm 1$, und $k - l'$ ohne gemeinschaftlichen Theiler mit resp. $2l$ oder $2k'$. Ferner wird

$$N = D = 4n - 1, \quad \pm m = i\sqrt{D} = k - l' + 2lh$$

$$C_\delta^\varepsilon \Theta_\delta^\varepsilon(ui\sqrt{D}) = e^{\frac{2lu^2\sqrt{D}}{\pi}} \prod \Theta_\delta^\varepsilon\left(u + \frac{p\pi i}{\sqrt{D}}\right)$$

oder

$$C\Theta_\delta^\varepsilon(u\sqrt{D}) = e^{-\frac{2lu^2\sqrt{D}}{\pi}} \prod_{-\frac{D-1}{2}}^{\frac{D-1}{2}} \Theta_\delta^\varepsilon\left\{\left(u + \frac{p\pi}{\sqrt{D}}\right)i\right\},$$

wo

$$C = \prod_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\{\Theta_\delta^\varepsilon\left(\frac{p\pi i}{\sqrt{D}}\right)\right\}^2 \quad \text{nebst} \quad C = \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{m} \prod \vartheta_1^2\left(\frac{p\pi i}{\sqrt{D}}\right).$$

Ebenso erhält man

$$C'\Theta_\delta^\varepsilon(u\sqrt{D}) = e^{-\frac{2lu^2\sqrt{D}}{\pi}} \prod_{-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \Theta_\delta^\varepsilon\left\{\left(u + \frac{ph\pi}{\sqrt{D}}\right)i\right\}$$

nebst

$$C' = \prod_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\{\Theta_\delta^\varepsilon\left(\frac{ph\pi i}{\sqrt{D}}\right)\right\}^2 \text{ resp. } C' = \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{m} \prod \vartheta_1^2\left(\frac{ph\pi i}{\sqrt{D}}\right).$$

8) Für $k' + l = 0$ wird die Norm von h der Einheit gleich. Als einfachste Beispiele kann man die Fälle betrachten, in denen

$$h = e^{\frac{\pi i}{2}}, \quad h = e^{\frac{\pi i}{3}} \quad \text{und} \quad h = e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

wo also h einer vierten, sechsten und dritten Wurzel der Einheit gleich wird. Der erste dieser Fälle führt bekanntlich auf die Theilung der Lemniscate. Man leitet für die vorstehenden Werthe die folgenden Sätze ab.

1) Für $k = 0$, $l = 1$, $k' = -1$, $l' = 0$ findet man

$$D = 4, \quad h = i = e^{\frac{1}{2}\pi i}, \quad q = e^{-\pi},$$

$$m = a + 2bi = a + \beta e^{\frac{1}{2}\pi i}, \quad \alpha = \alpha' = a, \quad \beta = 2b, \quad \beta' = -2b,$$

so dass die complexe Zahl m keinen reellen Theiler haben darf. Zugleich wird $N = a^2 + 4b^2 = \alpha^2 + \beta^2 \equiv 1 \bmod 4$;

$$\Theta(mu, e^{-\pi}) = ce^{-\frac{2bmu^2 i}{\pi}} \prod \Theta\left(u + \frac{p\pi}{m}, e^{-\pi}\right)$$

$$= c'e^{-\frac{2bmu^2 i}{\pi}} \prod \Theta\left(u + \frac{p\pi i}{m}, e^{-\pi}\right) .$$

2) Für $k = 0$, $l = 1$, $k' = -1$, $l' = 1$ wird

$$D = 3 , \; h = \tfrac{1}{2} + i\sqrt{\tfrac{3}{4}} = e^{\frac{1}{3}\pi i} , \quad q = ie^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}} ,$$

$$m = a + bi\sqrt{3} = \alpha + \beta e^{\frac{1}{3}\pi i} , \quad \alpha = a - b , \; \alpha' = a + b ,$$

$$\beta = 2b , \; \beta' = -2b ,$$

mithin sind a und b relative Primzahlen von ungerader Summe, während $N = a^2 + 3b^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ ungerade;

$$\Theta(mu , ie^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}) = ce^{-\frac{2bmu^2 i}{\pi}} \prod \Theta\left(u + \frac{p\pi}{m} , ie^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)$$

$$= c'e^{-\frac{2bmu^2 i}{\pi}} \prod \Theta\left(u + \frac{p\pi}{m} e^{\frac{1}{3}\pi i}, ie^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}\right).$$

3) Für $k = 0$, $l = 1$, $k' = -1$, $l' = -1$ wird

$$D = 3 , \; h = -\tfrac{1}{2} + i\sqrt{\tfrac{3}{4}} = e^{\frac{2}{3}\pi i} , \quad q = \frac{1}{i} e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}} ,$$

$$m = a + bi\sqrt{3} = \alpha + \beta e^{\frac{2}{3}\pi i} , \quad \alpha = a + b , \; \alpha' = a - b ,$$

$$\beta = 2b , \; \beta' = -2b ,$$

d. h. a und b ohne gemeinschaftlichen Theiler, während ab gerade und die Norm $N = a^2 + 3b^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ ungerade;

$$\Theta\left(mu , \frac{1}{i} e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) = ce^{-\frac{2bmu^2 i}{\pi}} \prod \Theta\left(u + \frac{p\pi}{m} , \frac{1}{i} e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)$$

$$= c'e^{-\frac{2bmu^2 i}{\pi}} \prod \Theta\left(u + \frac{p\pi}{m} e^{\frac{2}{3}\pi i} , \frac{1}{i} e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}\right).$$

Uebrigens gehen 2) und 3) durch Umkehr der Vorzeichen

von b und i in einander über. Auch überzeugt man sich leicht, dass jede durch eine reelle Zahl untheilbare complexe Zahl $\alpha + \beta e^{\frac{1}{3}\pi i}$ und $\alpha + \beta e^{\frac{2}{3}\pi i}$ durch Multiplication mit einer sechsten Einheitswurzel auf die Form $a + bi\sqrt{3}$ gebracht werden kann. In der That ist (analog wie bei den ungeraden complexen Zahlen von der Form $\alpha + \beta i$) unter den associirten Zahlen von gleicher Norm stets eine *primäre*, für welche $m \equiv 1$ oder $m \equiv \pm 1 + 2h$ mod 4. Dass das Product solcher Zahlen (nach Gauss' Forderung in der »*theoria resid. biquadr.*« Art. 36), und zwar bei beliebiger Wahl des doppelten Vorzeichens, wiederum primär ist, lehrt die Gleichung

$$(\alpha + \beta h)(\alpha_1 + \beta_1 h) = \alpha\alpha_1 + k'\frac{\beta\beta_1}{l} + \left\{\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta - (k - l')\frac{\beta\beta_1}{l}\right\}h\ .$$

SITZUNG AM 11. JUNI 1888.

C. Neumann, *Ueber das Verhalten der Green'schen Function an der Grenze ihres Gebietes.*[1])

Ist in der xy-Ebene ein Gebiet $\mathfrak{J}$ gegeben, begrenzt von einer in sich zurücklaufenden Curve, und ist ferner *innerhalb* $\mathfrak{J}$ ein fester Punkt (a, b) gegeben, so wird die diesem Punkte (a, b) entsprechende Green'sche Function $U = U(x, y)$ als diejenige zu bezeichnen sein, welche *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{J}$ eindeutig und stetig ist, welche ferner *innerhalb* $\mathfrak{J}$, sammt ihren ersten und zweiten Ableitungen nach x, y, stetig und der Gleichung $\Delta U = 0$ entsprechend ist, und welche endlich *am Rande* von $\mathfrak{J}$ gleichwerthig ist mit $\log \frac{1}{r}$, wo r den vom Punkte (a, b) nach dem Rande hinlaufenden Radiusvector vorstellt. Oder kürzer ausgedrückt: Sie wird zu bezeichnen sein als diejenige *Fundamentalfunction* des Gebietes $\mathfrak{J}$, welche am Rande von $\mathfrak{J}$ die soeben genannten Werthe $\log \frac{1}{r}$ besitzt. Setzt man also

$$\Omega = -(U + \log r),$$

und versteht man dabei unter U den Werth der Function U in einem *beliebigen* Punkte (x, y), ferner unter r den Abstand dieses Punktes (x, y) vom festen Punkte (a, b), so wird Ω eine Function von (x, y) sein, welche am Rande von $\mathfrak{J}$ überall verschwindet, welche ferner in jedwedem Punkte *innerhalb* $\mathfrak{J}$ grösser als 0, und speciell im Punkte (a, b) positiv unendlich ist.

---

1) Eingereicht während der Sitzung.

Bezeichnet nun ν die innere Normale der Randcurve, so lässt sich leicht zeigen, dass der Differentialquotient $\frac{d\Omega}{d\nu}$, falls er überhaupt existirt, längs des Randes durchweg *positiv* ist. Ebenso lässt sich ohne besondere Mühe nachweisen, dass dieser Differentialquotient niemals in *sämmtlichen* Punkten eines Randelementes verschwinden kann, wie klein das Element auch sein möge.

Ob aber dieser Differentialquotient $\frac{d\Omega}{d\nu}$ nicht in *einzelnen Punkten* des Randes verschwinden könne — diese Frage scheint bisher noch niemals in Angriff genommen, und überhaupt mit grossen Schwierigkeiten verbunden zu sein. Um so mehr dürfte es gerechtfertigt sein, wenn ich die Resultate, zu denen ich in dieser Beziehung — allerdings unter sehr starker Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchung — gelangt bin, hier in Kürze mitzutheilen mir erlaube.

Die Randcurve des Gebietes $\mathfrak{J}$ sei von Hause aus gegeben durch zwei simultane Gleichungen:

$$\xi = \mathfrak{f}(t), \quad \eta = \mathfrak{g}(t).$$

Sodann aber mag nachträglich, an Stelle der independenten Variable t, die Bogenlänge σ eingeführt, und die so entstehende neue Gestalt der beiden Gleichungen mit

$$\xi = \mathfrak{F}(\sigma), \quad \eta = \mathfrak{G}(\sigma)$$

bezeichnet sein. Ueberdies mag gesetzt sein:

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \cos\theta, \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \sin\theta;$$

so dass also θ das Azimuth der die Randcurve im Punkte (ξ, η) berührenden Tangente vorstellt. Dann lautet das von mir über $\frac{d\Omega}{d\nu}$ erhaltene Resultat folgendermassen:

Erster Satz. — *Sind die Grössen θ, $\frac{d\theta}{d\sigma}$ und $\frac{d^2\theta}{d\sigma^2}$ stetige Functionen der Bogenlänge σ, und ist überdies der Werth von $\frac{d\theta}{d\sigma}$ überall $\geqq 0$, so wird der Differentialquotient $\frac{d\Omega}{d\nu}$ am Rande überall existiren, längs des Randes überall stetig sein, und zugleich auch längs des Randes überall $> k$ sein, wo k eine bestimmt angebbare, positive und von 0 verschiedene Constante vorstellt.*

Um diese Constante k näher angeben zu können, bezeichne man den kleinsten Krümmungsradius der gegebenen Randcurve mit R, ferner den kleinsten Abstand des gegebenen Punktes (a, b) von dieser Curve mit $2P$, und verstehe sodann unter A irgend eine bestimmte positive und von 0 verschiedene Constante, die $< R$, und zugleich auch $< P$ ist. Sodann lasse man auf der innern Seite der Randcurve einen Kreis vom Radius A fortrollen, und denke sich diesen Kreis in jedem Augenblicke der genannten Bewegung in zwei Halbkreise zerlegt mittelst eines Durchmessers, welcher senkrecht steht zu dem nach dem augenblicklichen Berührungspunkte hinlaufenden Radius. Der dem Berührungspunkte *abgewendete* Halbkreis wird alsdann während jener rollenden Bewegung eine gewisse *ringförmige Fläche* überstreichen, die vom Rande des Gebietes $\mathfrak{J}$ überall durch einen Zwischenraum getrennt ist. Bezeichnet nun Ω_0 den kleinsten Werth der Function Ω in Erstreckung dieser ringförmigen Fläche. so hat jene Constante k den Werth:

$$k = \frac{\Omega_0}{64\,A} \cdot \qquad \text{(25. Mai 1888.)}$$

Auch was in dem hingestellten Satze über die *Stetigkeit* von $\frac{d\Omega}{d\nu}$ gesagt wurde, ist einer genaueren Darstellung fähig. Dabei erscheint es gut, an Stelle von $\frac{d\Omega}{d\nu}$ den Differentialquotienten $\frac{dU}{d\nu}$, oder noch besser, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ ins Auge zu fassen. Die betreffenden Sätze lauten alsdann folgendermassen:

Zweiter Satz. — Macht man dieselben Voraussetzungen wie im ersten Satze, so existiren stets zwei Functionen

$$U_1 = U_1(x, y) \quad \text{und} \quad U_2 = U_2(x, y)\,,$$

welche, ebenso wie U, Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$, und welche überdies der Art beschaffen sind, dass für jedweden Punkt (x, y) *innerhalb* $\mathfrak{J}$ die Formeln stattfinden:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = U_2\,.$$

Dieser Satz, durch welchen das Verhalten der Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ bei einer Annäherung an den Rand in ebenso scharfer

wie anschaulicher Weise dargelegt ist, führt bei seiner weiteren Entwickelung zu folgendem Resultate:

Dritter Satz. — Bezeichnet man die Polarcoordinaten irgend eines Punktes (x', y') in Bezug auf irgend einen andern Punkt (x, y) mit r, γ:

$$x' = x + r \cos \gamma\ ,$$
$$y' = y + r \sin \gamma\ ,$$

und bezeichnet man ferner die Werthe der in Rede stehenden Functionen U, U_1, U_2 in jenen beiden Punkten (x, y) und (x', y') respective mit U, U_1, U_2 und U', U_1', U_2', so wird man, falls dem Punkte (x, y) *innerhalb* $\mathfrak{J}$ oder *am Rande von* $\mathfrak{J}$ eine bestimmte *feste* Lage gegeben ist, und falls überdies irgend ein Kleinheitsgrad ε gegeben ist, um diesen Punkt (x, y), als Centrum, stets eine Kreisperipherie von solcher Kleinheit beschreiben können, dass für alle zu $\mathfrak{J}$ gehörigen[1]), und innerhalb dieser Peripherie befindlichen Punkte (x', y') die Formel stattfindet

$$\text{abs}\left(\frac{U' - U}{r} - (U_1 \cos \gamma + U_2 \sin \gamma)\right) < \varepsilon\ .$$

An diesen letzten Satz schliesst sich endlich mit ziemlicher Leichtigkeit folgender an:

Vierter Satz. — Führt man, ausser den Functionen U, U_1, U_2, noch eine neue Function $V = V(x, y)$ ein, mittelst der Formel:

$$V = \int_{x_0 y_0}^{x y} (U_1 dy - U_2 dx)\ ,$$

die Integrationscurve auf $\mathfrak{J}$ beschränkt gedacht, und setzt man sodann:

$$x + iy = z \quad \text{und} \quad U + iV = W\ , \quad (i = \sqrt{-1})\ ,$$

so wird man, falls *innerhalb* $\mathfrak{J}$ oder *am Rande von* $\mathfrak{J}$ irgend ein Punkt z markirt ist, und falls überdies irgend ein Kleinheitsgrad ε gegeben ist, um diesen Punkt z, als Centrum, stets eine Kreisperipherie von solcher Kleinheit beschreiben können, dass für alle zu $\mathfrak{J}$ gehörigen und innerhalb dieser Peripherie liegenden Punkte z' die Formel stattfindet:

$$\text{mod}\left(\frac{W' - W}{z' - z} - (U_1 - iU_2)\right) < \varepsilon\ .$$

---

1) Unter den *zu* $\mathfrak{J}$ *gehörigen Punkten* sind *sämmtliche* Punkte dieses Gebietes $\mathfrak{J}$ zu verstehen, einerlei ob sie *innerhalb* $\mathfrak{J}$, oder *am Rande von* $\mathfrak{J}$ sich befinden.

Dabei bezeichnet W' den Werth in z', während W selber, sowie auch U_1 und U_2 die Werthe der betreffenden Functionen in z vorstellen.

Hieraus folgt, *dass in jedem Randpunkte* z (ebenso wie in jedem innern Punkte z), *der Werth des Differentialquotienten* $\frac{dW}{dz}$ *unabhängig ist von der Wahl des bei seiner Bildung in Anwendung gebrachten Nachbarpunktes* $z+dz$, dass mithin die Function W im Punkte z *monogen* ist. Insbesondere aber führt jene letzte Formel zu der Erkenntniss, dass die Convergenz der *Differenzen*-Quotienten gegen den im Punkte z vorhanden Differentialquotienten eine von allen Seiten her *gleichmässige* ist, — was man allerdings für *innere* Punkte z auch mittelst der Taylor'schen Entwicklung zu beweisen vermag, nicht aber für Punkte *am Rande*.

Um die Hauptsache hervorzuheben: Man gelangt, auf Grund der letzten Formel und unter Herbeiziehung noch anderer Betrachtungen, zu dem Resultat, *dass nicht nur* W *selber*, *sondern auch* $\frac{dW}{dz}$ *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *ist*, *und dass die Entstehungsweise des Differentialquotienten* $\frac{dW}{dz}$ *in jedwedem Punkt* z *dieses Gebietes eine von allen Seiten her äquiconvergente ist.*

Die Begründung dieser Sätze, und namentlich auch die Bedeutung derselben für die Probleme der conformen Abbildung, gedenke ich in meiner zweiten Abhandlung über die Methode des arithmetischen Mittels, welche binnen Kurzem für den Druck fertig sein dürfte, näher darzulegen.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

INHALT.

Seite

W. Scheibner, Mathematische Bemerkungen. (Auszüge aus Briefen an Prof. Baltzer.) 1

Sophus Lie, Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie. 14

C. Neumann, Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper. Zweiter Artikel. (Mit 5 Figuren) 22

W. G. Hankel, Das elektrodynamische Gesetz ein Punktgesetz. (Mit 5 Figuren) 89

E. Drechsel, Ueber Elektrolyse des Phenols mit Wechselströmen 110

C. Neumann, Ueber die Stetigkeit mehrdeutiger Functionen. 120

Richard Schumann, Ueber den Gang der Pendeluhr F. Dencker XII 124

W. Scheibner, Die complexe Multiplication der Thetafunctionen 154

C. Neumann, Ueber das Verhalten der Green'schen Function an der Grenze ihres Gebietes 163

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

3 2044 092 879 949